Системы массового обслуживания (СМО)

- телефонные станции,
- ремонтные мастерские,
- билетные кассы,
- справочные бюро,
- производственные процессы,
- вычислительные процессы,
- технологические процессы,
- магазины, поликлиника, транспорт и т.п.

Признаки СМО

- случайный входящий поток требований, нуждающихся в обслуживании,
- **дисциплина очереди**,
- **механизм** (алгоритм), осуществляющий это обслуживание

Схема СМО

- Процесс работы СМО представляет собой **случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем**

- Состояние СМО меняется скачком в моменты появления каких-то событий

  (*или прихода новой заявки,*
  или окончания обслуживания,
  или момента, когда заявка, которой надоело ждать, покидает очередь)

Предмет ТМО

построение математических моделей, связывающих <u>заданные условия работы</u> СМО (*число каналов, их производительность, правила работы, характер потока заявок*) с <u>показателями эффективности</u> СМО, описывающими ее способность справляться с потоком заявок

Показатели эффективности СМО

- среднее число заявок, обслуживаемых СМО
 в единицу времени;
- среднее число занятых каналов;
- среднее число заявок в очереди и
- среднее время ожидания обслуживания;
- вероятность того, что число заявок
 в очереди превысит какое-то значение,
 и т. д.

Задачи ТМО

расчет показателей эффективности

оптимизация функционирования СМО

Терминология ТМО
(*по Кендаллу*)

Для обозначения модели используют 3-5 символов: ⺷ | ⺷ | ⺷

первый **характеризует** **входной поток требований,**

второй **– распределение длительностей обслуживания,**

третий **– число приборов в обслуживающей системе**

четвертый **– допустимую длину очереди,**

пятый **– дисциплину обслуживания требований.**

Распределение вероятностей

M **- экспоненциальное распределение;**

D **- детерминированное, или регулярное распределение;**

En **- *n*-фазное распределение Эрланга;**

G1 **– рекуррентный характер входного потока (длительности интервалов статистически независимы и имеют одинаковое распределение) без каких-либо специальных предположений относительно функций распределения;**

G **- общий вид распределения длительностей интервалов**

Пример

***M*| *D*| 2**

- **экспоненциальное распределение времени между заявками (*M*),**
- **регулярный характер обслуживания (*D*) и**
- **два обслуживающих прибора (2)**

Классификация СМО

по условию ожидания

СМО с отказами *и* ***СМО с очередью***

СМО с потерями (отказами);
СМО с ожиданием;
СМО с ограниченной длиной очереди;

СМО с ограниченным временем ожидания.

по числу фаз обслуживания –

однофазные и ***многофазные***

по числу каналов –

одноканальные и ***многоканальные***

по месту нахождения источника заявок -

«***открытые***» или «***замкнутые***»

Дисциплина обслуживания

- в порядке поступления – ***FIFO***, или *First In – First Out*
- в случайном порядке – ***Random***
- обслуживание с приоритетом – ***LIFO***, или *Last In – First Out*

Приоритет

- ***абсолютный***
- ***относительный***

Потоки событий

<u>Последовательность однородных событий</u>, следующих одно за другим в какие-то, *вообще говоря*, случайные моменты времени

Например,

поток вызовов на станции скорой помощи,

поток грузовых составов, поступающих на ж/д станцию,

поток неисправностей (сбоев) вычислительной машины,

поток отказов оборудования АЭС и т.д.

Свойства потоков

Поток событий называется *регулярным*, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени.

Однако чаще приходится встречаться с потоками событий, для которых

и моменты наступления событий,

и промежутки времени между ними *случайны*

Стационарность

Поток событий называется ***стационарным***, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной τ зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси $(0,t)$ расположен этот участок.

λ - ***интенсивность потока событий*** –

- среднее число событий в единицу времени

$$\lambda = \text{const}$$

Беспоследействие

Поток событий *называется*
потоком без последействия,
если *для любых* непересекающихся участков времени
<u>число событий</u>, попадающих на один из них,
<u>не зависит от того</u>,
<u>сколько событий попало на другие</u>

Ординарность

Поток событий ***называется*** **ординарным,**

если **вероятность попадания** **на**

элементарный участок Δt

двух или более событий

пренебрежимо мала **по сравнению с**

вероятностью попадания одного события

Простейший поток

Поток событий, обладающий всеми тремя свойствами, -

стационарный,

без последействия,

ординарный –

***называется* простейшим, или**

стационарным пуассоновским

Пуассоновский поток

Вероятность попадания на участок длиной τ ровно *m* событий

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \qquad (m=0,1,\ldots)$$

- **где *a* - среднее число событий, приходящееся на участок τ**

Распределение времени между событиями в простейшем потоке

Промежуток времени *T*
между соседними событиями
в простейшем потоке
распределен
по экспоненциальному закону
с параметром λ

Ординарность

$P_0(\Delta t)$ - вероятность того, что на участке Δt не будет ни одного события,

$P_1(\Delta t)$ - вероятность того, что на нем появится одно событие

$$P_1(\Delta t) \approx \lambda \Delta t$$

Уравнения Колмогорова

Состояния системы с дискретными состояниями и непрерывным временем изменяются

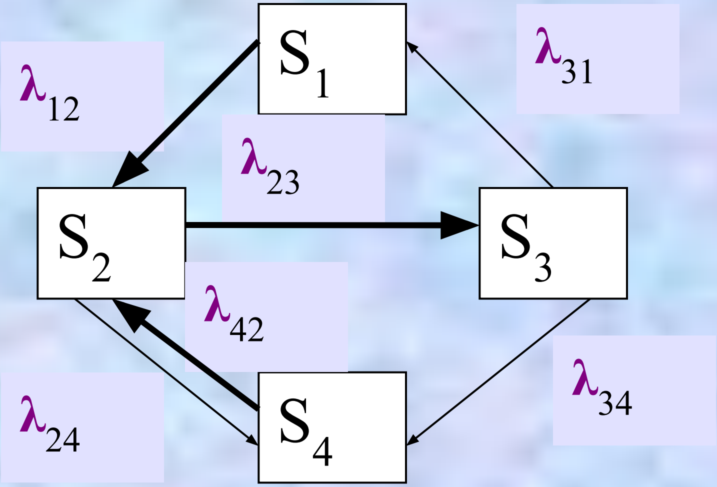
в моменты *прихода требований*,

в моменты *обслуживания требований* или

в моменты, когда *требование покидает систему необслуженным*

Тогда процесс, происходящий в системе, может быть описан непрерывной марковской цепью

Уравнения Колмогорова



Вероятности состояний $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$, $p_4(t)$.

$p_i(t)$ - вероятность того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i.

Уравнения Колмогорова

Придадим *t* малое приращение *Δt* и найдем вероятность того, что в момент (*t+Δt*) система будет находиться в состоянии S_1.

Как это событие может произойти?

1) в момент *t* система уже была в состоянии S_1, а за время *Δt* не вышла из этого состояния,

2) в момент *t* система была в состоянии S_3, а за время *Δt* перешла из него в S_1.

Уравнения Колмогорова

В *левой части* каждого уравнения стоит <u>производная вероятности состояния</u>,

а *правая* часть содержит столько членов, сколько стрелок связано с этим состоянием.

Если стрелка направлена *<u>из</u> состояния*, то *соответствующий член* имеет знак <u>минус</u>, если *<u>в</u> состояние*, то знак <u>плюс</u>.

Каждый член равен <u>произведению</u> плотности вероятности перехода, *соответствующей данной стрелке*, на вероятность того состояния,

<u>из</u> которого исходит стрелка