# Математические схемы

# *Имитационное моделирование*

**как инструмент исследования сложных систем**

# Имитационное моделирование

- метод решения сложных задач **анализа, оптимизации и проектирования**

  ***систем управления***

  *производством,*

  *технологическими процессами,*

  *автоматизированных систем научных исследований*

## ***Имитационное моделирование*** *включает*

- методологию построения системных моделей;
- методы алгоритмизации объектов;
- методы и средства построения программных реализаций имитаторов;
- методы планирования, организации и выполнения на ЭВМ экспериментов с имитационными моделями;
- методы машинной обработки результатов и их анализа.

# Задачи исследования сложных систем

## Задача анализа

- Сложная система предполагается полностью заданной, т.е. перечисляются
  - ее ***элементы***,
  - их ***характеристики***,
  - указана ***структура***,
  - заданы ***воздействия внешней среды***.
- Требуется **рассчитать показатели системы**.
- Как правило, эта задача решается путем имитационного моделирования.

# Задачи исследования сложных систем

## Задача синтеза

- Задаются требуемые **значения основных характеристик** системы и возможные **воздействия внешней среды.**
- Требуется выбрать ***элементы*** и ***структуру*** системы так, чтобы обеспечить требуемые значения характеристик системы.
- Используется опыт предшествующих разработок, привлекаются специалисты различных областей.
- Обычно решение заключается в переборе вариантов построения системы. Для их сравнения и выбора проводится анализ вариантов.

# Имитационное моделирование

- Формулировка **цели** моделирования;
- системное обследование объекта (сбор исходных данных);
- построение модели объекта на естественном языке с развернутой формулировкой гипотезы, которую надо проверить;
- формализованное системное описание объекта (построение математической модели, построение имитационной модели);
- планирование эксперимента, который должен дать необходимую информацию;
- экспериментирование с моделью на ЭВМ, предсказание поведения объекта моделирования для различных условий;
- выбор наиболее пригодного для данных условий варианта модели, его оптимизация и обоснование выбора;
- интерпретация модели, формулировка рекомендаций.

# Формализация

- содержательное описание,
- формализованная схема и
- математическая модель

# Содержательное описание

- в словесной форме включает в себя сведения об элементах системы, иерархической структуре системы, характере взаимодействия элементов системы и системы с окружающей средой, описание физической природы и количественных характеристик основных процессов, происходящих в системе.
- Главной частью *содержательного описания* является <u>постановка задачи, определение цели моделирования</u>:

  - указывается предварительный ***перечень исходных величин и зависимостей,***

  - формулируются ***требования к их точности***.

  - в качестве дополнительного материала включаются ***численные значения известных параметров и*** характеристик системы в виде таблиц и графиков.

# Формализованная схема

- является промежуточным звеном между содержательным описанием и математической моделью
- дает формальное описание системы: вводится знаковая система (*система символов*), с помощью которой обозначаются структурные элементы моделируемой системы.
- Устанавливаются математические средства описания воздействий внешней среды. Дается точная математическая постановка задачи исследования с указанием перечня искомых величин и зависимостей.

Абстрактность формализованной схемы существенно выше, чем содержательного описания.

# Математическая модель

- Все объекты, элементы системы представляются в знаковой форме.
- Соотношения между элементами преобразуются с помощью математических действий в аналитическую форму (строится полностью ***количественное описание***).
- Разнообразные связи между величинами записывают в виде уравнений: алгебраических, дифференциальных, интегро-дифференциальных и т.п., логические условия выражают в виде неравенств.
- По возможности переводятся в аналитическую форму исходные таблицы и графики.

- Математическая модель системы состоит из математических моделей ее элементов и модели взаимодействия элементов в системе.

# Основные подходы к описанию функционирования сложных систем

**Тип математического описания системы, при котором нет информации о внутреннем механизме преобразования, - это связь «вход-выход».**

- связь «**вход-выход**» $f: X \to Y$,

$X$ – множество возможных входов

$Y$ – множество возможных выходов

текущие значения показателей

$$y(t): \qquad y(t)=f(x(t))$$

# Классы моделей

| Описание / Время | Детерминированное | Вероятностное |
|---|---|---|
| Дискретное | Конечный автомат | Вероятностный автомат |
| Непрерывное | Динамическая система | Вероятностные процессы<br>СМО |

# ТИПОВЫЕ СХЕМЫ

- Дискретно-детерминированные
- Непрерывно-детерминированные
- Дискретно-стохастические
- Непрерывно-стохастические

# Дискретно-детерминированные схемы

Конечный автомат *A* $A=(X,Y,Q,\varphi,\psi)$

***X* - входной алфавит**

***Y* – выходной алфавит**

***Q* – конечное множество внутренних состояний**

**Закон функционирования автомата**

***φ*** ***определяет очередное внутреннее состояние А*** $q(t+1)=\varphi(x(t), q(t))$,

***ψ*** ***определяет очередное значение выхода А*** $Y(t+1)= \psi(x(t), q(t))$,

$t=0,1,2,\ldots$

# Функции задают

- при помощи ***таблиц*** или
- ***диаграммы переходов*** - ориентированного графа, вершины которого соответствуют состояниям, а стрелки указывают, в какое новое состояние переходит автомат под действием входного символа и каков будет выход.

# Непрерывно-детерминированные модели

**динамические процессы**

$$dq(t)/dt=f(q(t),x(t),t),\quad q(0)=0,$$
$$y(t)=h(q(t),x(t),t)$$

***q(t)* – *n*-мерный вектор состояний системы в момент времени *t*,**

***x(t)* – *m*-мерный вектор входов системы, включая управляющие,**

***y(t)* – *p*-мерный вектор наблюдаемых выходов системы**

# Дискретно-стохастические схемы

- вероятностные автоматы

$P(q(t+1)=q_j/q(t)=q_i,\ x(t)=x_k)=p_{ji}(k)$,

аналогично для выходов $y(t+1)$

# Вероятностный автомат без входа и выхода - **цепь Маркова**

- Цепь Маркова является частным случаем марковского случайного процесса с дискретными состояниями и дискретным временем
- Случайный процесс, протекающий в какой-либо физической системе, называется **марковским**, или процессом без последствия, если он обладает следующим свойством: для любого момента времени $t_0$ вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние).

# Цепь Маркова

- задается множеством состояний $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и
  вероятностями перехода из $q_i$ в $q_j$
  $P_{ij}=P(q(t+1)=qj/q(t)=qi)$

# Непрерывно-стохастические схемы

***Q*-схемы**

- ***W*** **– интервалы времени между заявками**

  ***V*** **– времена обслуживания**

- $Z_i=\{Z_{Hi},Z_{Ki}\}$ **– состояния системы**

# Собственные параметры *Q*-схемы

- количество фаз $L_ф$,
- количество каналов в каждой фазе $L_j$ ($j=1,L_ф$),
- количество накопителей каждой фазы $L_{нк}$ 0 ($к=1,L_ф$),
- емкость *i*-го накопителя $L_i$.

# Алгоритмы функционирования

- определяются набором правил поведения заявок в системе в различных ситуациях.
- Неоднородность заявок учитывается с помощью введения классов приоритетов

# Набор правил

- для ***H*** – правила переполнения либо ухода;
- для ***K*** **-** правила выбора маршрутов или направлений уходов.
- для заявок необходимо задать правила, по которым они остаются в канале или не допускаются до обслуживания, т.е. правила блокировки канала (блокировки по выходу и входу).

Такие блокировки отражают наличие *управляющих связей* в ***Q***-схеме, регулирующих поток заявок в зависимости от состояния системы.

- **методы и средства построения программных реализаций имитаторов**

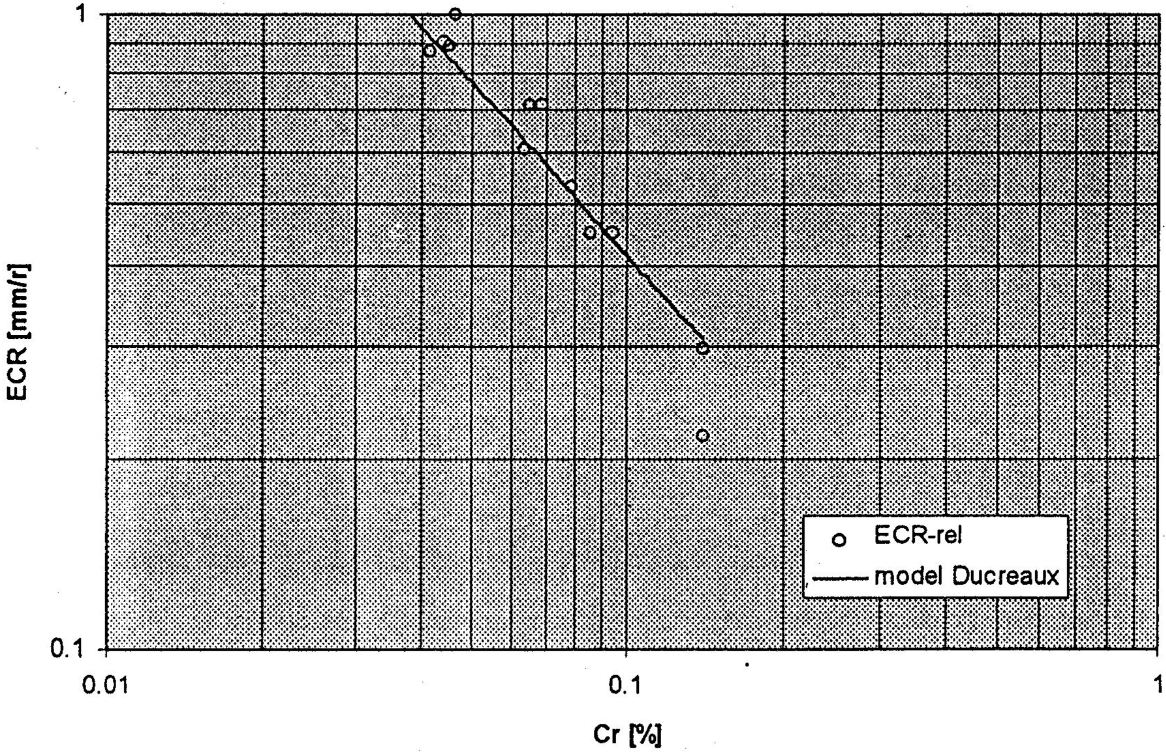
# Список языков программирования

- 1.1 Неклассифицированные языки
- 1.2 Структурные языки программирования
- 1.3 Процедурные языки программирования
- 1.4 Логические языки программирования
- 1.5 Объектно-ориентированные языки программирования
- 1.6 Функциональные языки программирования
- 1.7 Языки программирования для промышленной автоматизации
- 1.8 Эзотерические языки программирования
- 1.9 Стековые языки
- 1.10 Параллельные языки программирования

- **методы планирования, организации и выполнения на ЭВМ экспериментов с имитационными моделями**

# Проверка адекватности модели и объекта

- **верификация** (*модель ведет себя так, как было задумано);*
- **оценка адекватности** - проверка соответствия между поведением реальной системы и поведением модели;
- **проблемный анализ -** формулирование статистически значимых выводов на основе данных, полученных путем машинного моделирования.




| Тип проверки результатов расчетов | Воздействующие факторы | | Выбранные режимы (тесты) | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 |
| Диапазон изменения параметров. | температура, °С | | 170 | | |
| | скорость потока, м/с | | 4 | | |
| | амин | | аммиак | | |
| | диаметр, мм | | 530 | | |
| | ВХР среды | $CO_2$, мкг/кг | 7 | | |
| | | pH | 9 | | |
| | химсостав материала трубопровода | Cr, % | 0,037 – 0,5 | 0,037 | 0,037 |
| | | Mo, % | 0,037 | 0,037 – 0,5 | 0,037 |
| | | Cu, % | 0,037 | 0,037 | 0,037 – 0,5 |
| Полученная в тесте максимальная погрешность с учетом погрешности уравнения Дюрекса, % | | | 47 | 35 | 30 |

# Методы машинной обработки результатов и их анализ

# Обеспечение точности и достоверности результатов моделирования

- точность и достоверность результатов моделирования при  заданном числе реализаций;
- число реализаций при заданных точности и достоверности результатов моделирования системы

- $\varepsilon = \left|\tilde{\mathrm{E}} - \mathrm{E}\right|$ ***- абсолютная точность*** оценки
- Вероятность $\left\{\left|\tilde{\mathrm{E}} - \mathrm{E}\right| < \varepsilon\right\} = Q$

***- достоверность*** оценки

- $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{\mathrm{E}}$ ***- относительная точность*** оценки

## Цель моделирования - вычисление вероятности некоторого случайного события А

- Введем случайную величину $\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$
- 

**M**$\boldsymbol{\xi}$$= 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = \boldsymbol{p}$,

**D**$\boldsymbol{\xi}$$= 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) - (M\xi)^2 = p - p^2 = \boldsymbol{p(1-p)}$.

$$\frac{m}{N} \approx p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{N}\sum \xi_i;$$

$$Mp = \frac{1}{N} M\left[\sum_{i=1}^{N} \xi_i\right] = \frac{1}{N} \cdot NM\xi_i = \frac{Np}{N} = p.$$

$$Dp = D\left[\frac{m}{N}\right] = \frac{D(m)}{N^2} = \frac{1}{N^2} D\sum_{i=1}^{N} \xi_i = \frac{N \cdot p(1-p)}{N^2} = \frac{p(1-p)}{N}.$$

$$\frac{m}{N} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{N}\right).$$

$$P\left\{\left|\frac{m}{N} - p\right| < U_{\alpha}\sqrt{D\left(\frac{m}{N}\right)}\right\} \approx \alpha$$

$$\varepsilon = U_{\alpha} \cdot \sqrt{D\left(\frac{m}{N}\right)} = U_{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}.$$

$$N = \frac{U_{\alpha}^{2}}{\varepsilon^{2}} \cdot p(1-p)$$

# Оценка среднего значения случайной величины ξ

- Пусть сл. в. **ξ** имеет *среднее значение* ***a*** и *дисперсию* **σ²**.

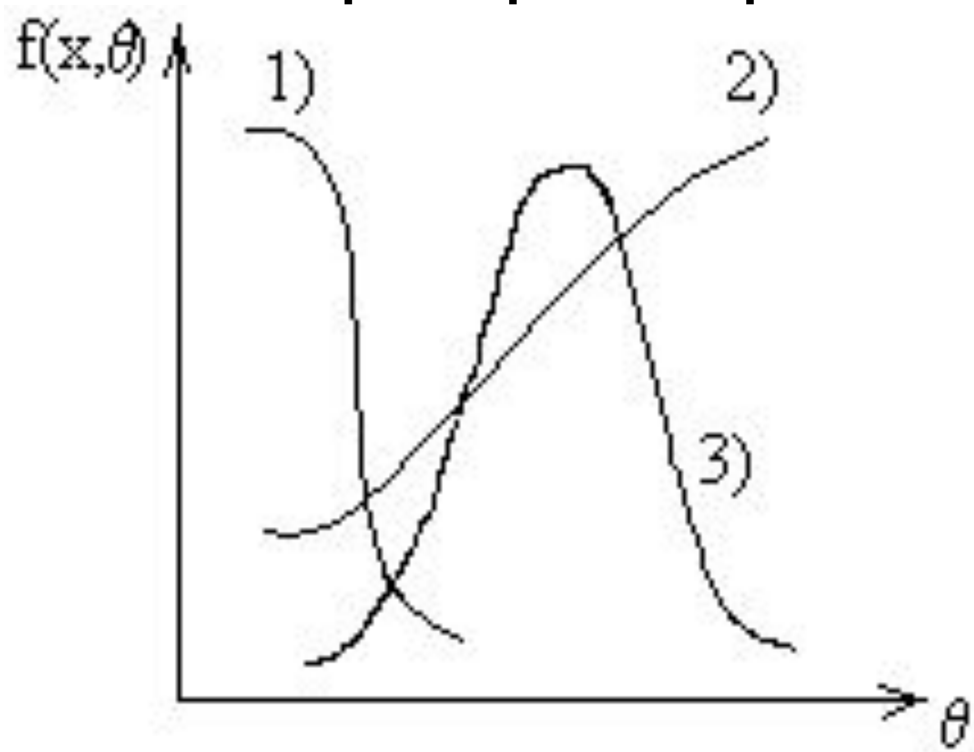
$$\hat{M}\xi = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i .$$

$$\hat{M}\xi \sim N\left(a, \frac{\sigma^2}{N}\right). \Rightarrow \quad \varepsilon = \left|\hat{M}\xi - a\right| = U_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$N = \frac{U_\alpha^2}{\varepsilon^2} \cdot \sigma^2 .$$

# Оценка чувствительности модели

- ***q*** – показатели эффективности,
- ***x*** - вектор входных воздействий,
- ***θ*** - вектор параметров




$$\vec{q} = f(\vec{x}, \vec{\theta}),$$

## Чувствительность модели определяется приращениями функции

## в области малых изменений параметра

- Рассмотрим область некоторой точки

$$\vec{\theta}_0 = \left\{\vec{\theta}_{m0}\right\}, m = \overline{1, M}$$

$$q_l\left(\vec{\theta}\right) = q_l\left(\vec{\theta}_0\right) + \sum_{m=1}^{M} \frac{\partial \theta_l\left(\vec{\theta}\right)}{\partial \theta_m} \cdot \Delta\theta_m .$$

- Большие отклонения  функции при малых вариациях параметров свидетельствуют о неустойчивости модели по отношению к этим параметрам.
- В этом случае увеличивается требование к точности оценки таких параметров.

$$\ln \tau_{КР} = \ln L - 17.79 - 0.5 \ln C_{O_2} - 1.5 \ln C_{Cl^-} + \frac{U_0 - \left( \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - \alpha G \bar{b} \rho^{\frac{3}{8}} \right) N_{ФШ} \gamma}{RT}$$