Теория принятия решений

Игровые методы ПР

Теория игр

- Неопределенными могут быть не только **условия**, в которых работает предприятие и принимаются решения, но и **действия противников или других лиц**, от которых зависит успех, или ***результат***.

Теория игр

- ЛПР приходится считаться не только со **своими собственными целями**,

но и с теми ***целями***, которые ставят перед собой его ***партнеры***.

И учитывать, кроме объективных, известных ему обстоятельств конфликта, еще и ***решения, которые принимают его противники***, и которые ему, вообще говоря, неизвестны.

Теория игр

- Теория принятия решений в условиях конфликта
- или математическая теория конфликтных ситуаций

Физическая и социальная природа конфликта

- юридические лица,
- воюющие стороны,
- спортивные команды,
- конкурирующие фирмы,
- биологические виды в борьбе за существование,
- борьба технологий,
- дележи рынков,…

Задача теории игр

- выработка рекомендаций по рациональному образу действий участников конфликта

Конфликтная ситуация

Чтобы сделать возможным математический анализ ситуации, надо построить упрощенную, схематизированную модель ситуации.

- Такую модель принято называть ***игрой***.

Игра – это модель конфликта

Принятие решений во взаимосвязанных ситуациях:

- большинство проблем в **экономических и социальных** науках (*стратегическое поведение, конкуренция, кооперация, риск и неопределенность*)
- приложения в области **разработки новых технологий, ведения военных действий и** т.д.

Конфликт

Любое явление, применительно к которому имеет смысл говорить о том,

- *кто и как* в этом конфликте *участвует,*
- каковы его возможные *исходы*,
- *кто и как* в этих исходах *заинтересован*,
- в чем состоит эта *заинтересованность*.

Элементы игры

- $\boldsymbol{I}$ - *множество игроков*
-
- $K_d \subset I$ – *коалиции действий,* $x_i \in \Omega_i$
-
- $S=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ - *исход* конфликта, или *ситуация*
- $$S \subset \prod_i \Omega_i$$

Элементы игры

- ***Коалиции интересов - $K_I \subset I$***
- ***Заинтересованность $f_K(A)$ –***
- каждая из коалиций предпочитает одни исходы другим -

$$A \succ_K B$$

если $f_K(A) > f_K(B)$

Классификация игр

- 1) $\mathbf{K_I \geq 2}$ –
- не менее 2-х заинтересованных сторон
- 2) $\mathbf{K_d = 1}$ – игра ***нестратегическая*** (неопределенности природы),
- **3)** $\mathbf{K_d \geq 2}$ **–** игра ***стратегическая***

Классификация игр

- *по количеству игроков* - **игры *2 и n* игроков**
- *по количеству стратегий* –

конечные *и* ***бесконечные***;

- *по характеру взаимодействия игроков*

коалиционные и бесконоалиционные;

- *по характеру выигрышей* - игры *с* ***нулевой суммой*** и игры *с* ***ненулевой суммой***;
- *по виду функций выигрыша* –

матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, типа дуэлей и др.

Классификация игр

- ***Антагонистическая игра*** – игра ***двух лиц с нулевой суммой.***

- ***Матричная игра – конечная*** игра ***двух*** лиц с ***нулевой суммой***, или
- конечная антагонистическая игра.

- ***Биматричная игра*** – *конечная* игра *двух* игроков с *ненулевой суммой.*

Матричные игры

- $I=\{I,II\}$ I: $X=\{x_i\}_m$
- II: $Y=\{y_j\}_n$
- $f_1(x,y)$ – функция выигрыша
- *первого* игрока
- $f_2(x,y)$ – функция выигрыша
- *второго* игрока
  - $f_1(x,y)=-f_2(x,y)$

Матричные игры

- Матрица игры:

$x \backslash y$	y_1	y_2	…	y_n
x_1	$f_1(x_1,y_1)$	$f_1(x_1,y_2)$	…	$f_1(x_1,y_n)$
x_2	$f_1(x_2,y_1)$	$f_1(x_2,y_2)$	…	$f_1(x_2,y_n)$
…	…	…	…	…
x_m	$f_1(x_m,y_1)$	$f_1(x_m,y_2)$	…	$f_1(x_m,y_n)$

Функция выигрыша

$f_1(x_i, y_j)$ – **результат 1-го игрока,**

когда он сделал ход $\boldsymbol{x_i}$, а 2-ой игрок – ход $\boldsymbol{y_j}$,

т.е. в ситуации $\boldsymbol{(x_i, y_j)}$

В *антагонистической игре* цели игроков ***противоположны***:

Цель первого игрока –

выиграть как можно больше,

цель второго -

проиграть как можно меньше

Решить игру

Найти *оптимальные стратегии каждого игрока* и

оценить результат,

т.е. выигрыш первого игрока

Пример

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} y1 & y2 & y3 \end{array} \\ \begin{array}{c} X1 \\ X2 \\ X3 \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(x1,y2)→(x2,y2)

(x2,y2) – ситуация равновесия

Ситуация равновесия

Если один игрок придерживается стратегии, соответствующей ***ситуации равновесия***,

то второму игроку невыгодно отступать от *своей стратегии*, соответствующей ситуации равновесия

Ситуация равновесия

Пусть **(x^*, y^*)** – ситуация равновесия

$f_1(x,y)$ - выигрыш 1-го игрока

- $f_2(x,y)$ - выигрыш 2-го игрока
- тогда
  - $f_1(x,y^*) \leq f_1(x^*,y^*)$
  - $f_2(x^*,y) \leq f_2(x^*,y^*)$

Ситуация равновесия

$f_1(x,y^*) \le f_1(x^*,y^*)$

$f_2(x^*,y) \le f_2(x^*,y^*)$, *(-1):

- $-f_2(x^*,y) \ge -f_2(x^*,y^*)$, но
  - $f_1(x,y) = -f_2(x,y)$,
- $f_1(x^*,y) \ge f_1(x^*,y^*)$
- $f_1(x,y^*) \le f_1(x^*,y^*) \le f_1(x^*,y)$

Ситуация равновесия

Точка, выигрыш в которой первого игрока минимален по *y* и максимален по *x*:

$$f_1(x^*, y^*) = \max_x \min_y f_1(x, y)$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Гарантированный результат

$$\mathbf{v_1 = \max_x \min_y f_{ij}} \; –$$

гарантированный результат

1-го игрока

Гарантированный результат

- $v_2 = \min\limits_{y} \max\limits_{x} f_{ij}$ -
- *гарантированный результат*
- *2-го игрока*

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \hline 5 & 2 & 4 \end{array}$$

$\overline{v}$

Гарантированные результаты

- $\mathbf{v}_1 = \underline{v}$ –

  нижняя цена игры,

- $\mathbf{v}_2 = \overline{v}$ –

  верхняя цена игры

Th. Неравенство минимаксов

$\underline{V} \le \overline{V}$, или

$$\max_x \min_y f_1(x, y) \le \min_y \max_x f(x, y)$$

Доказательство

$$f_1(x,y) \le \max_x f(x,y)$$

- по свойству с.р.

Но если f(x)<g(x),

то <u>min f(x</u>)<<u>min g(x),</u> т.е.

$$\min_y f_1(x,y) \le \min_y \max_x f(x,y)$$

Неравенство минимаксов

Если функция ограничена сверху константой, то и максимум этой функции ограничен ею же

$$\max_x \min_y f_1(x, y) \le \min_y \max_x f_1(x, y)$$

ч.т.д.

Ситуация равновесия

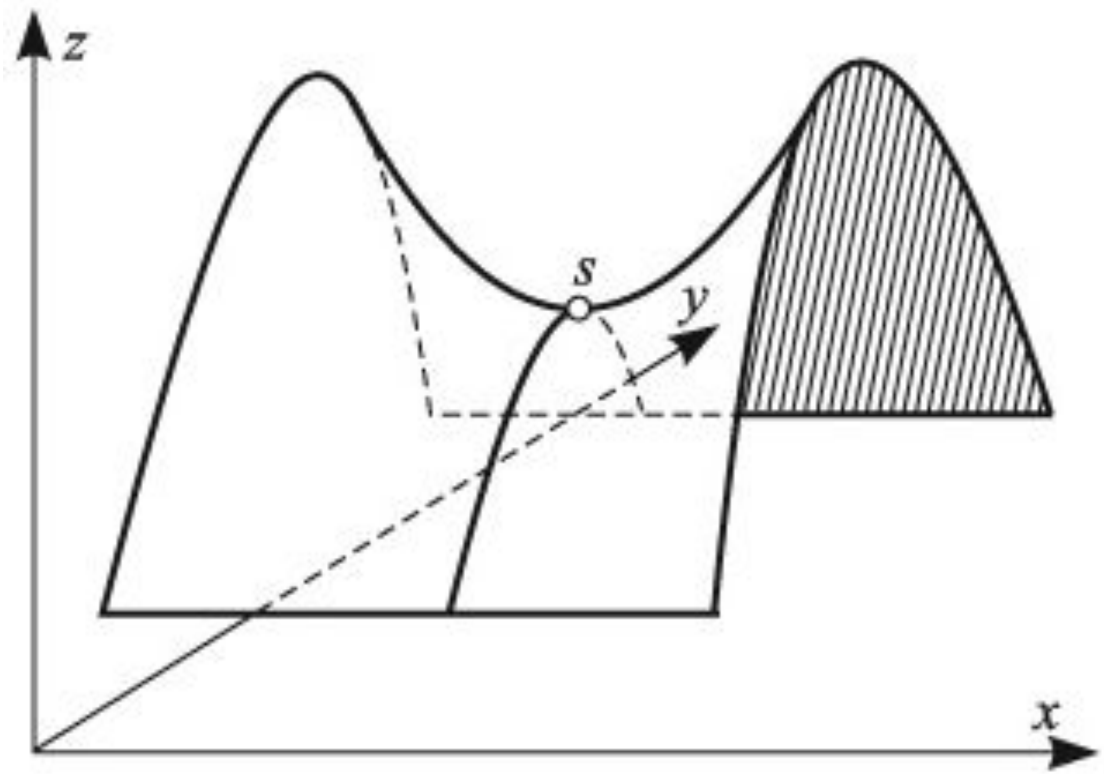
$v_1 = \max_x \min_y f_{ij}$

- $v_2 = \min_y \max_x f_{ij}$ $\bar{\nu}$

- *Если* $v_1 = v_2$ –

седловая точка

Седловая точка



Пример

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & y1 & y2 & y3 & y4 & \\
\hline
x_1 & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\
x_2 & 4 & 2 & 5 & 3 & 2 \\
x_3 & 4 & 1 & 4 & 2 & 1 \\
x_4 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\
\hline
 & 4 & 2 & 5 & 4 &
\end{array}$$

$v_1=2$

$v_2=2$

Седловая точка

Седловых точек в игре может быть ***несколько,*** причем цена игры в каждой одинакова

Принцип достижимости целей

Стремление игроков к ***ситуации равновесия***, описываемой седловой точкой,

т.к. только **ситуации равновесия могут быть предметом договоров, которые будут соблюдаться** (игрокам невыгодно отступать от такой ситуации).

Существуют ли оптимальные решения в играх *без* седловых точек?

Теорема Неймана гарантирует, что *каждая антагонистическая игра* имеет *оптимальные стратегии*

Пример

$$\begin{array}{cc|c} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} & & \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} 6 & 8 \end{array} & & \end{array}$$

$\underline{\nu} = 4; \quad \overline{\nu} = 6.$

$\nu \in [\mathbf{4;6}]$

v – цена игры

Игры с закрытой информацией

В играх ***без*** седловой точки свои ходы надо тщательно **скрывать**.

Однако интервал [4,6] каждый из игроков хочет перераспределить в свою пользу,

и это выгодно им обоим.

Значит, надо придумать такую процедуру поведения, чтобы

$$\mathbf{v \in [4,6]}.$$

Идея использования ***смешанных стратегий***

Правильное поведение состоит в том, чтобы стратегию выбирать случайно –

не на основании каких-то разумных

соображений, -

но сама ***схема рандомизации***

должна выбираться

разумно

Смешанная стратегия

Случайная величина, значениями которой являются *чистые стратегии игрока.*

Это ***сложная стратегия***, состоящая в **случайном чередовании** двух или более *чистых стратегий* с определенными частотами.

В теории игр доказано, что устойчивое решение в играх ***без*** седловой точки лежит в области *смешанных стратегий.*

Смешанная стратегия

$$P=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{pmatrix}$$ - смешанная стратегия первого игрока,

или ***вероятностное распределение*** на множестве *чистых стратегий*

$P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$,

причем **$\sum p_i = 1$**.

Смешанная стратегия

- $Q = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix}$ - смешанная стратегия второго игрока,

$$Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

$$\sum q_j = 1.$$

Смешанная стратегия

Применение смешанной стратегии - это гибкая тактика, при которой противник не знает и не может знать заранее, с чем ему придется встретиться

Смешанная стратегия

Любая чистая стратегия является *частным случаем* смешанной:

например, $x_1 = P(1,0,\ldots,0)$.

Таким образом, для любой игры существует пара (P,Q) смешанных стратегий.

Платеж, соответствующий паре (P,Q),

называется **ценой игры v**.

Стратегии, которые входят в оптимальную смешанную стратегию (им соответствуют ненулевые вероятности), называются

активными стратегиями.

Алгоритм решения игры

Упростить игру.

- Найти ***гарантированные результаты*** для каждого игрока.
- Если существует **седловая точка**, то найти решение игры в ***чистых стратегиях***.
- Если седловой точки нет, то найти решение игры в ***смешанных стратегиях***.

Решение игр 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ - платежная матрица

Решение игры будем искать в ***смешанных*** стратегиях:

$P=(p_1,p_2)$ - для первого игрока и

$Q=(q_1,q_2)$ – для второго.

Решение игр 2x2

Это значит, что первый игрок будет применять свою первую стратегию

x_1 с вероятностью p_1,

а свою вторую стратегию

x_2 – с вероятностью p_2,

причем $\mathbf{p1+p2=1}$.

Пример

$v \in [4;6]$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} q1 & q2 \end{array} \\ \begin{array}{c} p1 \\ p2 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

$Mv = 6p_1q_1 + 2p_1q_2 + 4p_2q_1 + 8p_2q_2$

$p_2 = 1 - p_1,\ q_2 = 1 - q_1$

$Mv = 6p_1q_1 + 2p_1(1-q_1) + 4(1-p_1)q_1 + 8(1-p_1)(1-q_1) =$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$= -6p_1 - 4q_1 + 8 + 8p_1q_1 =$

$= 8(p_1 - \mathbf{1/2})(q_1 - \mathbf{3/4}) + \mathbf{5}$

Ответ:

P$=\{1/2;\ 1/2\}$; ***Q***$=\{3/4;\ 1/4\}$;
v=5

Решение игр 2x2

Решим игру в общем виде с точки зрения второго игрока

Перепишем матрицу игры в следующем виде:

	q1	*q2*
p1	a_{11}	a_{12}
p2	a_{21}	a_{22}

Найдем ***средний проигрыш*** *второго игрока*:

$a_{11} \cdot q_1 + a_{12} \cdot q_2 = \boldsymbol{v}$ - *при* **первой** *стратегии первого игрока,*

$a_{21} \cdot q_1 + a_{22} \cdot q_2 = \boldsymbol{v}$ - *при* **второй** *стратегии первого игрока,*

Решение игр 2x2

$(a_{11}-a_{21}) \cdot q_1+(a_{12}-a_{22}) \cdot q_2=0,$

затем, учитывая, что $q_2=1-q_1$,

получим

$(a_{11}-a_{21}-a_{12}+a_{22}) \cdot q_1+(a_{12}-a_{22})=0.$

Отсюда

$\boldsymbol{q_1}=-(a_{12}-a_{22})/(a_{11}-a_{21}-a_{12}+a_{22}).$

Подставляя это значение q_1 в любое

из уравнений, получим значение цены игры $\boldsymbol{v}$

С точки зрения первого игрока

$a_{11} \cdot p_1 + a_{21} \cdot p_2 = v$ - при первой стратегии второго игрока,

$a_{12} \cdot p_1 + a_{22} \cdot p_2 = v$ - при второй стратегии второго игрока.

$$p_1(a_{11}-a_{12}) + (a_{21}-a_{22})(1-p_1)=0$$

$$p_1 = \frac{(a_{22}-a_{21})}{(a_{11}-a_{12}+a_{22}-a_{21})}$$

Пример

Матрица игры A= $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

Составим систему уравнений для **второго** игрока

$$\begin{cases} 6q_1+2q_2=\mathbf{V} \\ 4q_1+8q_2=\mathbf{V} \end{cases}$$

решая совместно, получим $2q_1-6(1-q_1)=0$,

или $8q_1=6$, или $\mathbf{q_1=3/4}$.

Отсюда $\mathbf{Q=(3/4;1/4)}$.

Цена игры $\mathbf{V} = 6\cdot\mathbf{3/4}+2\cdot\mathbf{1/4} = \mathbf{5} \in[4,6]$.

Пример

Найдем оптимальную стратегию первого игрока.
Поскольку цена игры уже известна, то достаточно написать только ***одно уравнение*** для среднего выигрыша первого игрока:

$$\begin{cases} 6p_1+4p_2=5, \\ p_2=1-p_1, \end{cases}$$

после подстановки получим

$$2p_1+4=5,$$

откуда $\mathbf{p_1=1/2.}$

Следовательно,

$$\boldsymbol{P=(1/2;1/2).}$$

Ответ:

$P=(1/2;1/2)$, $Q=(3/4;1/4)$,

$\boldsymbol{v} = 5$.

Решение примера методом Крамера

$$A=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 4 & 8\end{pmatrix},$$

ее определитель $|A|=6\cdot 8-4\cdot 2=40$.

Тогда $q_1=\dfrac{\begin{vmatrix}v & 2\\ v & 8\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{6v}{40}$, $q_2=\dfrac{\begin{vmatrix}6 & v\\ 4 & v\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{2v}{40}$

Поскольку $q_1+q_2=1$, то из $8v/40=1$ следует

v=5, значит, **Q={3/4;1/4}**

Решение примера методом Крамера

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Вероятности ***P*** можно найти аналогично, но из транспонированной матрицы

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6p_1 + 4p_2 = \mathbf{v} \\ 2p_1 + 8p_2 = \mathbf{v} \end{cases}$$

тогда $p1 = \dfrac{\begin{vmatrix} v & 4 \\ v & 8 \end{vmatrix}}{|A|} = 4v/40.$

v=5 $\Rightarrow$ **P={1/2;1/2}.**

Решение игр 2×*n* и *m*×2

Если ***один*** из игроков имеет **2 стратегии**,

а ***другой*** игрок -

<u>больше</u> **двух стратегий**,

то игра решается

графическим способом

Решение игр **$2 \times n$**

У ***первого*** игрока **- 2 стратегии,**
у *второго* игрока **-** ***n*** стратегий**.**

Если в игре *<u>нет</u>* ***седловой*** точки,
то будем искать решение игры
в ***смешанных стратегиях***.

Решаем игру с точки зрения
того игрока,
у которого **две**
стратегии.

Решение игр $2 \times n$

Матрица игры:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

- $p_2 = 1 - p_1$
- $v_1 = a_{11} p_1 + a_{21} p_2 = \quad a_{21} + (a_{11} - a_{21}) p_1$
- $v_2 = a_{12} p_1 + a_{22} p_2 = \quad a_{22} + (a_{12} - a_{22}) p_1$
- ....
- $v_n = a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 = \quad a_{2n} + (a_{1n} - a_{2n}) p_1$

Графо-аналитический метод

Линейные функции $V_1, V_2,\ldots,V_n$ отражают зависимость

среднего выигрыша 1-го игрока

от вероятности $\boldsymbol{p_1}$

при различных стратегиях 2-го игрока.

Для *анализа ситуации* необходимо изобразить их графически в осях $\mathbf{v_1}$**–**$\boldsymbol{p_1}$, имея в виду, что областью определения функций $\mathbf{v_1, v_2,\ldots,v_n}$ является интервал **[0,1]**

Гарантированный результат первого игрока

$$\mathbf{v} = \max_{i} \min_{j} \{ a_{2j} + (a_{1j} - a_{2j}) p_1 \}$$

Чтобы обеспечить себе гарантированный результат,

первый игрок должен выделить нижнюю границу среднего выигрыша

при *любой стратегии второго* игрока,

а затем найти максимальное значение среднего результата на этой границе

Решение игры

Соответствующая *абсцисса* равна вероятности применения первым игроком его первой стратегии, а *ордината* равна цене игры

Пример

Решить игру $A = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{v} = 1, \quad \overline{v} = 3$

Решаем ее с точки зрения I игрока

$v_1 = 2p_1 + 4p_2 = 2p_1 + 4(1 - p_1) = 4 - 2\mathbf{p_1}$

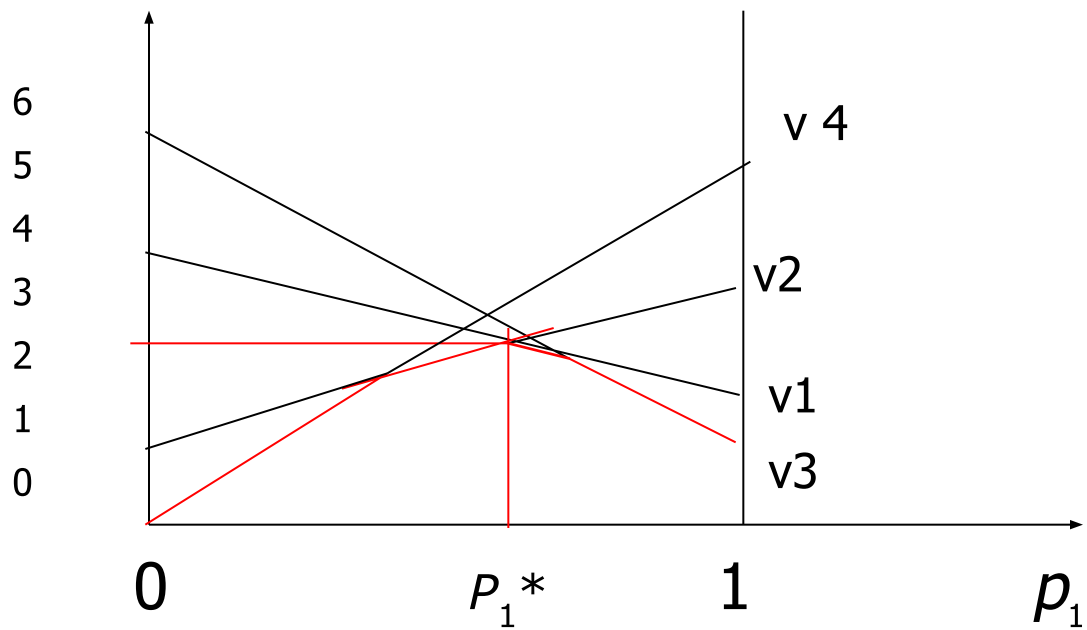
$v_2 = 3p_1 + p_2 = 1 + 2\mathbf{p_1}$

$v_3 = p_1 + 6p_2 = 6 - 5\mathbf{p_1}$

$v_4 = 5p_1 + 0p_2 = 5\mathbf{p_1}$

Решение игры

V



Верхняя точка границы

образована пересечением прямых *v3 и v2*

$$(p_1^*,\ \mathbf{v}) \in v_3 \cap v_2.$$

Координаты точки пересечения найдем из равенства $1+2p_1=6-5p_1$,

Отсюда $7p_1=5$ и

$$p_1^* = \frac{5}{7}, \quad p_2 = \frac{2}{7} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}=1+2*5/7=17/7$$

Для 2-го игрока

стратегии *y_1 и y_4 – неактивные*, т.к. не используются в смешанной стратегии.

Тогда смешанную стратегию второго игрока найдем из

$$q_1 = \frac{\begin{vmatrix} v & 1 \\ v & 6 \end{vmatrix}}{17} = \frac{5v}{17} = \frac{5}{7} \quad \Rightarrow$$

$Q = (0; \frac{5}{7}; \frac{2}{7}; 0)$.

Ответ: ***P***=(5/7; 2/7), **v**=17/7; ***Q***=(0; 5/7; 2/7; 0).

Решение игр *m*×2

У 1-го игрока *m* стратегий,
у 2-го игрока – **2** стратегии

Матрица игры

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}$$

Решаем с точки зрения того игрока, который имеет 2 стратегии, т.е. <u>второго</u>.

$P = (p_1, \ldots, p_m)$ – смешанная стратегия 1-го игрока

$Q = (q_1, q_2)$ – смешанная стратегия 2-го игрока

Средний проигрыш 2-го игрока

$$\begin{array}{cc} q1 & q2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$\nu_1 = a_{11}\, q_1 + a_{12}\, q_2 = a_{11} + (a_{11} - a_{12}) q_1$$

$$\ldots$$

$$\nu_m = a_{m1} q_1 + a_{m2} q_2 = a_{m1} + (a_{m1} - a_{m2}) q_1$$

Гарантированный результат второго игрока

$$v_2 = \min_y \max_x f(x, y)$$

Средний проигрыш 2-го игрока

В семействе прямых, описывающих средний проигрыш 2-го игрока,

отмечаем *верхнюю* границу и выбираем на ней самую <u>нижнюю точку</u>.

Ее координаты определяют искомую вероятность q_1 и цену игры **v**.

Смешанная стратегия 1-го игрока

Активными стратегиями первого игрока будут те, которые соответствуют прямым, образующим точку пересечения (***q_1*, v**).

Оптимальные стратегии первого игрока определим из ***матрицы 2х2***

Пример

Матрица игры

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

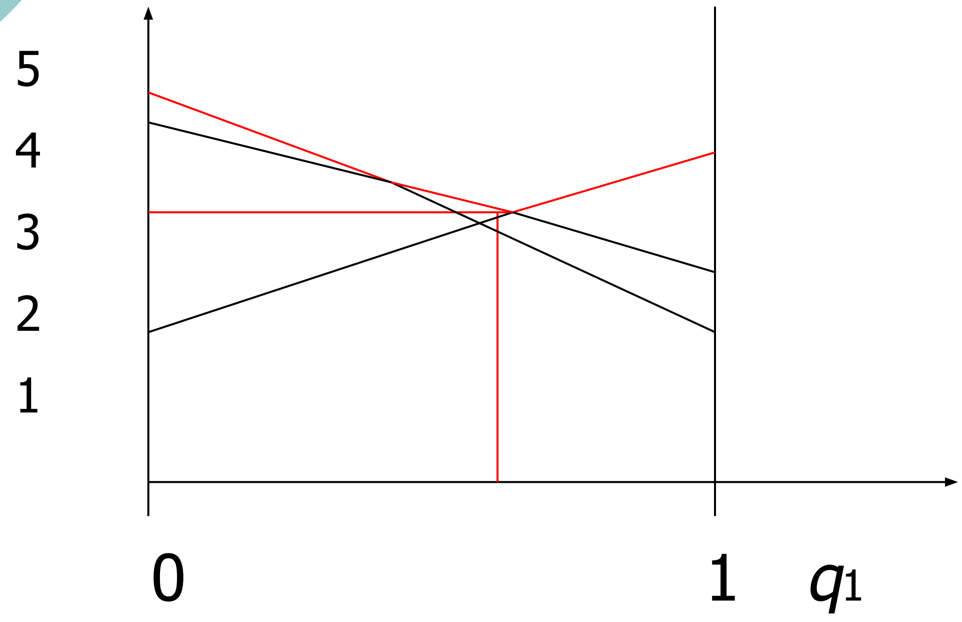
Средний проигрыш 2-го игрока

$v_1=4q_1+2q_2 = 4q_1 +2(1-q_1)= 2+2q_1,$
$v_2=2\ q_1+5q_2= 5-3q_1,$
$v_3=3q_1+4q_2=4-q_1$

Смешанная стратегия 2-го игрока

$(q_1^*, v) \in v_1 \cap v_3 \Rightarrow$

$2+2q_1=4-q_1,$



$q_1^* = \dfrac{2}{3}$

v= 2+2*2/3=**10/3**

Смешанная стратегия 1-го игрока

- Из матрицы A*

$$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} v & 3 \\ v & 4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{v}{10} = \frac{1}{3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ответ: Q=(2/3; 1/3), **v**=10/3, P=(1/3; 0; 2/3).

Решение игр *mxn*

$X=\{x_i\}_m$ – стратегии 1-го игрока
$Y=\{y_j\}_n$ – стратегии 2-го игрока

$P=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ и $Q=(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ – их смешанные стратегии,
причем $\Sigma p_i=1$, $\Sigma q_j=1$.

Первый игрок

Найдем сначала оптимальную стратегию *P*.

Она должна обеспечить выигрыш $\geq \boldsymbol{v}$ при *любой* стратегии противника и $= \boldsymbol{v}$ при его *оптимальном поведении* ***Q***.

Пусть *v>0*

Чтобы это выполнялось, достаточно, чтобы все элементы матрицы $a_{ij} > 0$.

В противном случае можно прибавить ко всем элементам матрицы *A* достаточно большое число ***M***,

тогда цена игры увеличится на M,

а вероятности останутся теми же

$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \geq v \quad \text{для любого } j$$

Введем обозначения: $x_i = p_i / v$, тогда

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \geq 1 \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{v}$$

Выбор должен быть максимально возможным, следовательно, **1/v** принимает минимальное значение.

$$L = \sum_{i=1}^{m} x_i \rightarrow \min$$

Второй игрок

Все аналогично решению игры для первого игрока, только второй игрок стремится не максимизировать, а минимизировать свой проигрыш **ν**, а значит, максимизировать величину **$1/\nu$**.

$$\sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} \le v$$ для любого *i*. для любого *i*.

Заменим $y_j = q_j / v$, тогда

$$\sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij} \le 1 \qquad \Sigma y_j = 1/v$$

Требуется так выбрать переменные y_j, чтобы максимизировать функцию

$$L = \sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{v}$$

или, что то же самое,

минимизировать функцию L'=-L:

$$L' = -\sum_{j=1}^{n} y_j \to \min$$

Симметричные игры

Опр. Квадратная матрица $A=\{aij\}$ называется кососимметричной, если $a_{ij}= - a_{ji}$

для любого ***i***.

Теорема

Значение симметричной игры равно нулю.

Кроме того, если ***x*** – оптимальная стратегия *первого* игрока,

то ***x*** также оптимальная стратегия для *второго*.

т.е. **P=Q**; **v=0.**

Пример

$$
\begin{array}{c}
P1 \\ P2 \\ P3
\end{array}
\begin{pmatrix}
0 & 1 & -2 \\
-1 & 0 & 3 \\
2 & -3 & 0
\end{pmatrix}
$$

По теореме **v=0;**
т.к. P=Q,
то
найдем P.

Средний выигрыш 1-го игрока

$$\begin{cases} -p2+2p3=0 \\ p1 \quad -3p3=0 \\ -2p1+3p2 \quad =0 \\ p1+p2+p3=1 \end{cases}$$

$\rightarrow \quad p2=2p3$

$\rightarrow \quad p1=3p3$

2p3 +3p3 +p3=1

6p3=1; p3=1/6; p2=1/3; p1=1/2

P=Q=(1/2; 1/3; 1/6)

Метод итераций Брауна-Джонсона

Разыгрывается мысленный эксперимент, в котором 1-ый и 2-ой применяют друг против друга свои стратегии:

1) 1-ый – x_i, 2-ой - y_j , который минимизирует $\boldsymbol{a_{ij}}$
2) **...**

Смешанная стратегия

игрока в *разных* случаях имеет *разный* смысл.

Иногда конфликт должен быть разрешен всего за ***один ход*** противников.

Например,

- размещение заказа на разных предприятиях
- установление цены на продукцию
- оснащение производства современным оборудованием
- ведение боевых действий с применением разных стратегий и т.д.

Тактические задачи

- В задачах поиска наилучших способов использования потенциала системы («*тактических*»)

оптимальные смешанные стратегии реализуются путем неожиданных переходов от одного способа действий к другому в соответствии с ***pi и qj.***

Физическая смесь стратегий

- В задачах выбора рациональных параметров *(«технических»)*

  случайный подбор технических показателей *<u>недопустим.</u>*

<u>Физическая смесь стратегий</u> предполагает реализацию **сразу нескольких технических решений**

в определенных пропорциях.

- создание *уникальных* систем;

- строительство *капитальных* сооружений;
- *крупносерийное* производство и
- другие ***долгосрочные*** *мероприятия*, требующие <u>значительных затрат</u>

Модель комплектации вычислительного центра

Предполагается организовать ВЦ коллективного пользования, который может быть оснащен ЭВМ 4-х типов.

На обработку принимаются данные, относящиеся к одному из пяти видов задач:

- календарное планирование;
- распределение материальных ресурсов;
- статистическая отчетность и т.д.

Обработка требует определенного времени, зависящего от характеристик используемой ЭВМ, сложности и объема вычислений и т.д.

Расходы оплачивают заказчики:

	1	2	3	4	5
1	200	400	600	400	700
2	300	400	600	500	800
3	400	500	600	500	800
4	700	300	500	200	100

Цели

1 –ый игрок (организаторы ВЦ)

стремится увеличить приток средств от заказчика за счет ускорения обработки заказов и применения дорогостоящих ЭВМ

2 –ой игрок (заказчики-пользователи)

старается разумно расходовать свои средства (*требования к срокам, корректная постановка, ранжирование задач*)

	1	4	5
3 4	400 700	500 200	800 100

$400p_3+700p_4=v_1=$ $700-300p_3$

$500p_3+200p_4=v_4=$ $200+300p_3$

$800p_3+100p_4=v_5=$ $100+700p_3$

Решение

P=(0; 0; 5/6; 1/6)

v=450

Количество ЭВМ оценивается с помощью методов ТМО

Замечание

Антагонистические игры описывают конфликты весьма частного вида

После того, как с помощью матричной игры оценили **личные стратегические возможности ЛПР** (*1-ый игрок*)

при *полном антагонизме* сторон, целесообразно продолжить исследование ситуации на основе *дополнительной информации* о предпочтениях субъектов

Обоснование решений с использованием **биматричных игр**

- Антагонистические игры не описывают конфликты с числом *сторон* >2.
- Интересы сторон даже с двумя участниками *не обязательно противоположны* $\boldsymbol{f_1 \neq -f_2}$.
- Различие в оценках ситуации оставляет место *для соглашений, договоров и кооперации*
- Для ЛПР *цена игры имеет незначительную ценность.*

Игры двух лиц с произвольной суммой (бескоалиционные)

1-ый игрок: $\{x_i\}_m = X$

2-ой игрок: $\{y_j\}_n = Y$

$A = \{a_{ij}\}$ – выигрыш 1-го

$B = \{b_{ij}\}$ – выигрыш 2-го

- $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$
- $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$

Решение игры

С точки зрения первого игрока его средний выигрыш (*матрица А*) должен быть больше или равен среднему выигрышу ***второго игрока*** *при любой стратегии 2-го*.

Решение игры

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Средний выигрыш первого игрока:

$$Mv_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$$

$$\sum_{j} a_{ij}\, q_j \le \sum_{i}\sum_{j} a_{ij} p_i q_j\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$$ *для любых* i, j

Средний выигрыш **второго** игрока:

$$\mathbf{B}= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & b_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & . & . & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Mv_2} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i q_j$$

$$\sum_{i=1}^{M} \mathbf{b_{ij}} p_i \le \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} \mathbf{b_{ij}} p_i q_j , \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \text{ для любых } \boldsymbol{j}$$

- Существование с.р. в бесхоалиционных играх не определяет их решений
- Однозначные рекомендации для сторон пока отсутствуют

Пример

A= $\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$p_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} v & 1 \\ v & -1 \end{vmatrix}}{8} = \dfrac{-2v}{8}$

$p_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} -10 & v \\ 2 & v \end{vmatrix}}{8} = \dfrac{-12v}{8}$ $V_1 = -4/7$

P=(1/7; 6/7).

Для 2-го игрока

Матрица В содержит выигрыши 2-го игрока, цель которого – тоже *выиграть как можно больше!*

Это равносильно тому, что он играет как первый игрок, т.е.

по транспонированной матрице В

$$\boldsymbol{q1} = \frac{\begin{vmatrix} \nu & -1 \\ \nu & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2\nu}{3}; \quad \boldsymbol{q2} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & \nu \\ -2 & \nu \end{vmatrix}}{3} = \frac{7\nu}{3} \Rightarrow \Rightarrow$$

v= 1/3 ; ***Q=(2/9; 7/9).***

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$$A=\{a_{ij}\},\ B=\{b_{ij}\}$$

$$(A,B)=\{(a_{ij},b_{ij})\}$$

Редко удается предсказать исходы Б. игр

- **Отсутствие связи между платежами сторон (нет влияния сторон друг на друга)**

$\Downarrow$

- **Возможность действовать самостоятельно, независимо**

- **В неантагонистической игре отклонение игрока от с.р. может по-разному повлиять на выигрыш другого**

Теорема Нэша

Каждая биматричная игра имеет по крайней мере *одну* ***ситуацию равновесия.***

Равновесный по Нэшу результат <u>не меньше</u>, чем **максиминный** для каждого игрока

Только *равновесные* ситуации могут быть предметом <u>результативных переговоров</u>

Необходим <u>анализ игры</u> с целью установления таких ситуаций

Пример 1. Переговоры по сокращению объема продукции

$$\begin{array}{ccc} & y_1 & y_2 \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} (0;0) & (10;3) \\ (3;10) & (0;0) \end{pmatrix}} \end{array}$$

Стрелка направляется на **более предпочтительную** альтернативу при фиксированной стратегии конкурента

1 – настаивать на принятии своих предложений

2 – принять предложения конкурента

Если стороны не придут к соглашению, то полезность переговоров = 0

Пример 2. **Переговоры о масштабах сокращения объема продукции**

Альтернативы

1 – выпуск на прежнем уровне;

2 – существенное сокращение выпуска

А. Действенных мер контроля нет

(3;3)	**(10;0)**
(0;10)	(9;9)

В отсутствие контроля

ни одна из сторон не пойдет на <u>сокращение</u> выпуска продукции

Б. Действенные меры контроля

(*разработана система штрафов за нарушение договоренностей)*

	y1	y2
x1	**(3;3)**	(7;0)
x2	(0;7)	**(8;8)**

Игра с предпочтениями:

смешанные стратегии не применяются

Ситуация Равновесия по Нэшу -

схема анализа, когда никакое ***кооперирование*** не допускается.

Если равновесный по Нэшу выигрыш участников не устраивает, то следует начать обмениваться информацией и договариваться о совместном поведении в игре

- Во многих случаях полезны и даже необходимы контакты и соглашения между участниками, поэтому модели, допускающие возможность кооперирования, более предпочтительны

Кооперативная игра

- Разрешено заключать совместные соглашения
- Допускается совместный выбор стратегий
- Допускается передавать полезность от одного игрока к другому

Принцип групповой рациональности

«Справедливый дележ» по Нэшу

«начало отсчета» - (**$v1^*$, $v2^*$**) - минимальный результат, ниже которого игрок не согласится получить ни при каких обстоятельствах

(*наибольший гарантированный результат в антагонистической игре*)

(v1, v2) – согласованный дележ.

$\Delta v1 = v1 - v1^*$, $\Delta v2 = v2 - v2^*$

$$\varphi(v1, v2) = \Delta v1\, \Delta v2 \to \max$$

$$(v1°, v2°): \quad \max_{\{v1, v2\}} \varphi(v1, v2)$$

Мультипликативная целевая функция **φ(v1, v2)** моделирует допустимую компенсацию уменьшения одних значений частных компонентов за счет увеличения других

Если кто-то из игроков не удовлетворен компромиссным решением, он может исследовать свои стратегические возможности

по применению

стратегии угроз

Применение стратегии угроз

(реальная или провозглашенная в качестве возможной альтернатива поведения:

- **склонить противника к мысли, что ему выгоднее пойти на уступки при дележе;**
- **изменить мнение относительно ситуаций конфликта, суждение о пропорциях дележа)**

Эффективность стратегии угрозы

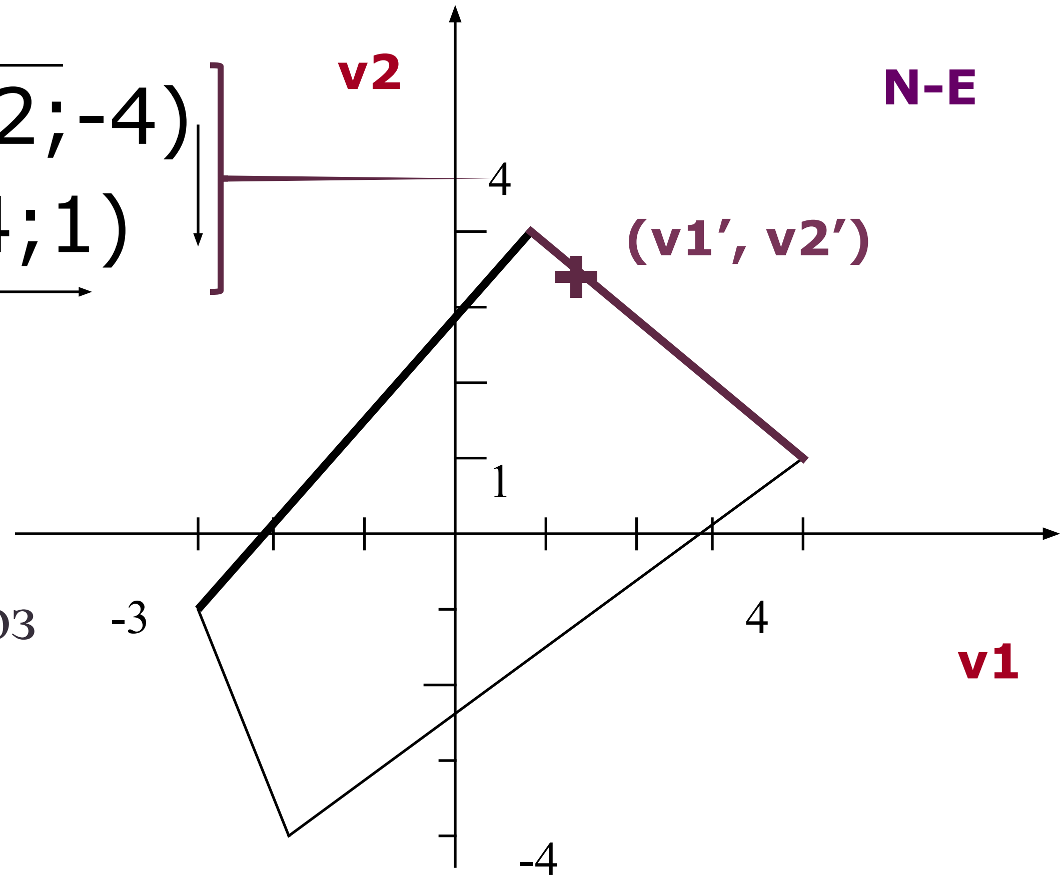
определяется

- **результатом истинного воздействия на физический объект** (изменение состояния объекта)
- **психологическим воздействием на субъекта, которому угрожают** (изменяется мнение о ситуации, о пропорциях дележа и т.д.)
- **правдоподобностью и обдуманностью** (нет сомнений, что угрозу приведут в исполнение)

Пример

$v1+v2=5$

$$\begin{bmatrix} (1;4) & (-2;-4) \\ (-3;-1) & (4;1) \end{bmatrix}$$



Пусть стратегия угроз 1-го – X_2

Тогда 2-ой будет угрожать y_1

($v1'$, $v2'$) – результаты угроз

Ситуация угрозы **(-3;-1)**

$$\varphi(v1,v2)=[v1-(-3)][(5- v1)-(-1)]=- (v1)\uparrow 2+3\ v1+18$$

Решение

$\varphi(v_1, v_2) = -(v_1)\uparrow 2 + 3v_1 + 18$

$\varphi'(v_1) = -2v_1 + 3 = 0$

$v'_1 = 1{,}5;\ v'_2 = 3{,}5$

- **Теория кооперативных игр продолжает развиваться, привлекая к себе внимание исследователей прикладных проблем, в частности, проблем АСОиУ**

- **Противоречия и конфликты, *разрешаемые путем разумных компромиссов,* влияют на характер деятельности сложных систем, стремящихся к совершенствованию**