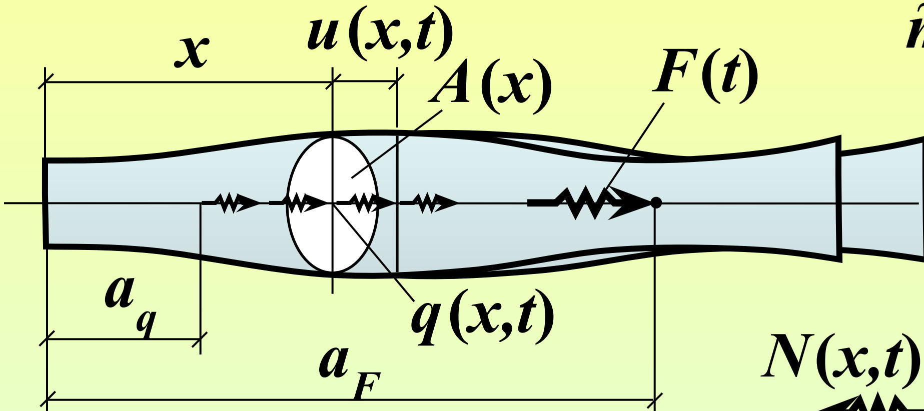
ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ

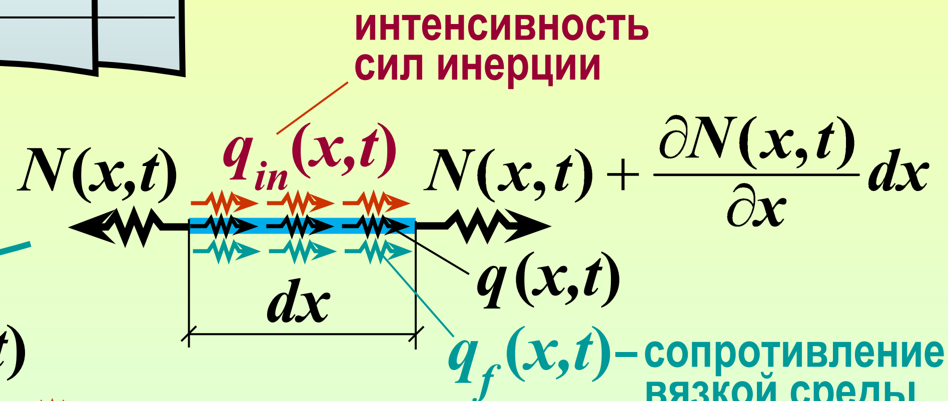
ДИНАМИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ МАССАМИ

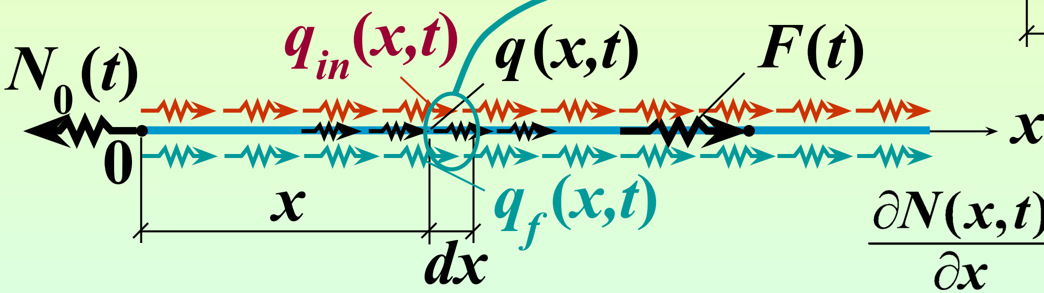
2

Динамическое растяжение/сжатие прямолинейного стержня с распределённой массой



$$\tilde{m}(x) = \tilde{m}_{\text{соб}}(x) + \tilde{m}_{\text{пр}}(x) = \rho(x)\cdot A(x) + \tilde{m}_{\text{пр}}(x)$$





1. Статическая сторона задачи: $\Sigma x = 0$

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} = -q(x,t) - q_{in}(x,t) - q_f(x,t) \quad (1)$$

2. Геометрическая сторона задачи (соотношение Коши):

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (2)$$

$$N(x,t) = EA(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

3. Физическая сторона задачи:

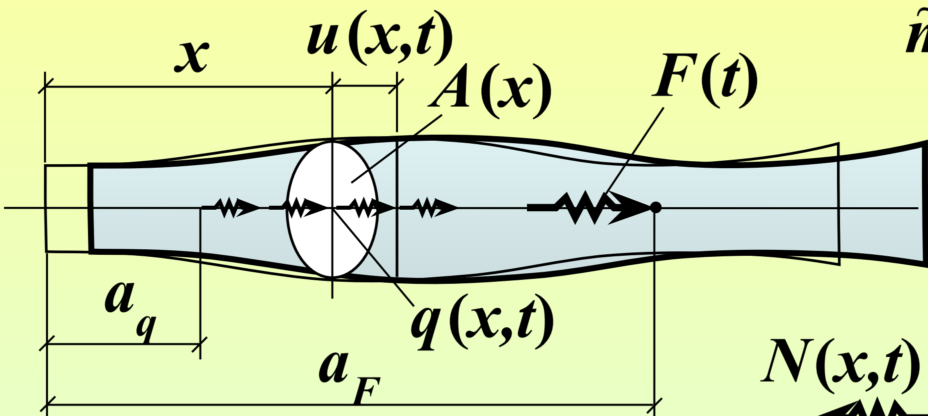
– закон Гука: $\varepsilon(x,t) = \dfrac{N(x,t)}{EA(x)}$ (3а)

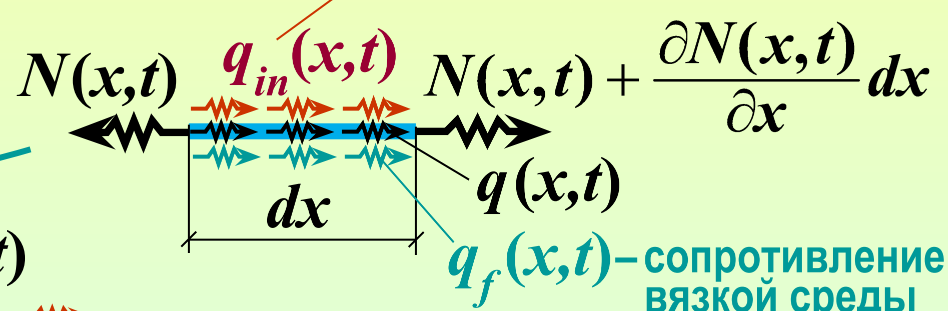
– закон инерции: $q_{in}(x,t) = -\tilde{m}(x)\ddot{u}(x,t)$ (3б)

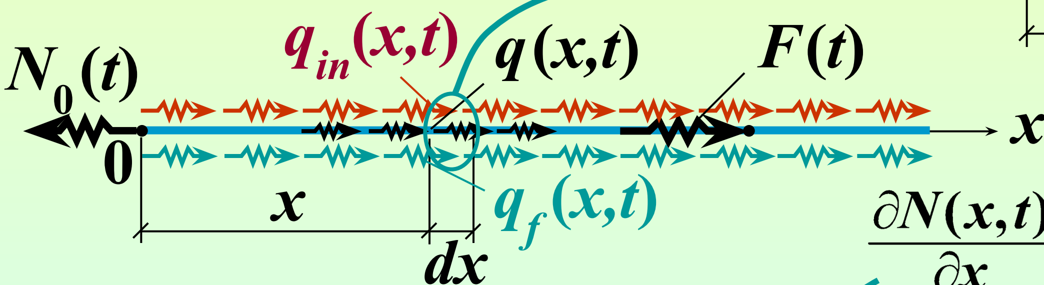
– модель вязкого трения: $q_f(x,t) = -k_f(x)\dot{u}(x,t)$ (3в)

Динамическое растяжение/сжатие прямолинейного стержня с распределённой массой

$$\tilde{m}(x) = \tilde{m}_{\text{соб}}(x) + \tilde{m}_{\text{пр}}(x) = \rho(x)\cdot A(x) + \tilde{m}_{\text{пр}}(x)$$







1. Статическая сторона задачи: $\Sigma x = 0$

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} = -q(x,t) - q_{in}(x,t) - q_f(x,t) \quad (1)$$

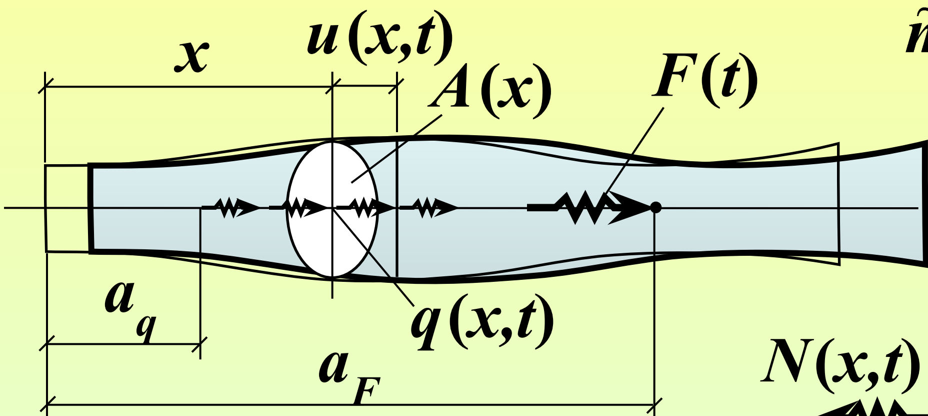
3. Физическая сторона задачи:

$$N(x,t) = EA(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

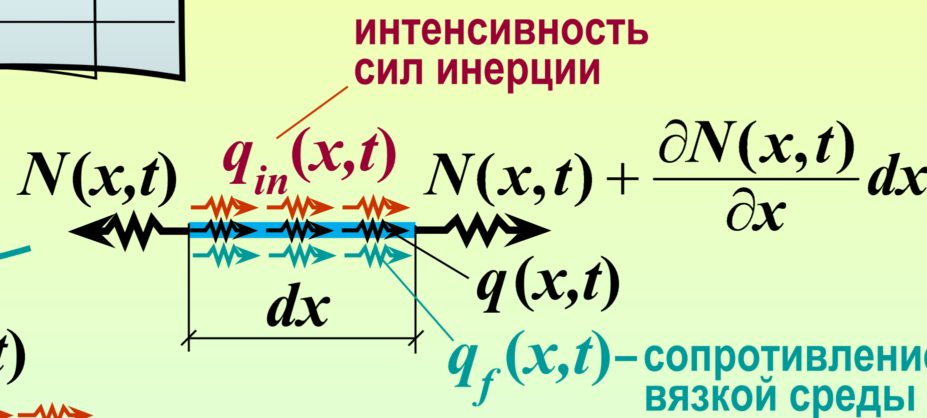
– закон инерции: $q_{in}(x,t) = -\tilde{m}(x)\,\ddot{u}(x,t)$

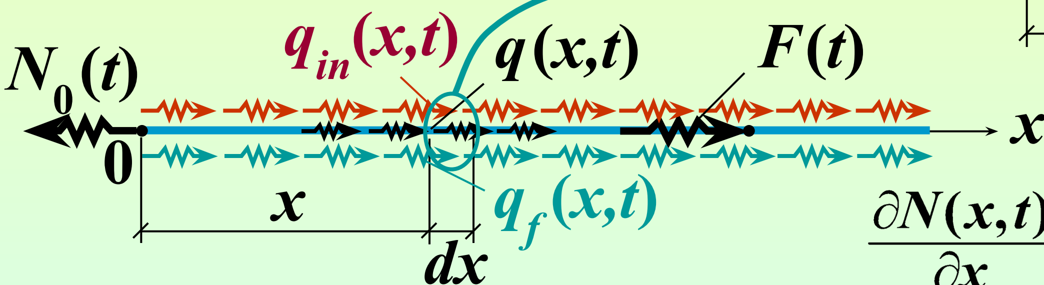
– модель вязкого трения: $q_f(x,t) = -k_f(x)\,\dot{u}(x,t)$

Динамическое растяжение/сжатие прямолинейного стержня с распределённой массой



$$\tilde{m}(x) = \tilde{m}_{\text{соб}}(x) + \tilde{m}_{\text{пр}}(x) = \rho(x)\cdot A(x) + \tilde{m}_{\text{пр}}(x)$$



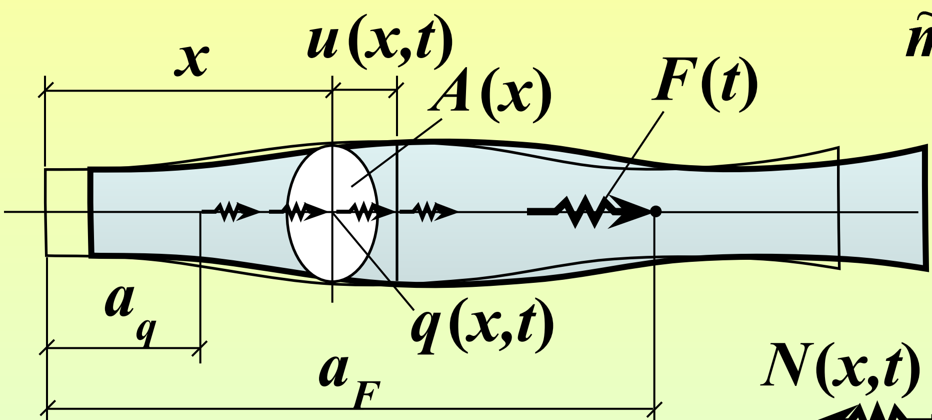


1. Статическая сторона задачи: $\Sigma x = 0$

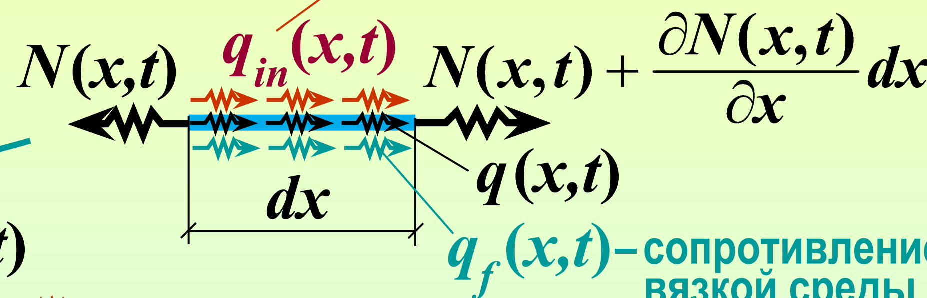
$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} = -q(x,t) - q_{in}(x,t) - q_f(x,t) \quad (1)$$

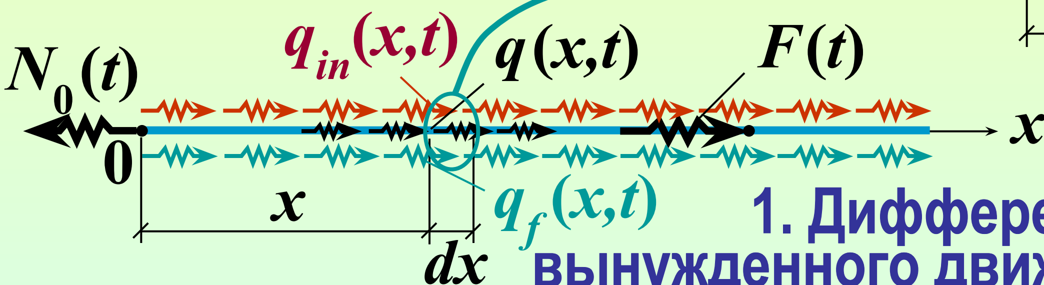
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] - \tilde{m}(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - k_f(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -q(x,t)$$

Динамическое растяжение/сжатие прямолинейного стержня с распределённой массой



$$\tilde{m}(x) = \tilde{m}_{\text{соб}}(x) + \tilde{m}_{\text{пр}}(x)$$
$$= \rho(x)\cdot A(x) + \tilde{m}_{\text{пр}}(x)$$





Частные случаи:

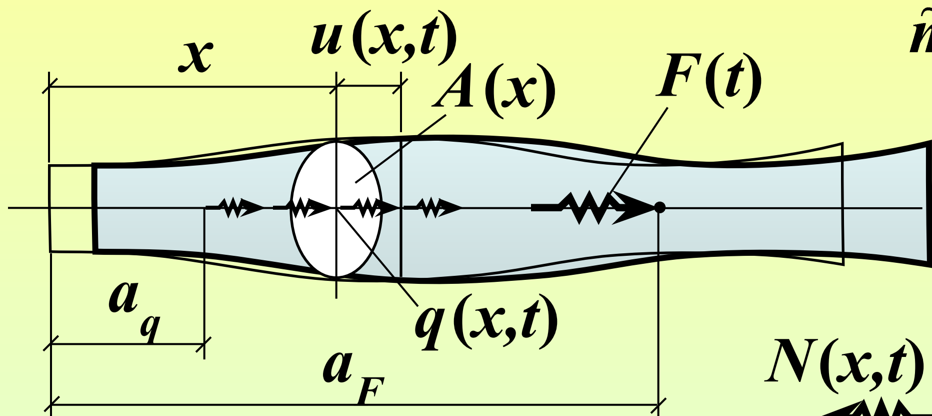
1. Дифференциальное уравнение вынужденного движения растянутого/сжатого прямолинейного стержня переменного сечения с неравномерно распределённой массой,

без учёта демпфирования (сопротивления)

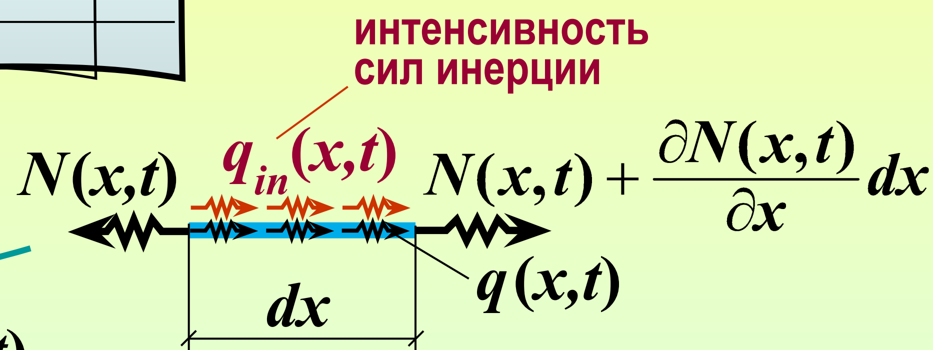
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] - \tilde{m}(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -q(x,t)$$

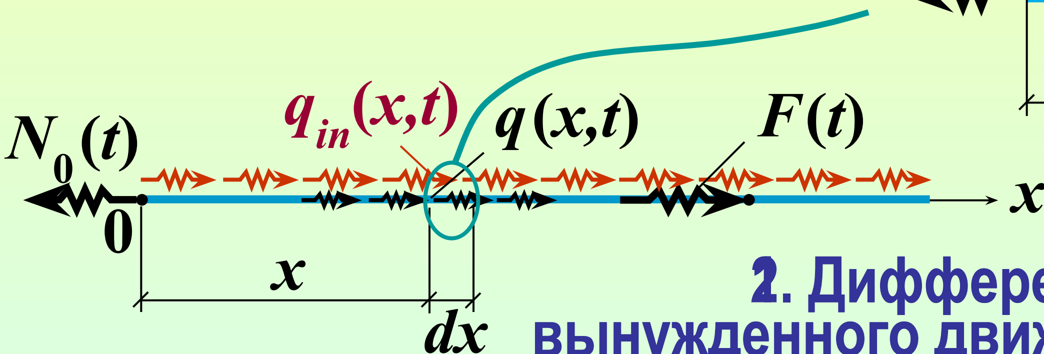
– уравнение в частных производных с переменными коэффициентами

Динамическое растяжение/сжатие прямолинейного стержня с распределённой массой



$$\tilde m(x) = \tilde m_{\text{соб}}(x) + \tilde m_{\text{пр}}(x)$$
$$= \rho(x)\cdot A(x) + \tilde m_{\text{пр}}(x)$$





Частные случаи:

1. Дифференциальное уравнение
2. Дифференциальное уравнение
вынужденного движения растянутого/сжатого прямолинейного стержня переменного сечения
прямолинейного стержня постоянного сечения
с неравномерно распределённой массой,
с равномерно распределённой массой,
без учёта демпфирования (сопротивления)

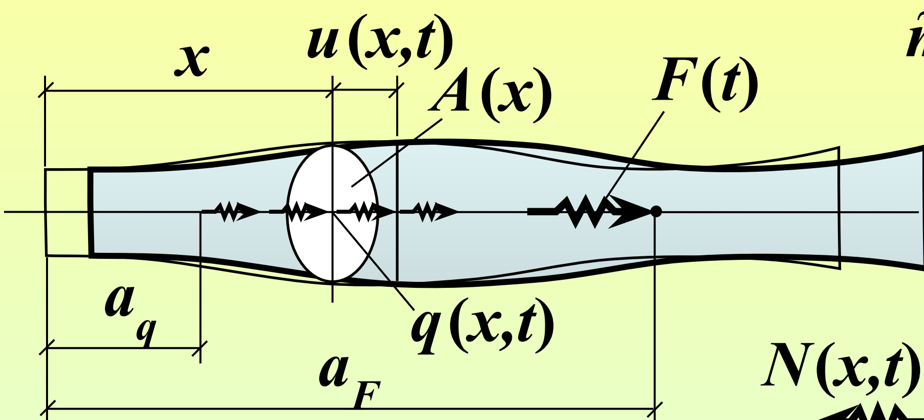
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] - \tilde m(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -q(x,t)$$

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\tilde m}{EA}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{q(x,t)}{EA}$$

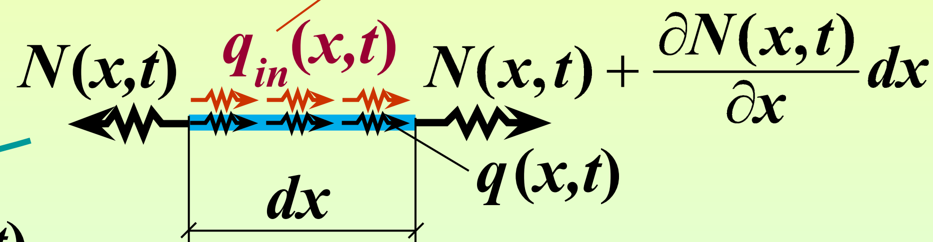
– уравнение в частных производных с переменными коэффициентами
– уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами

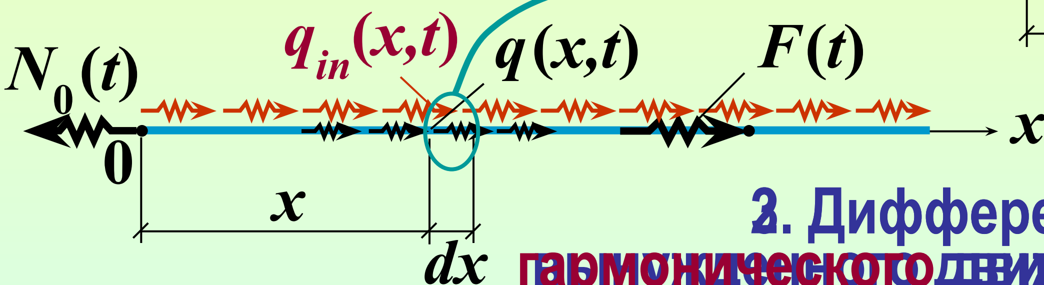
Динамическое растяжение/сжатие прямолинейного стержня с распределённой массой



$$\tilde{m}(x) = \tilde{m}_{\text{соб}}(x) + \tilde{m}_{\text{пр}}(x) = \rho(x)\cdot A(x) + \tilde{m}_{\text{пр}}(x)$$

интенсивность сил инерции





Частные случаи:

2. Дифференциальное уравнение продольного движения растянутого/сжатого прямолинейного стержня постоянного сечения с равномерно распределённой массой, без учёта демпфирования (сопротивления)

3. Дифференциальное уравнение гармонического движения растянутого/сжатого прямолинейного стержня постоянного сечения с равномерно распределённой массой, без учёта демпфирования (сопротивления)

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\tilde{m}}{EA}\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{q(x,t)}{EA}$$

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{\tilde{m}\,\omega_F^2}{EA}\cdot u(x) = -\frac{q(x)}{EA}$$

Решение уравнения:

$$u(x,t) = \bar{u}(x,t) + u^*(x,t)$$

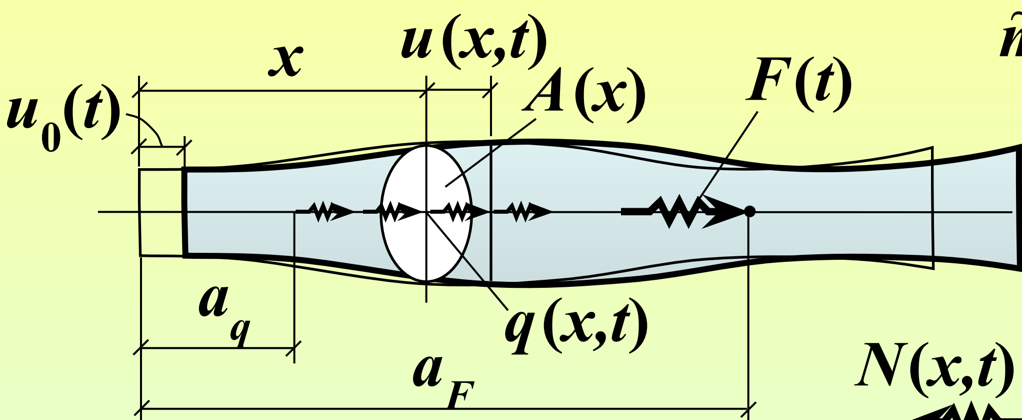
$$\bar{u}(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x)\cdot\sin(\omega_j t + \varphi_{0j})$$

$\triangle$ полигармоническая собственная составляющая

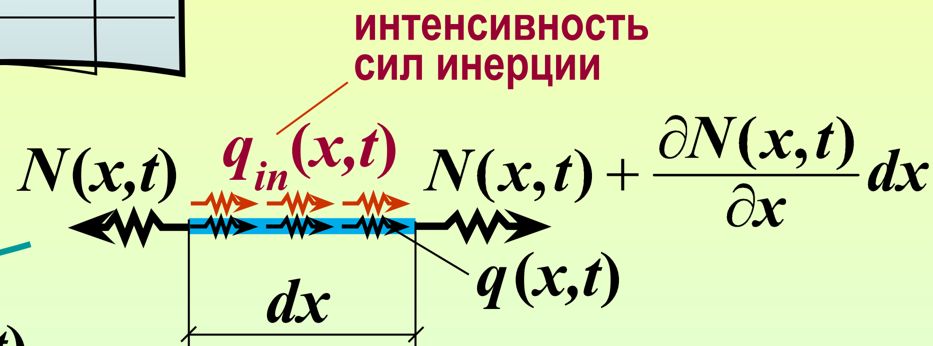
– уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами

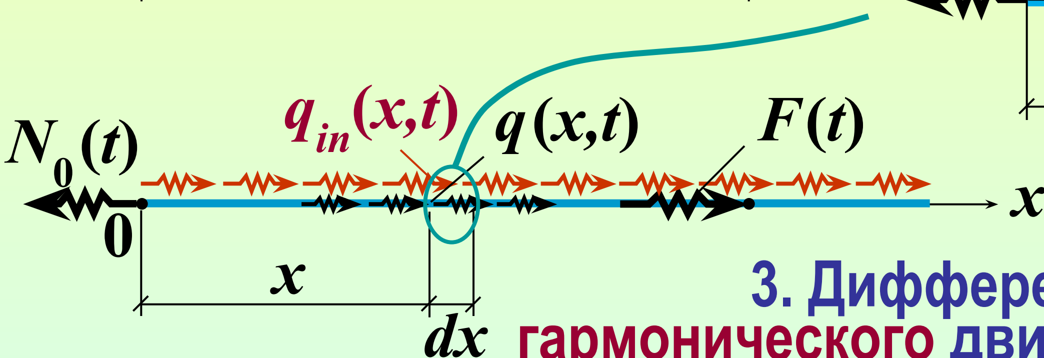
– уравнение с постоянными коэффициентами

Динамическое растяжение/сжатие прямолинейного стержня с распределённой массой



$$\tilde{m}(x) = \tilde{m}_{\text{соб}}(x) + \tilde{m}_{\text{пр}}(x) = \rho(x)\cdot A(x) + \tilde{m}_{\text{пр}}(x)$$





Частные случаи:

3. Дифференциальное уравнение гармонического движения растянутого/сжатого прямолинейного стержня постоянного сечения с равномерно распределённой массой, без учёта демпфирования (сопротивления)

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{\tilde{m}\omega_F^2}{EA}\cdot u(x) = -\frac{q(x)}{EA}$$

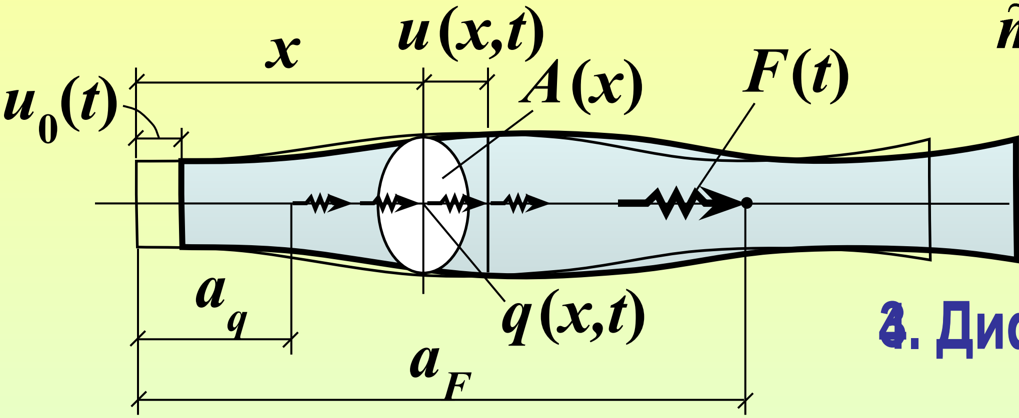
– уравнение в амплитудах перемещений

Решение уравнения:

При $q(x) = \text{const} = q$

$$u(x) = u_0 \cos kx + \frac{N_0}{kEA}\sin kx - \sum \frac{F}{kEA}\sin k(x-a_F) - \sum \frac{q}{k^2EA}\left[1-\cos k(x-a_q)\right]$$

Динамическое растяжение/сжатие прямолинейного стержня с распределённой массой

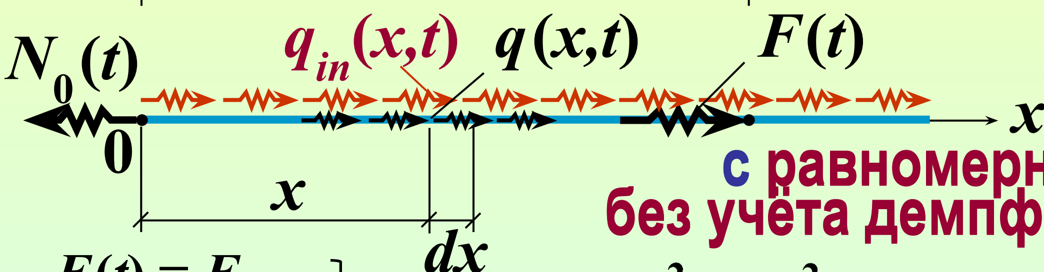


$$\tilde m(x)=\tilde m_{\text{соб}}(x)+\tilde m_{\text{пр}}(x)=\rho(x)\cdot A(x)+\tilde m_{\text{пр}}(x)$$

Частные случаи:

1. Дифференциальное уравнение продольного движения
2. гармонических колебаний / собственных колебаний

растянутого/сжатого прямолинейного стержня постоянного сечения с равномерно распределённой массой, без учёта демпфирования (сопротивления)



$$\left.\begin{aligned}F(t)&=F\\ q(x,t)&=q(x)\\ u(x,t)&=u(x)\\ q_{in}(x,t)&=q_{in}(x)\\ u_0(t)&=u_0\\ N_0(t)&=N_0\end{aligned}\right\}\cdot\sin\omega_F t$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2}+k^2\cdot u(x)=-\frac{q(x)}{EA}$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2}+k^2 u(x)=0$$

$$\text{где } k=\sqrt{\frac{\tilde m\omega_F^2}{EA}}$$

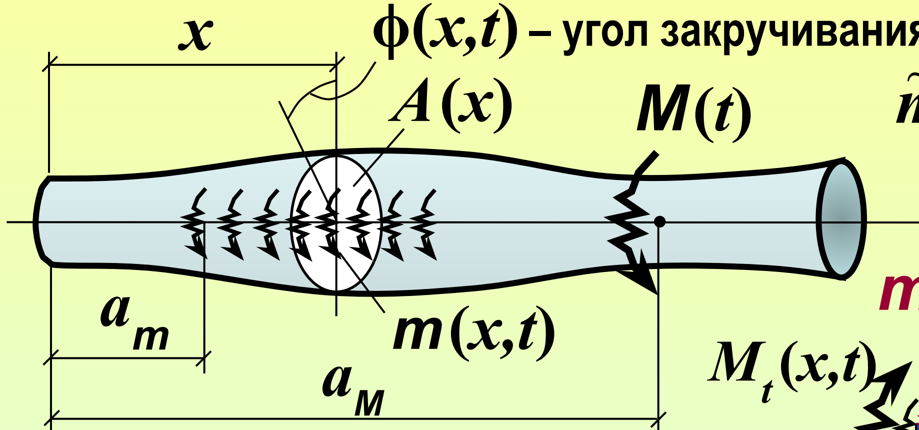
– уравнение в амплитудах перемещений

Решение уравнения по МНП при $q(x)=\text{const}=q$ / $q(x)=0$:

$$u(x)=u_0\cos kx+\frac{N_0}{kEA}\sin kx-\sum\frac{F}{kEA}\sin k(x-a_F)-\sum\frac{q}{k^2EA}\left[1-\cos k(x-a_q)\right]$$

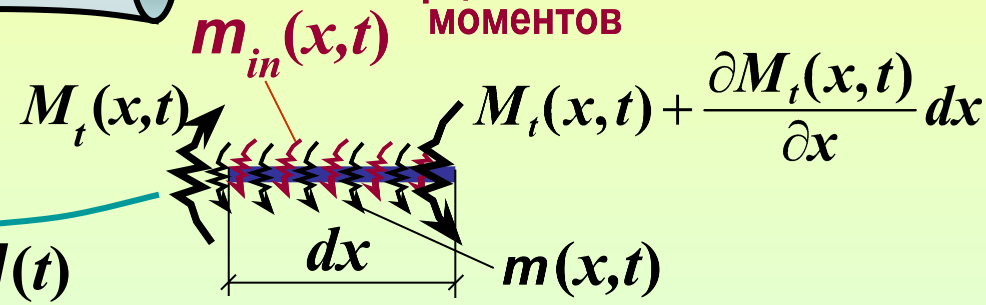
$F(t)$ – сила инерции точечной массы или реакция упругой продольной связи

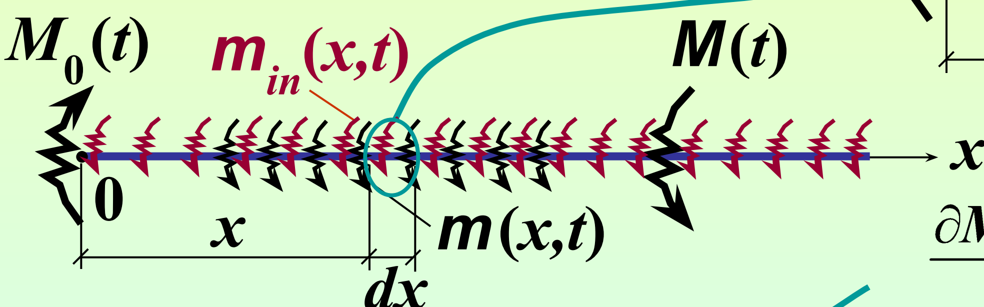
Динамическое кручение прямолинейного стержня с распределённой массой



$$\tilde{m}(x) = \rho(x)\cdot A(x)$$

интенсивность инерционных моментов





1. Статическая сторона задачи: $\Sigma m_x = 0$

$$\frac{\partial M_t(x,t)}{\partial x} = -m(x,t) - m_{in}(x,t) \quad (1)$$

2. Геометрическая сторона задачи (погонный угол закручивания):

$$\theta(x,t) = \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} \quad (2)$$

3. Физическая сторона задачи:

– закон Гука: $\theta(x,t) = \dfrac{M_t(x,t)}{GI_t(x)}$ (3а)

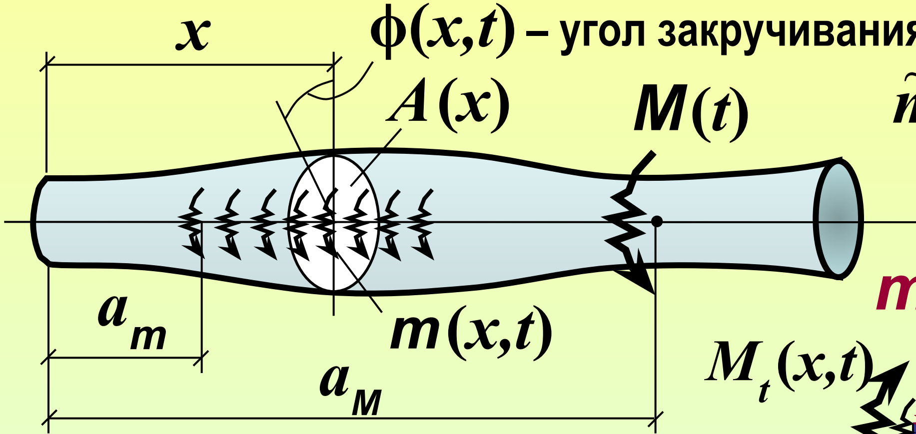
– закон инерции: $m_{in}(x,t) = -\tilde{I}_m(x)\ddot{\varphi}(x,t)$ (3б)

$$M_t(x,t) = GI_t(x)\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GI_t(x)\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}\right] - \rho I_p(x)\cdot\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = -m(x,t)$$

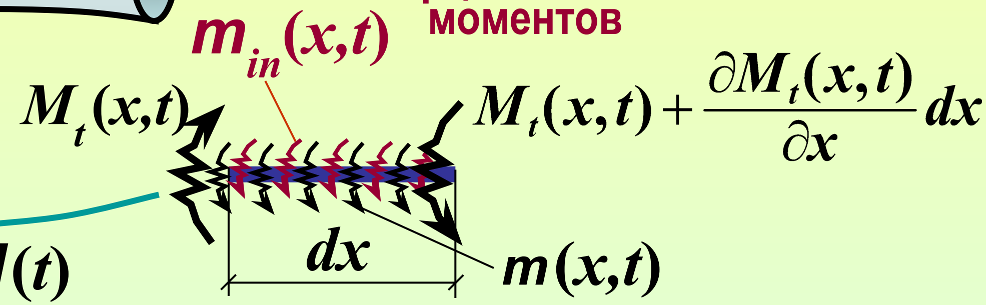
$$\tilde{I}_m(x) = \rho I_p(x)$$

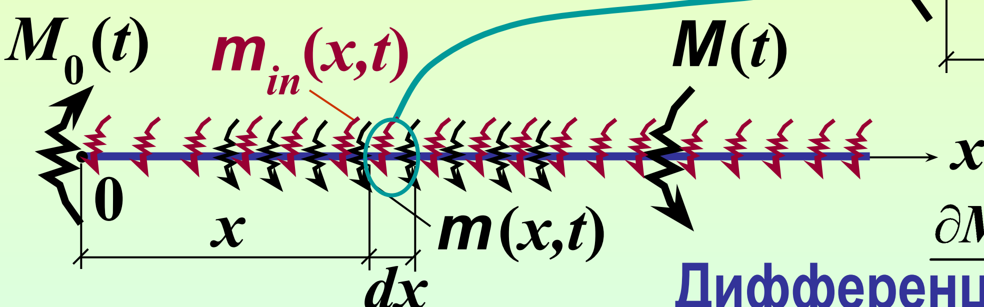
Динамическое кручение прямолинейного стержня с распределённой массой



$$\widetilde{m}(x) = \rho(x)\cdot A(x)$$

интенсивность инерционных моментов





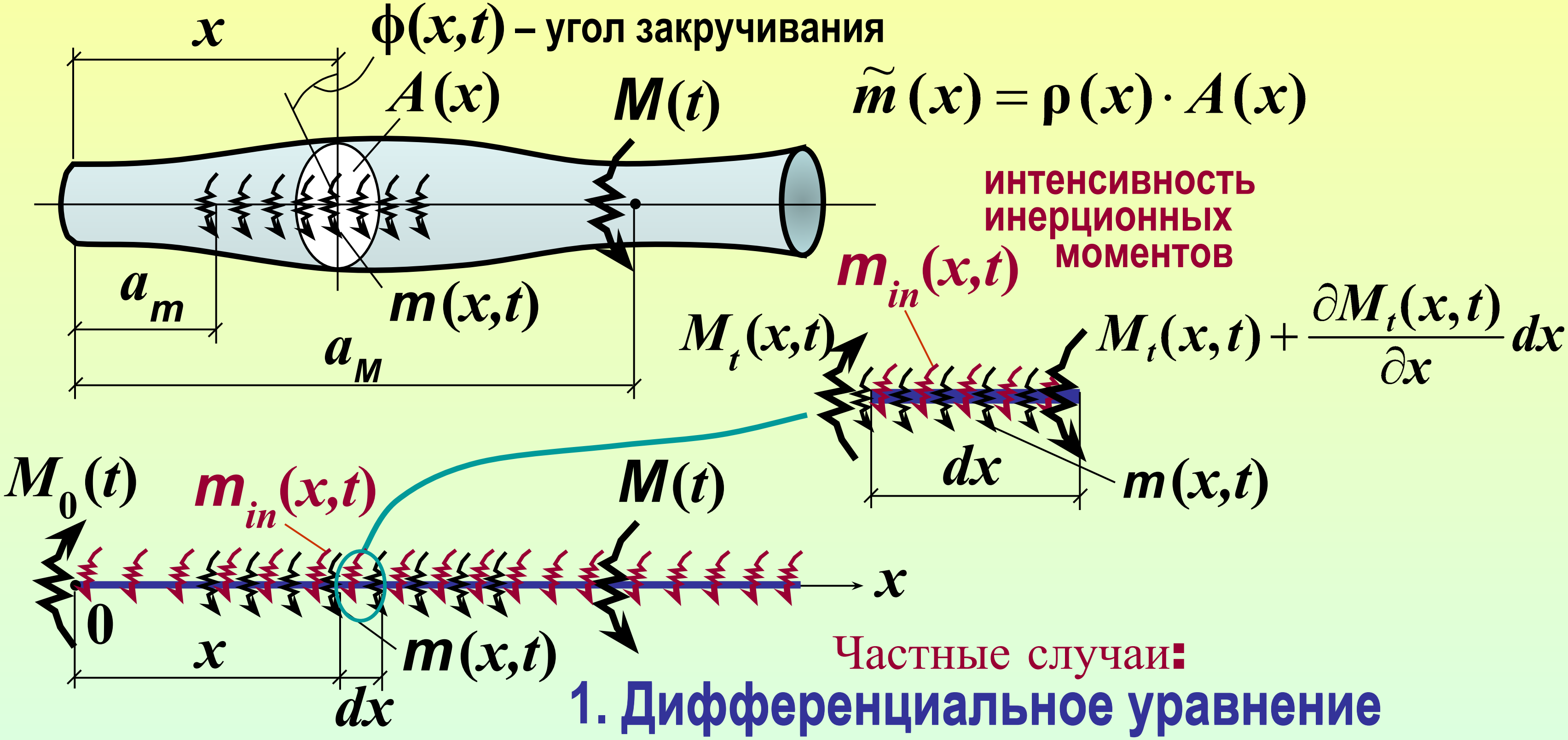
1. Статическая сторона задачи: $\Sigma m_x = 0$

$$\frac{\partial M_t(x,t)}{\partial x} = -m(x,t) - m_{in}(x,t) \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение вынужденного движения при кручении прямолинейного стержня переменного сечения с неравномерно распределённой массой, без учёта демпфирования (сопротивления)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GI_t(x)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right] - \rho I_p(x)\cdot\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2} = -m(x,t)$$

Динамическое кручение прямолинейного стержня с распределённой массой



Частные случаи:

1. Дифференциальное уравнение вынужденного движения при кручении прямолинейного стержня переменного сечения / постоянного сечения с неравномерно распределённой массой / с равномерно распределённой массой, без учёта демпфирования (сопротивления)

Решение уравнения:

$$\varphi(x,t) = \bar{\varphi}(x,t) + \varphi^*(x,t)$$

$$\bar{\varphi}(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x)\cdot\sin(\omega_j t + \phi_{0j})$$

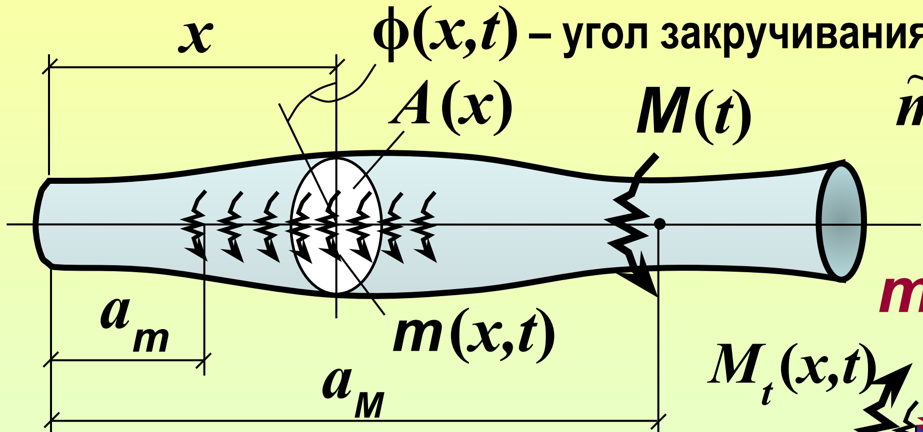
полигармоническая собственная составляющая

Волновое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GI_t(x)\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}\right] - \rho\cdot I_p(x)\cdot\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2} = -m(x,t)$$

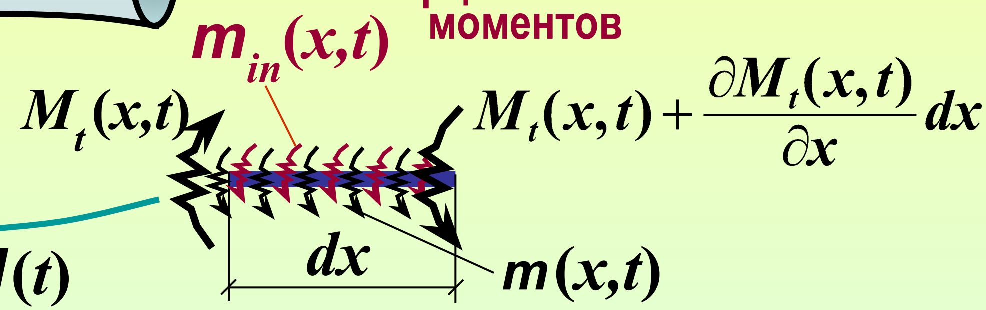
$$\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\rho I_p}{GI_t}\cdot\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{m(x,t)}{GI_t}$$

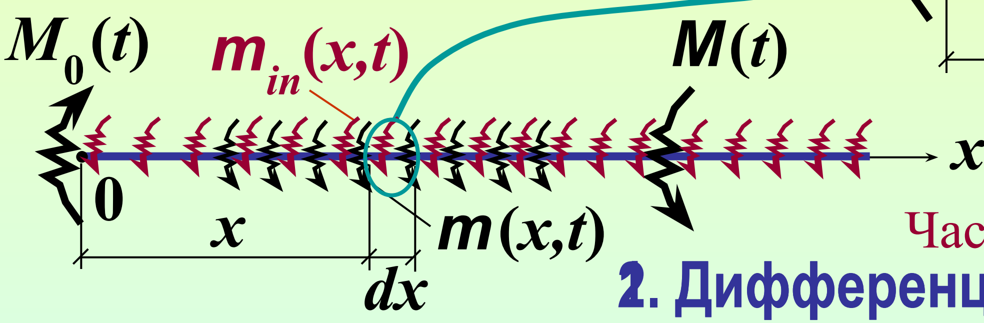
Динамическое кручение прямолинейного стержня с распределённой массой



$$\tilde{m}(x) = \rho(x) \cdot A(x)$$

интенсивность инерционных моментов





Частные случаи:

1. Дифференциальное уравнение вынужденных крутильных колебаний прямолинейного стержня постоянного сечения с равномерно распределённой массой, без учёта демпфирования (сопротивления)

2. Дифференциальное уравнение гармонических крутильных колебаний прямолинейного стержня постоянного сечения с равномерно распределённой массой, без учёта демпфирования (сопротивления)

Решение уравнения:

$$\varphi(x,t) = \bar{\varphi}(x,t) + \varphi^{*}(x,t)$$

$$\bar{\varphi}(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) \cdot \sin(\omega_j t + \phi_{0j})$$

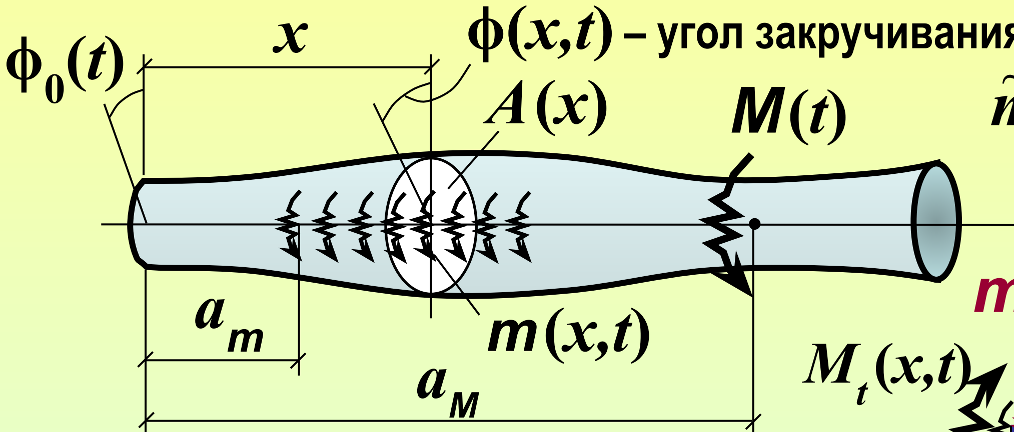
полигармоническая собственная составляющая

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho I_p}{GI_t} \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} - \frac{m(x,t)}{GI_t}$$

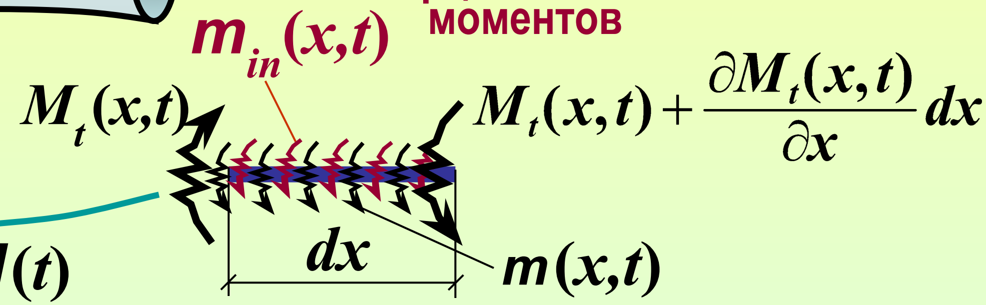
$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + k^2 \cdot \varphi(x) = \frac{m(x)}{GI_t}, \quad k = \sqrt{\frac{\rho I_p \omega_F^2}{GI_t}}$$

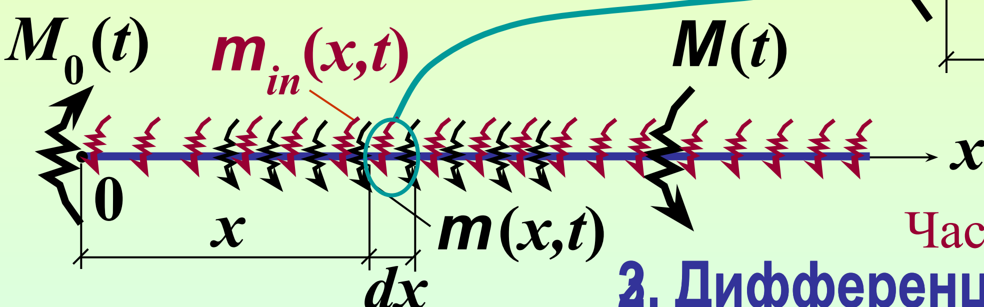
Динамическое кручение прямолинейного стержня с распределённой массой



$$\tilde{m}(x) = \rho(x)\cdot A(x)$$

интенсивность инерционных моментов





Частные случаи:

2. Дифференциальное уравнение собственных крутильных колебаний

1. Дифференциальное уравнение вынужденных крутильных колебаний прямолинейного стержня постоянного сечения с равномерно распределённой массой, без учёта демпфирования (сопротивления)

Решение уравнения:

При $m(x) = \text{const}^* = m$

$$\phi(x,t) = \phi(x,t) + \phi^*(x,t)$$

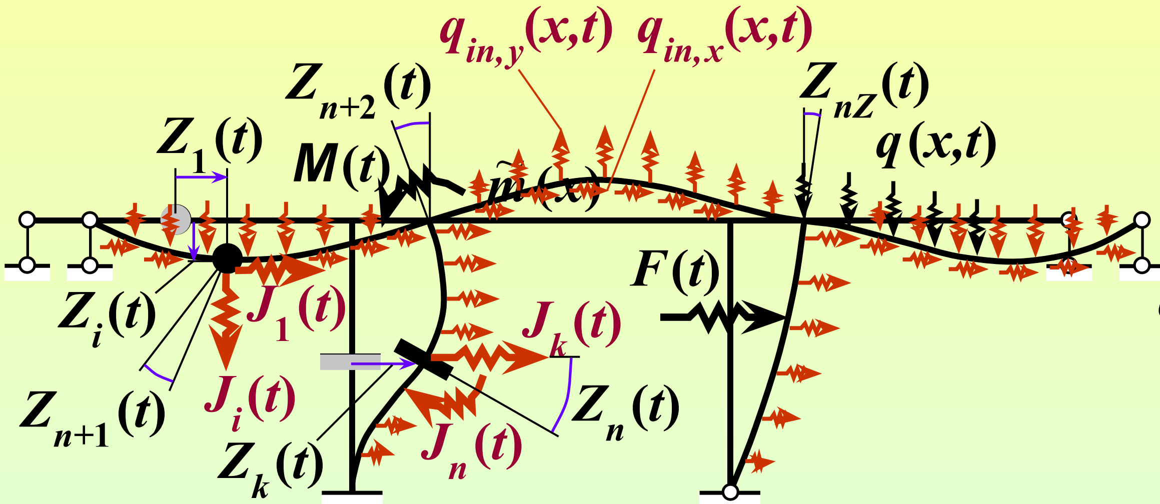
$$\varphi(x) = \varphi_0 \cos kx + \frac{M_0}{kGI_t}\sin kx - \sum\frac{M}{kGI_t}\sin k(x - a_M) -$$

$$-\sum\frac{m}{k^2GI_t}\left[1-\cos k(x-a_m)\right]$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + k^2\varphi(x) = \frac{m(x)}{GI_t}, \quad k = \sqrt{\frac{\rho I_p \omega_F^2}{GI_t}}$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + k^2\varphi(x) = 0$$

Понятие о динамических расчётах стержневых систем с распределёнными массами методом перемещений при гармонических колебаниях



$$\left.\begin{array}{c} F(t) = F \\ q(x,t) = q(x) \\ M(t) = M \\ J_1(t) = J_1 \\ \vdots \\ J_n(t) = J_n \\ q_{in,x}(x,t) = q_{in,x}(x) \\ q_{in,y}(x,t) = q_{in,y}(x) \\ Z_1(t) = Z_1 \\ \vdots \\ Z_n(t) = Z_n \end{array}\right\} {}^{*}\sin \omega_F t$$

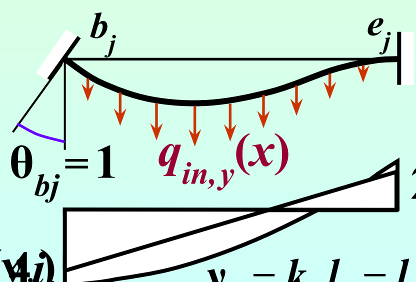
Канонические уравнения МП в амплитудах перемещений

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{i-1} r_{ik} Z_k + \left(r_{ii} - \overline{m}_i \omega_F^2\right) Z_i + \sum\limits_{k=i+1}^{n_Z} r_{ik} Z_k + R_{i\Sigma} = 0, \quad i = \overline{1,n} \\ \sum\limits_{k=1}^{n_Z} r_{ik} Z_k + R_{i\Sigma} = 0, \quad i = \overline{n+1, n_Z} \end{array}\right\} \quad \boxed{r_0^* \cdot Z + R_{0,\Sigma} = 0}$$

$$r_0^* = r_0 - \omega_F^2 \cdot \mathrm{diag}\big[\,\overline{m}_1 \; \overbrace{0\;0\;\cdots\;0}^{n_Z - n}\,\big];$$

$$r_0 = a^{\mathrm{T}} K a\,; \quad R_{0,\Sigma} = a^{\mathrm{T}} S_\Sigma - c^{\mathrm{T}} F_u$$

Типовые задачи
для элементов ОСМП – с учётом сил инерции распределённых масс:



$$i_j = EI_j / l_j$$

$$\nu_j = k_j l_j = l_j \sqrt{\widetilde{m}_j \omega_F^2 / EI_j}$$

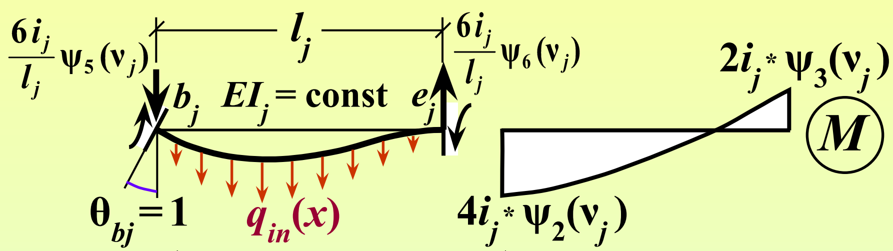
$$\psi_3(\nu_j) = \frac{\nu_j}{2} \cdot \frac{\mathrm{sh}\,\nu_j - \sin \nu_j}{1 - \mathrm{ch}\,\nu_j \cdot \cos \nu_j}$$

Усилия в типовых изгибаемых элементах плоских стержневых ОСМП с распределёнными массами от гармонических смещений концевых сечений с единичной амплитудой

	От углового смещения	От линейного смещения

Элемент 1-го типа

От углового смещения

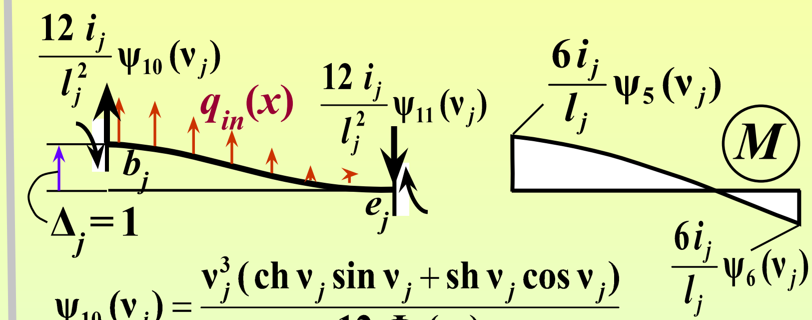


$$\psi_2(\nu_j)=\frac{\nu_j\left(\operatorname{ch}\nu_j\sin\nu_j-\operatorname{sh}\nu_j\cos\nu_j\right)}{4\Phi_1(\nu_j)}\qquad \psi_3(\nu_j)=\frac{\nu_j(\operatorname{sh}\nu_j-\sin\nu_j)}{2\,\Phi_1(\nu_j)}$$

$$\psi_5(\nu_j)=\frac{\nu_j^2\operatorname{sh}\nu_j\sin\nu_j}{6\Phi_1(\nu_j)}\qquad \psi_6(\nu_j)=\frac{\nu_j^2(\operatorname{ch}\nu_j-\cos\nu_j)}{6\Phi_1(\nu_j)}$$

$$\boxed{\Phi_1(\nu_j)=1-\operatorname{ch}\nu_j\cos\nu_j}$$

От линейного смещения

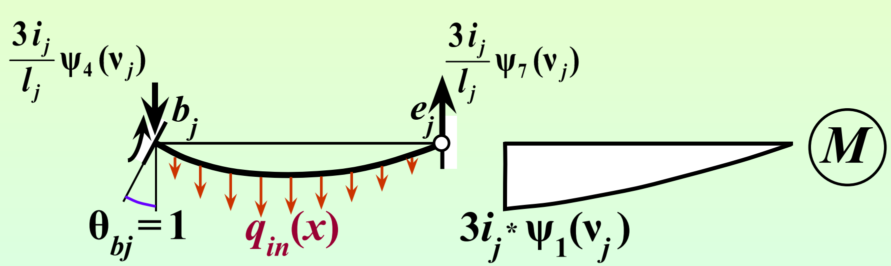


$$\psi_{10}(\nu_j)=\frac{\nu_j^3(\operatorname{ch}\nu_j\sin\nu_j+\operatorname{sh}\nu_j\cos\nu_j)}{12\,\Phi_1(\nu_j)}$$

$$\psi_{11}(\nu_j)=\frac{\nu_j^3(\operatorname{sh}\nu_j+\sin\nu_j)}{12\,\Phi_1(\nu_j)}$$

Элемент 2-го типа

От углового смещения

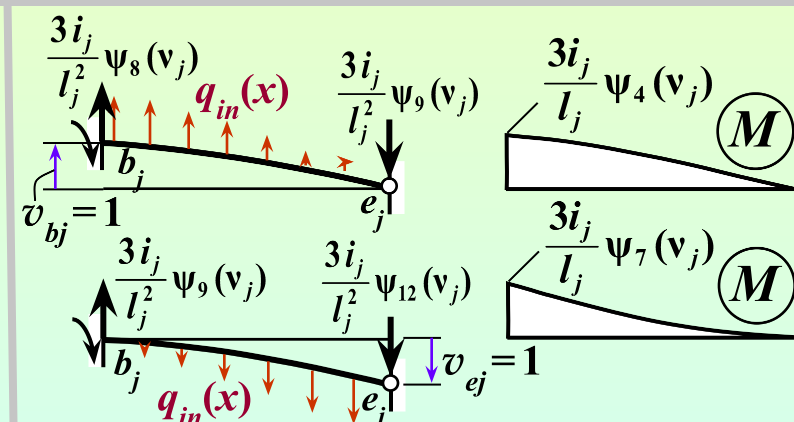


$$\psi_1(\nu_j)=\frac{2\nu_j\operatorname{sh}\nu_j\sin\nu_j}{3\Phi_2(\nu_j)}$$

$$\psi_4(\nu_j)=\frac{\nu_j^2(\operatorname{ch}\nu_j\sin\nu_j+\operatorname{sh}\nu_j\cos\nu_j)}{3\Phi_2(\nu_j)}$$

$$\psi_7(\nu_j)=\frac{\nu_j^2(\operatorname{sh}\nu_j+\sin\nu_j)}{3\Phi_2(\nu_j)}$$

От линейного смещения



$$\psi_8(\nu_j)=\frac{2\nu_j^2(\operatorname{ch}\nu_j\cos\nu_j)}{3\Phi_2(\nu_j)}\qquad \psi_9(\nu_j)=\frac{\nu_j^2(\operatorname{ch}\nu_j+\cos\nu_j)}{3\Phi_2(\nu_j)}$$

$$\psi_{12}(\nu_j)=\frac{\nu_j^2(1+\operatorname{ch}\nu_j\cos\nu_j)}{3\Phi_2(\nu_j)}$$

$$\boxed{\Phi_2(\nu_j)=3(\operatorname{ch}\nu_j\sin\nu_j-\operatorname{sh}\nu_j\cos\nu_j)}$$

$$\boxed{i_j=EI_j/l_j\qquad \nu_j=k_j\,l_j=l_j\sqrt{\widetilde{m}_j\,\omega_F^2/EI_j}}$$