Системы счисления

Система счисления — символический метод записи чисел, представление чисел с помощью письменных знаков. Системы счисления подразделяются на позиционные, непозиционные и смешанные.

В позиционных системах счисления один и тот же числовой знак (цифра) в записи числа имеет различные значения в зависимости от того места (разряда), где он расположен. **Пример:** 103_{10}, 01011_2, $34A2F_{16}$.

Смешанная система счисления является обобщением позиционной системы счисления. Основанием смешанной системы счисления является возрастающая последовательность чисел и каждое число представляется как линейная комбинация. **Пример:** **представление времени в виде количества суток, часов, минут и секунд. При этом величина d дней h часов m минут s секунд соответствует значению секунд**

d*24*60*60+h*60*60+s*60.

В непозиционных системах счисления величина, которую обозначает цифра, не зависит от положения в числе. При этом система может накладывать ограничения на положение цифр, например, чтобы они были расположены в порядке убывания.
Пример: **фактически непозиционной системы счисления является римская (латинская), в которой в качестве цифр используются латинские буквы (I, V, L …)**

II = 1+1=2, независимо от позиции цифры I.

На самом деле, римская система не является полностью непозиционной, так как меньшая цифра, идущая перед большей, вычитается из неё, например: IV=4, в то время как: VI = 6.

Системы счисления

Позиционные системы счисления

Каждая позиционная система счисления определяется некоторым числом $b > 1$ (т. н. основание системы счисления) таким, что b единиц в каждом разряде объединяется в одну единицу следующего по старшинству разряда. Система счисления с основанием b также называется b-ричной.

Число x в b-ричной системе счисления представляется в виде линейной комбинации степеней числа b:

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b^k$$

где a_k — это целые числа, называемые цифрами, удовлетворяющие неравенству $0 \le a_k < b$,

k - порядковый номер разряда начиная с нулевого, n – количество разрядов.

Каждая степень b_k в такой записи называется разрядом, старшинство разрядов и соответствующих им цифр определяется значением показателя k.

Число x записывают в виде последовательности его b-ричных цифр, перечисляемых по убыванию старшинства разрядов слева направо:

$$X = a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0$$

Например, число *сто три* представляется в десятичной системе счисления в виде: $103 = 1*10^2+0*10^1+3*10^0$, а дробь $0{,}25 = 2*10^{-1}+5*10^{-2}$

Системы счисления

Смешанные системы счисления

Основанием смешанной системы счисления является возрастающая последовательность чисел $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ и каждое число *x* представляется как линейная комбинация:

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$$

где на коэффициенты a_k (называемые как и прежде *цифрами*) накладываются некоторые ограничения.

Записью числа *x* в смешанной системе счисления называется перечисление его цифр в порядке уменьшения индекса *k*, начиная с первого ненулевого.

Если $b_k=b^k$ для некоторого *b*, то смешанная система счисления совпадает с *b*-ричной системой счисления.

Например:

- представление времени в виде количества месяцев, суток, часов, минут и секунд (60 секунд, 60 минут, 24 часа, 28-29-30-31 сутки, 12 месяцев)

- денежные знаки - это пример смешанной системы счисления. (1 коп., 5 коп., 10 коп., 50 коп., 1 руб., 2 руб., 5 руб., 10 руб., 50 руб., 100 руб., 500 руб., 1000 руб. и 5000 руб.)

- **Фибоначчиева система счисления - основывается на числах Фибоначчи.**
- **Факториальная система счисления - основаниями является последовательность факториалов $b_k = k$.**
- **Биномиальная система счисления - представление, использующее биномиальные коэффициенты**
- **Система счисления майя**

Майя использовали 20-ричную систему счисления за одним исключением: во втором разряде было не 20, а 18 ступеней, то есть за числом (17)(19) сразу следовало число (1)(0)(0). Это было сделано для облегчения расчётов календарного цикла, поскольку (1)(0)(0) = 360 примерно равно числу дней в солнечном году.

Системы счисления

Непозиционные системы счисления

- Римская система счисления

Римская система нумерации с помощью букв была распространена в Европе на протяжении двух тысяч лет. (Только в позднем средневековье ее сменила более удобная для вычислений десятичная система цифр, заимствованная у арабов.)

Число	1	5	10	50	100	500	1000
Римская цифра	I	V	X	L	C	D	M

Для закрепления в памяти буквенных обозначений римских цифр в порядке убывания существует мнемоническое правило:

Мы Дарим Сочные Лимоны, Хватит Всем И ещё останется.

Соответственно M, D, C, L, X, V, I

Натуральные числа записываются при помощи повторения этих цифр. При этом, если большая цифра стоит перед меньшей, то они складываются (принцип сложения), если же меньшая - перед большей, то меньшая вычитается из большей (принцип вычитания). Последнее правило применяется только во избежание четырёхкратного повторения одной и той же цифры. Например, I, X, C ставятся соответственно перед X, C, M для обозначения 9, 90, 900 или перед V, L, D для обозначения 4, 40, 400.

Например, VI = 5+1 = 6, IV = 5 - 1 = 4 (вместо IIII). XIX = 10 + 10 - 1 = 19 (вместо XVIIII), XL = 50 - 10 =40 (вместо XXXX), XXXIII = 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 33 и т.д.

- Система остаточных классов (СОК) - представление числа в системе остаточных классов основано на понятии вычета и китайской теореме об остатках.

- Система счисления Штерна-Броко – способ записи положительных рациональных чисел, основанный на дереве Штерна-Броко.

Системы счисления

Операции в системах счисления

Позиционная | **Непозиционная**

Сложение и вычитание

Позиционная: Поразрядно с переходом в старший разряд при сложении или заимствовании из старшего разряда при вычитании).

Непозиционная: Сложение -> Посимвольно, путем "склеивания" символов-цифр и последующей замены (слева направо) 4-х подряд расположенных символов на группы из 2-х символов имеющих то же значение (например, IIII на IV).

Вычитание -> посимвольно, обратной операцией "разбиения" символов на составляющие меньшего номинала.

Умножение

Позиционная: Умножение каждой цифры множимого на каждую цифру множителя и сложение полученных произведений с поразрядным сдвигом результата в соответствии с разрядами множителя.

Непозиционная: Умножение каждой цифры множимого на каждую цифру множителя и сложение полученных произведений, при этом цифры одинакового порядка для удобства ставим одну под другой.

Деление

Позиционная: Из старших разрядов делимого группируется число - субделимое, которое можно разделить на делитель (равное делителю по количеству цифр или на одну цифру больше). К остатку от деления добавляются цифры делимого (ещё не участвовавшие в процессе деления) для формирования нового субделимого, и так пока не будет использован младший разряд делимого.

Непозиционная: Умножая делитель на ряд чисел (например, на сто – C, 50 – L, десять – X, двадцать – XX) и сравнивая произведение с делимым – находим старшие числа частного. Отнимаем их от делимого и снова повторяем операцию до получения конечного результата: нахождения остатка от деления.

Перевод числа из одной системы счисления в другую

Переводе между позиционной и смешенной системами осуществляется поразрядным преобразованием числа. Перевод между непозиционной и другими системами осуществляется путем преобразования в (из) цифр непозиционной системы в позиционную (смешанную).

Системы счисления

Перевод чисел из десятичной позиционной системы счисления в другую и наоборот

При переводе целого числа (целой части числа) из десятичной системы счисления в любую другую: исходное число (или целую часть) надо разделить на основание системы счисления, в которую выполняется перевод. Деление выполнять, пока частное не станет меньше основания новой системы счисления. Результат перевода определяется остатками от деления: первый остаток дает младшую цифру результирующего числа, последнее частное от деления дает старшую цифру.

При переводе правильной дроби из десятичной системы счисления в любую другую систему счисления дробь следует умножать на основание системы счисления, в которую выполняется перевод. Полученная после первого умножения целая часть является старшим разрядом результирующего числа. Умножение вести до тех пор пока произведение станет равным нулю или не будет получено требуемое число знаков после разделительной точки.

При переводе вещественных чисел целая и дробная части числа переводятся отдельно.

Перевод числа из двоичной системы в системы с основанием, равным степеням двойки (8 и 16). Для того чтобы целое двоичное число записать в системе счисления с основанием 2^n, нужно данное двоичное число разбить справа налево на группы по n-цифр в каждой; если в последней левой группе окажется меньше n разрядов, то дополнить ее нулями до нужного числа разрядов; рассмотреть каждую группу, как n-разрядное двоичное число, и заменить ее соответствующей цифрой в системе счисления с основанием 2^n.

Перевод числа с основанием, равным степеням двойки (8 и 16) в двоичную осуществляется заменой каждой цифры числа с основанием 2^n на эквивалентную ей группу из n двоичных цифр (3 – для восьмеричной системы и 4 для шестнадцатеричной).

Операция перевода в десятичную систему выглядит гораздо проще, так как любое десятичное число можно представить в виде $x = a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot p^1 + a_n \cdot p^0$, где
$a_0 ... a_n$ – это цифры данного числа в системе счисления с основанием p.

Например, перевести число 4A3F в десятичную систему.

По определению, $4A3F = 4 \cdot 16^3 + A \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + F \cdot 16^0$.

При замене A на 10, а F на 15, получается $4 \cdot 16^3 + 10 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + 15 \cdot 1 = 19007$.

Системы счисления

Программы на Pascal и\C++ для перевода чисел из десятичной позиционной системы счисления в позиционную систему счисления с другим основанием и наоборот в презентации

Алгохитрости-4_Системы счисления