Принятие решений при неопределенности целей

1 Постановка многокритериальной задачи

2 Множество Парето. Поле полезности решений. Конус предпочтения

Пример «Строительство аэропорта»

Критерии

- Стоимость строительства
- Расстояние от города
- Минимальное шумовое воздействие

Пример (альтернативы)

- А: $ 100 млн; 20 мин; 50 тыс. чел;
- Б: $ 130 млн; 30 мин; 20 тыс чел;
- С: $ 200 млн; 60 мин; 5 тыс чел;

МКЗ

$(\mathbf{\Omega}, \{\mathbf{f_i}\}_n, \{\succ, \sim\})$,

где $\{f_i\}_n$ - n целевых функций f_i, каждая из которых сформулирована в виде $f_i(x) \to \max\limits_{x}$

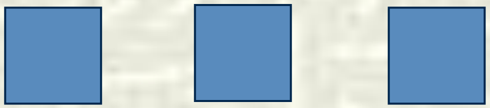
$\succ$ - отношение предпочтения

$\sim$ - отношение эквивалентности

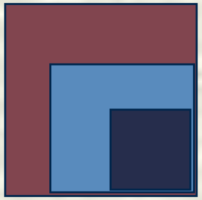
МКЗ

Цели могут находиться друг с другом в различных отношениях:

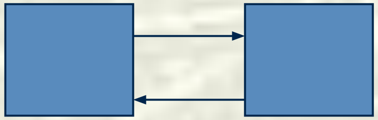
1. Цели взаимно нейтральны



2. Цели кооперируются



3. Цели конкурируют



Цели нейтральны

$x Є \Omega$

- $$f_1(x) \to \max_{x \subset \Omega}$$

$x Є \Omega 1$

$$f_2(x) \to \max_{x \subset \Omega_1}$$

$x Є \Omega n\text{-}1$

$$\ldots f_n(x) \to \max_{x \subset \Omega_{n-1}}$$

Алгоритм решения МКЗ

- уменьшить исходное множество альтернатив, убрав заведомо худшие
- свести задачу к однокритериальной путем введения интегрального критерия

МКЗ

$x1 \Rightarrow (f1(x1), f2(x1), \ldots, fn(x1))$

$x2 \Rightarrow (f1(x2), f2(x2), \ldots, fn(x2))$

?

Принцип Парето

- Пусть x_1 и x_2 – альтернативы.

Если для $\forall i \quad f_i(x_1) \geq f_i(x_2)$,

причем хотя бы одно неравенство строгое,

то $\mathbf{x_1 \square x_2}$,

и альтернативу x_2 можно исключить из рассмотрения

Множество Парето

- Оставшиеся альтернативы образуют ***множество Парето -***

множество ***неулучшаемых*** альтернатив,

или

множество ***несравнимых*** альтернатив,

Множество Парето

или таких,

улучшение которых по одним критериям приводит к их ***ухудшению*** по другим

Возможные решения следует искать лишь среди <u>**неулучшаемых**</u> **альтернатив**

Критериальное пространство

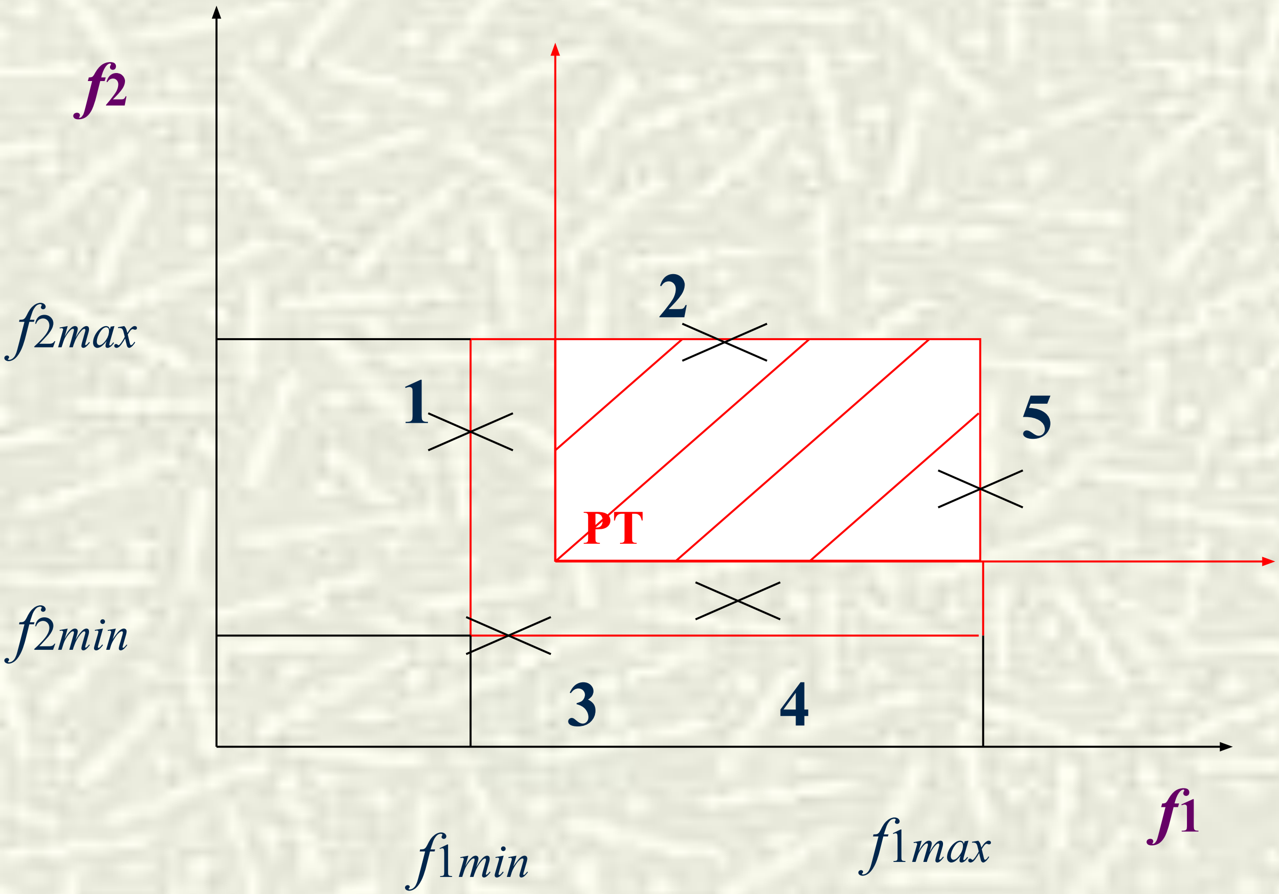
В критериальном пространстве альтернативы

заданы ***точками***,

проекции которых на оси являются оценками альтернатив по соответствующим критериям.

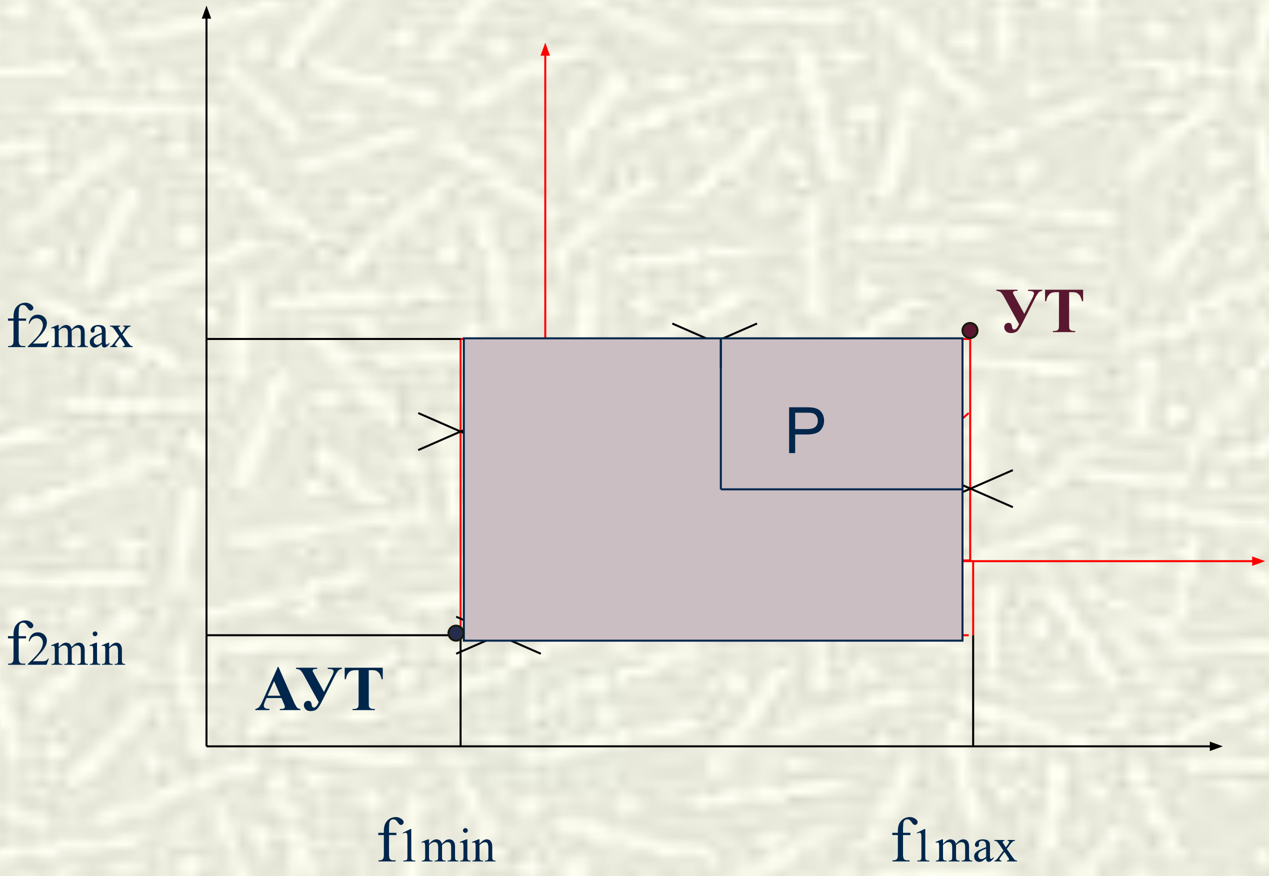
Конус предпочтения

N-E



Поле полезности

N-E



Способы задания альтернатив

- **координатный**
  (альтернативы заданы своими координатами в критериальном пространстве)
- **графический**
  (альтернативы образуют непрерывное множество и изображены точками на графике в координатном пространстве)
- **аналитический**
  (оценки альтернатив по каждому критерию являются непрерывными функциями, например, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x3-4x+2$)

Множество Парето

- $X1(2;7)$
- $X2(4;4)$
- $X3(3;6)$
- $X4(7;1)$
- $X5(5;3)$
- $X6(6;0)$
- $X7(4;3)$

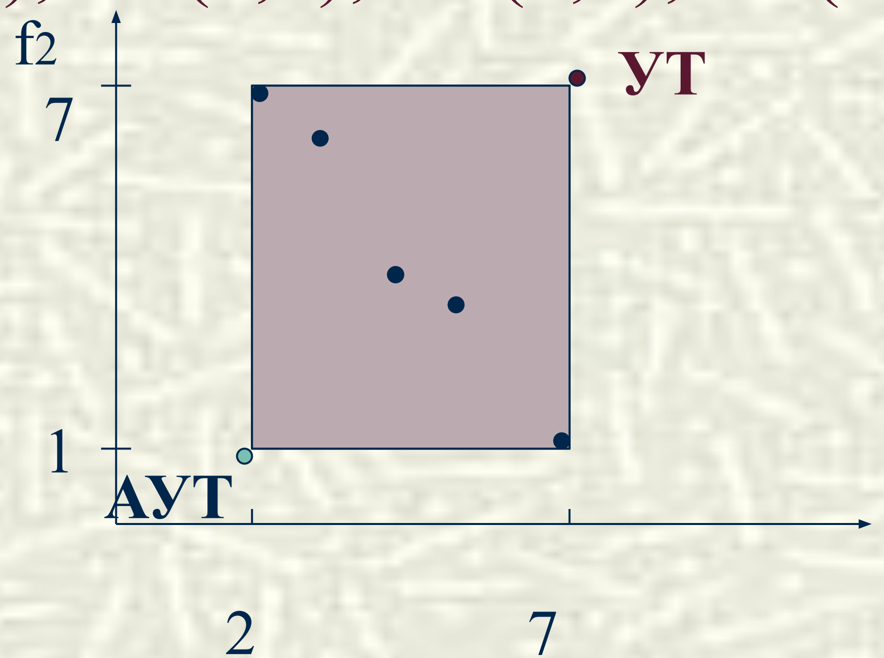
$\Rightarrow$

Множество Парето

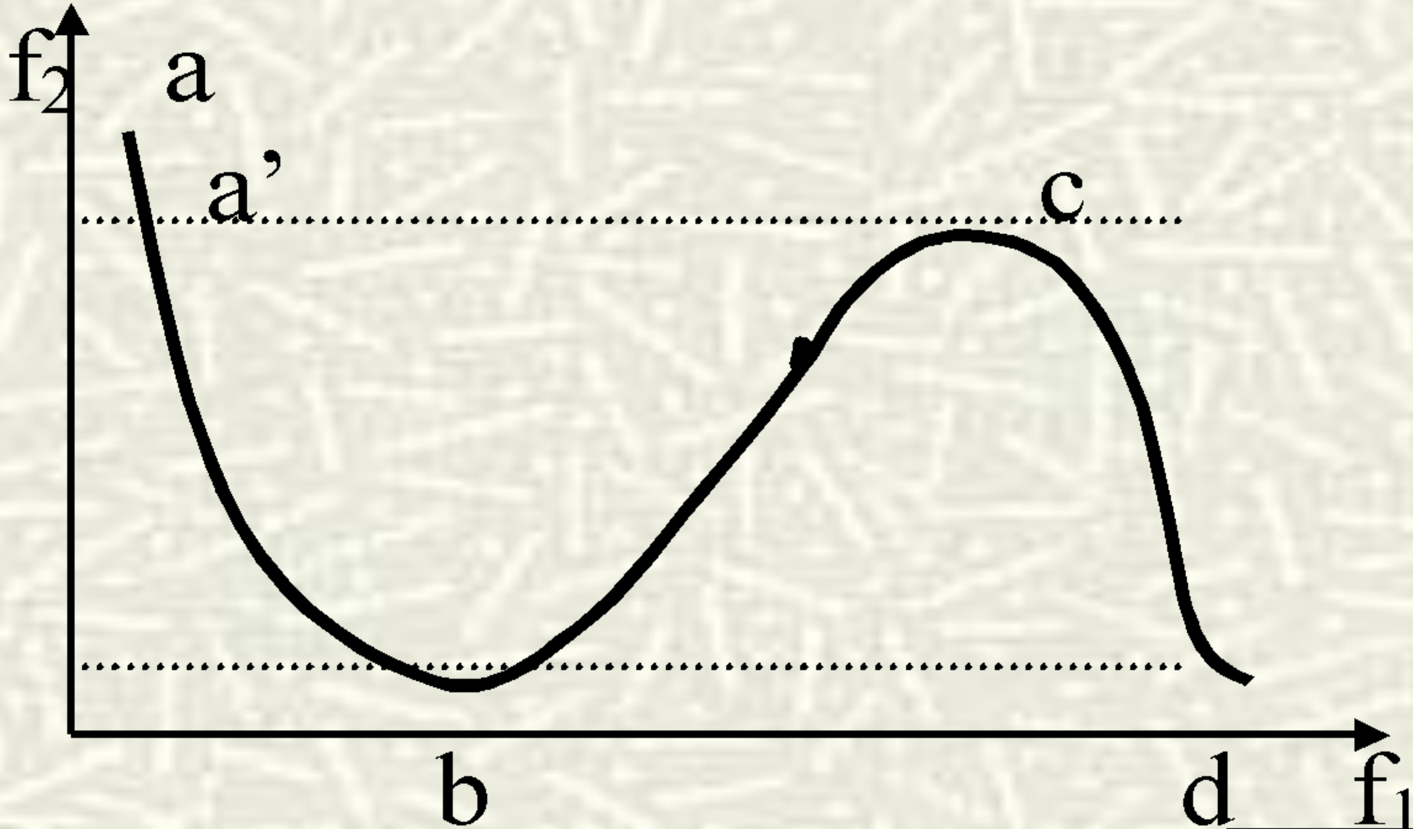
P {X1(2;7); X2(4;4); X3(3;6); X4(7;1); X5(5;3)}

АУТ (2;1)

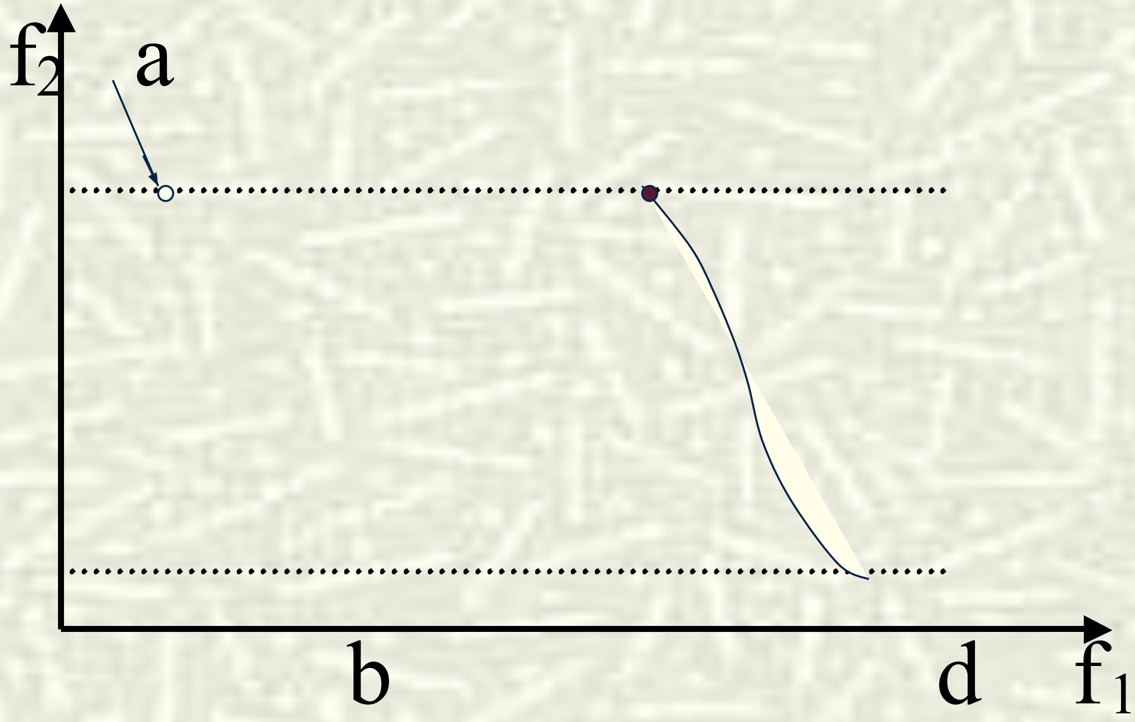
УТ (7;7)



Множество Парето



Множество Парето



Множество Парето

- Все альтернативы из множества Парето являются решением многокритериальной задачи в смысле этого принципа, т.е. являются ***паретооптимальными***
- Основным недостатком таких решений является их множественность

Перевод в однородную шкалу

$$f_i(x) = \frac{f_i^*(x) - f_i^{\min}}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}$$

fi*(x) - оценка альтернативы *x* по *i*-му критерию в «родной» шкале

fimax и ***fimin*** - максимальное и минимальное значения альтернатив по *i*-му критерию

Перевод в однородную шкалу

$$f_i(x) = \frac{f_i^*(x) - f_i^{\min}}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}$$

- А: $ 100 млн; 20 мин; 50 тыс. чел;
- Б: $ 130 млн; 30 мин; 20 тыс чел;
- С: $ 200 млн; 60 мин; 5 тыс чел;

А(0;0;-1) Б(-3/10;-1/4;-1/3) С(-1;-1;0)

УТ(0;0;0) АУТ(-1;-1;-1)

Принятие решений при неопределенности целей

Интегральный критерий

Метод Нэша

Метод контрольных показателей

Простейший метод

Введение метрики в пространстве целевых функций

Свертка

MAUT

Интегральный критерий

$$\boldsymbol{x} \Rightarrow (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \Rightarrow \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

Его роль – поставить в соответствие ***каждой альтернативе***

только **одно число**

Метод арбитражных решений, или метод Нэша

- **АУТ(** f_i^{min} **)**

$$\mathbf{F(x)=}\ \prod_i (f_i(x) - f_i^{min}) \to \max_x$$

Пример

Р $\{X1(2;7); X2(4;4); X3(3;6); X4(7;1); X5(5;3)\}$

АУТ **(2;1)**

F(x1)=(2-2)(7-1)=0

F(x2)=(4-2)(4-1)=6

F(x3)=(3-2)(6-1)=5

F(x4)=(7-2)(1-1)=0

F(x5)=(5-2)(3-1)=6

$$\prod_i (f_i(x) - f_i^{min}) \to \max_x$$

x2 ~ **x**5 по Нэшу

Использование контрольных показателей

$\{f_i^*\}_n, \quad f_i(x) \geq f_i^*,$

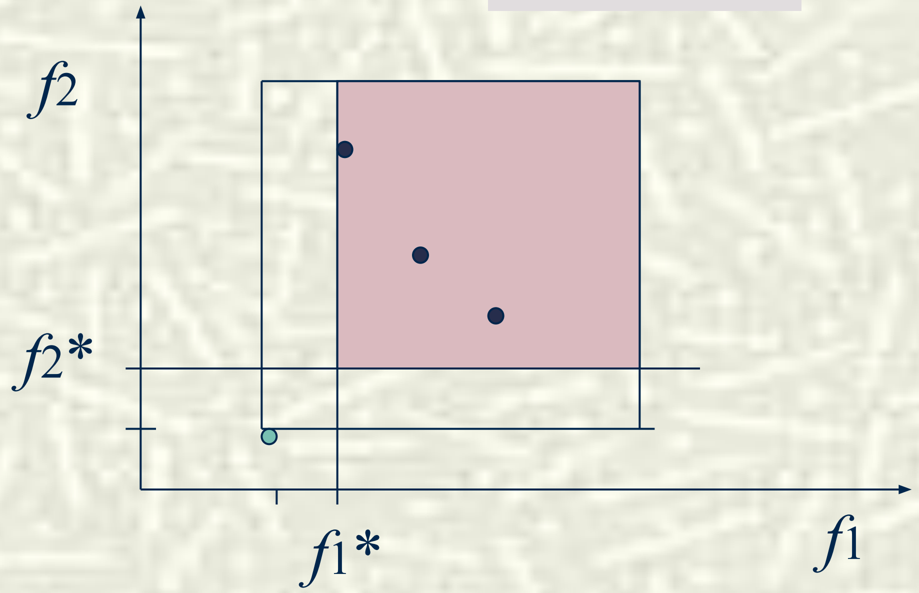
$$F(x) = \min_i \left\{ \frac{f_i(x)}{f_i^*} \right\} \to \max_x$$

Пример

- P $\{X_1(2;7);\ X_2(4;4);\ X_3(3;6);\ X_4(7;1);\ X_5(5;3)\}$

АУТ (**2**;**1**)

Пусть $f_1^*=3;\ f_2^*=2$



$F(x_2)=min\{4/3;\ 4/2\}=4/3$

$F(x_3)=min\{3/3;\ 6/2\}=1$

$F(\mathbf{x_5})=min\{5/3;\ 3/2\}=\mathbf{3/2}$

Простейший способ

$$f_i(x) \geq f_i^*$$

$$f_1(x) \underset{x}{\rightarrow} max$$

Ранг, равный 1, присваивается главному критерию

Введение метрики в пространстве целевых функций

УТ(f_{imax})

$$h(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(fimax - f_i(x) \right)^2}$$

$$h(x) \to \min_x$$

Пример

- P {**X1(2;7); X2(4;4); X3(3;6); X4(7;1); X5(5;3)**}

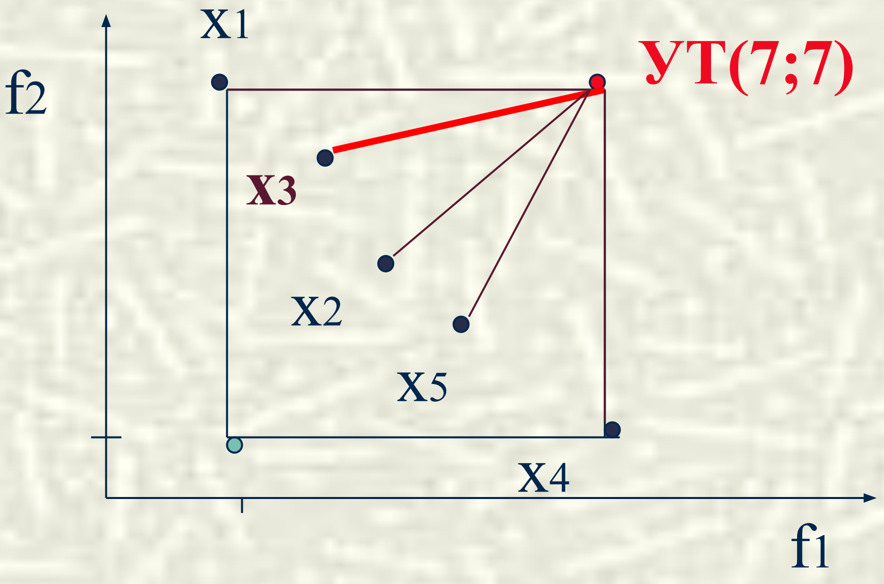
$h(x_1)=5$

$h(x_2)=\sqrt{18}$,

$h(\mathbf{x_3})= \mathbf{\sqrt{17}}$

$h(x_4)=6$

$h(x_5)= \sqrt{20}$



Пример

- А: $ 100 млн; 20 мин; 50 тыс. чел;
- Б: $ 130 млн; 30 мин; 20 тыс чел;
- С: $ 200 млн; 60 мин; 5 тыс чел;

	Нэш	МКП	Метрика
А(61;61;1)	0	1	h(А)=60= √3600
Б(43;46;41)	42*45*40	41	h(Б)= $= \sqrt{18^2+15^2+20^2} = \sqrt{949}$
С(1; 1; 61)	0	1	Н(С)=√7200

УТ(61;61;61);

АУТ (1;1;1)

Свертка

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x)$$

здесь ***x*** – альтернатива из множества *Парето*
$f_i(x)$ – оценка альтернативы ***x*** по ***i***-му критерию

Свертка

C_i – коэффициенты относительной важности критериев

$$\sum_{i=1}^{n} C_i = 1$$

Экспертное оценивание c_i

Пусть r_{ij} – ранг, который присвоил
j–ый эксперт
i–му критерию

Чтобы получить числовую оценку, введем новый коэффициент

$$b_{ij} = 1 - \frac{r_{ij} - 1}{n}$$

Экспертное оценивание C_i

Тогда коэффициент значимости ***i*-го** критерия с точки зрения ***j***–го эксперта

$$C_{ij} = \frac{b_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}}$$

Экспертное оценивание C_i

- Пусть g_j – компетентность j–го эксперта, тогда

$$C_i = \sum_{j=1}^{m} g_j C_{ij}, \quad \sum_{j=1}^{m} g_j = 1$$

Оценивание C_i

***Th*. Если**

$$f_i \ \boxtimes^{h} \ f_j \qquad ,$$

то $C_i = hC_j$,

$C_i > 0, \qquad \sum C_i = 1$

Решая систему линейных уравнений, получим искомые коэффициенты

Пример

- $f_1 \succ^{3/2} f_2$, $f2 \sim f3$, $f_3 \succ^{2} f_4$

C_1=1,5C_2;

C_2=C_3;

C_3=2C_4;

C_1+C_2+C_3+C_4=1;

C_1=3/8; C_2=2/8; C_3=2/8; C_4=1/8

	3/8	**2/8**	**2/8**	**1/8**	
	f_1	f_2	f_3	f_4	$F(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$
X1	2	5	4	5	3/8*2+2/8*5+2/8*4+1/8*5=29/8
X2	5	3	4	3	**32/8**
X3	3	2	5	5	28/8
X4	4	3	4	4	30/8
X5	3	4	4	4	29/8
X6	4	3	3	4	28/8

Использование линейной свертки

Это задачи, связанные с **критериями** ***суммарного ущерба или прибыли***, ***дохода***, ***денежных или временных затрат*** по годам планирования или по этапам жизненного цикла экономических информационных систем и т. п., т.е. там, где допускается, что ***низкая ценность одной частной характеристики результата компенсируется высокой ценностью другой***

Квадратичная свертка

$$\Phi_2(x) = (\sum C_i f_i^2(x))^{1/2}$$

Свертка порядка *t*

$$\Phi_t(x) = (\sum C_i f_i^t(x))^{1/t}$$

Величина ***t***, стоящая в показателе степени, отражает **допустимую степень компенсации малых значений одних критериев большими значениями других**.

Чем больше значение *t*, тем больше степень возможной компенсации.

$$t \to -\infty$$

$$F(x) = \min_i \left\{ \frac{f_i(x)}{c_i} \right\}$$

недопустима никакая **компенсация**, и требуется ***выравнивание значений всех критериев***

(равномерное «подтягивание» значений всех критериев к их наилучшему уровню)

$$F(x) = \min_i \left\{ \frac{f_i(x)}{c_i} \right\}$$

	3/8	**2/8**	**2/8**	**1/8**		
	f_1	f_2	f_3	f_4		
X1	2	5	4	5	(2/3+5/2+4/2+5)*8	2/3
X2	5	3	4	3	(5/3+3/2+4/2+3)*8	**3/2**
X3	3	2	5	5	(3/3+2/2+5/2+5)*8	1
X4	4	3	4	4	(4/3+3/2+4/2+4)*8	4/3
X5	3	4	4	4	(3/3+4/2+4/2+4)*8	1
X6	4	3	3	4	(4/3+3/2+3/2+4)*8	4/3

t→0

$$F(x)=\prod_{i=1}^{n} f_i^{c_i}(x)$$

- мультипликативная функция

требуется обеспечение ***примерно одинаковых уровней*** значений отдельных частных критериев

$$t \to \infty$$

$$F(x) = \max_i \{c_i f_i(x)\}$$

В задачах планирования ударов «по узкому месту» допустима

компенсация увеличения одного из критериев сколь угодно большим уменьшением остальных

$$F(x) = \max_i \{c_i f_i(x)\}$$

	3/8	2/8	2/8	1/8		
	f_1	f_2	f_3	f_4		
X1	2	5	4	5	(2*3+5*2+4*2+5)/8	10
X2	5	3	4	3	(5*3+3*2+4*2+3)/8	**15**
X3	3	2	5	5	(3*3+2*2+5*2+5)/8	10
X4	4	3	4	4	(4*3+3*2+4*2+4)/8	12
X5	3	4	4	4	(3*3+4*2+4*2+4)/8	9
X6	4	3	3	4	(4*3+3*2+3*2+4)/8	12

Свертка

Используя в качестве интегрального критерия свертку, выбирают в качестве лучшей ту альтернативу, для которой ***F(x)*** имеет ***максимальное значение***

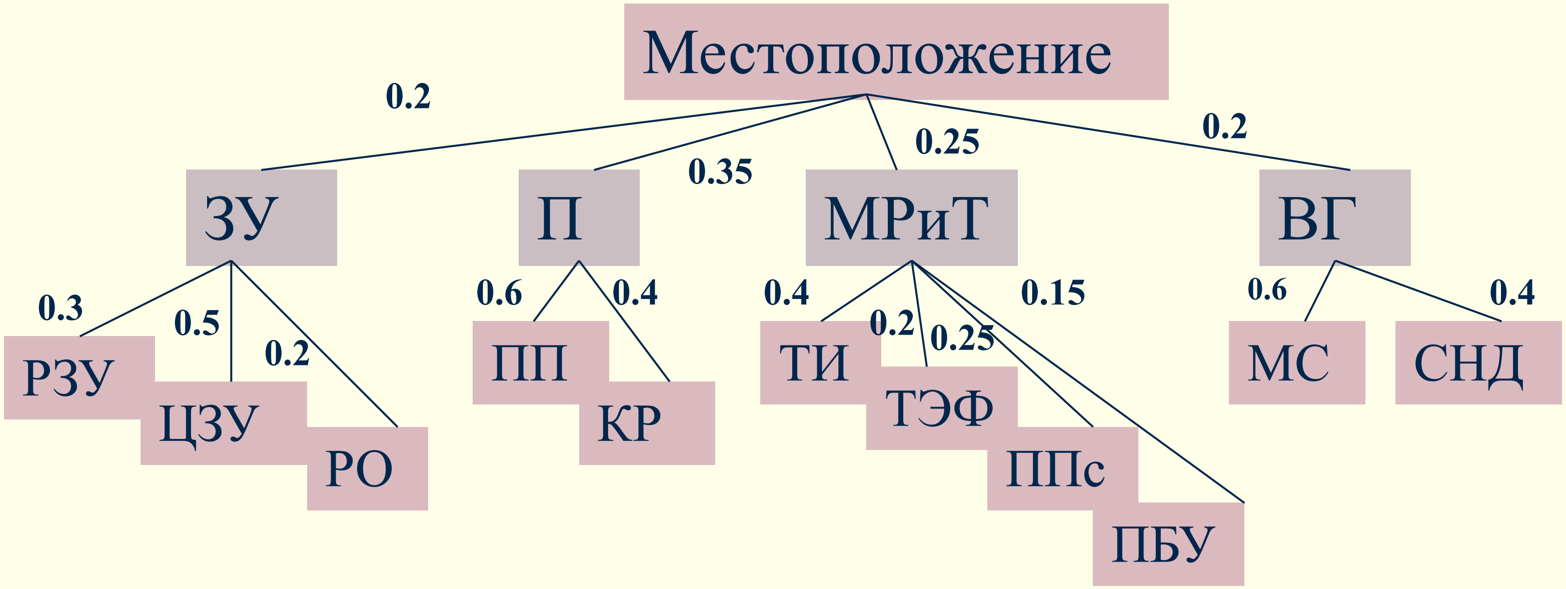
Multi-Attribute Utility Theory (***MAUT***)

- Используется при возможном структурировании системы целей, представлении ее в виде иерархии.
- Идея – оценить полезность каждой альтернативы с точки зрения достижения глобальной цели

Алгоритм ***MAUT***

- Оценивается частичная полезность каждой альтернативы по отношению к соответствующему критерию
- Оцениваются коэффициенты относительной важности критериев
- Оценивается общая полезность каждой альтернативы по отношению к главной цели
- Лучшей будет та альтернатива, общая полезность которой больше.

Пример: «Выбор местоположения предприятия»



А, Б, С

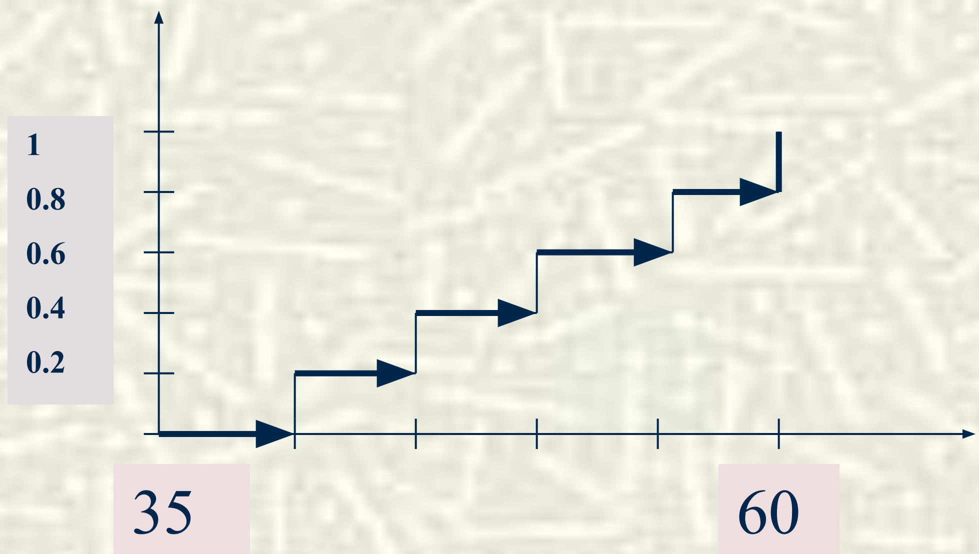
Оценка частичной полезности альтернатив по критерию

РЗУ, тыс. кв. м:

А – 60

Б – 42.5

С - 35



А(1), Б(0.2), С(0)

=>

$РЗУ_А = 1*0.3*0.2 = 0.06$

$РЗУ_Б = 0.2*0.3*0.2 = 0.012$

$РЗУ_С = 0$

Показатели частичной полезности

	0,2	0,2	0,2	0,35	0,35	0,25	0,25	0,25	0,25	0,2	0,2
	0,3	0,5	0,2	0,6	0,4	0,4	0,2	0,25	0,15	0,6	0,4
	РЗУ	**ЦЗУ**	**РО**	**ПП**	**КР**	**ТИ**	**ТЭФ**	**ППс**	**ПБУ**	**МС**	**СНД**
А	**1,0**	**0**	**1,0**	**0**	**0**	**0,6**	**0,4**	**0,6**	**1,0**	**0,4**	**0,6**
Б	**0,2**	**1,0**	**0**	**0,6**	**0,8**	**0**	**0**	**1,0**	**0**	**1,0**	**1,0**
С	**0**	**0,6**	**0,8**	**1,0**	**1,0**	**1,0**	**1,0**	**0**	**0,8**	**0**	**0**

U(А)=0,06-0,04+0,06+0,02+0,0375+0,0375+0,048+0,48=**0,703**

U(Б)=0,012-0,1+0,126+0,112+0,0625+0,12+0,08=0,4125

U(С)=-0,06-0,032+0,21+0,14+0,1+0,05+0,03=0,438

Применение

- «+»: Относительно простой способ нахождения решения в МКЗ путем системного структурирования и легкой интерпретации результатов - позволяет оценивать любые (в том числе и вновь появляющиеся альтернативы)
- **«-»:**

предполагается, что человек может дать точные ***количественные*** оценки;

сложно определять веса критериев,

функции преобразования