Принятие решений в условиях нечеткой информации

Теория нечетких множеств

- раздел *прикладной математики*, посвященный методам анализа неопределенных данных, в которых описание неопределенностей реальных явлений и процессов проводится с помощью ***понятия о множествах, не имеющих четких границ***

Нечеткое управление

одна из самых результативных областей применения теории нечетких множеств

Области использования приложений с нечеткой логикой в **Internet:**

- диагностика и восстановление сетевых конфигураций и управление производственными объектами;
- удаленный мониторинг устройств и организация распределенных вычислений;
- всевозможные портативные гиды, доски объявлений с динамически изменяющимися свойствами и гибкой функциональностью;
- интеллектуальные поисковые машины, распределенные системы загрузки и выделения данных

Информация о системе

носит субъективный характер и ее представление в естественном языке содержит большое число неопределенностей типа

- **"много"**,
- **"мало"**,
- **"сильно увеличить"**,
- **"высокий"**,
- **"очень эффективный"** и т.п.

Fuzzy sets Л. Заде

- **Нечеткое множество** - это математическая модель класса с нечеткими, или размытыми границами

Нечеткое множество

- Совокупность элементов, обладающих некоторым *общим свойством*, но … **в разной степени**

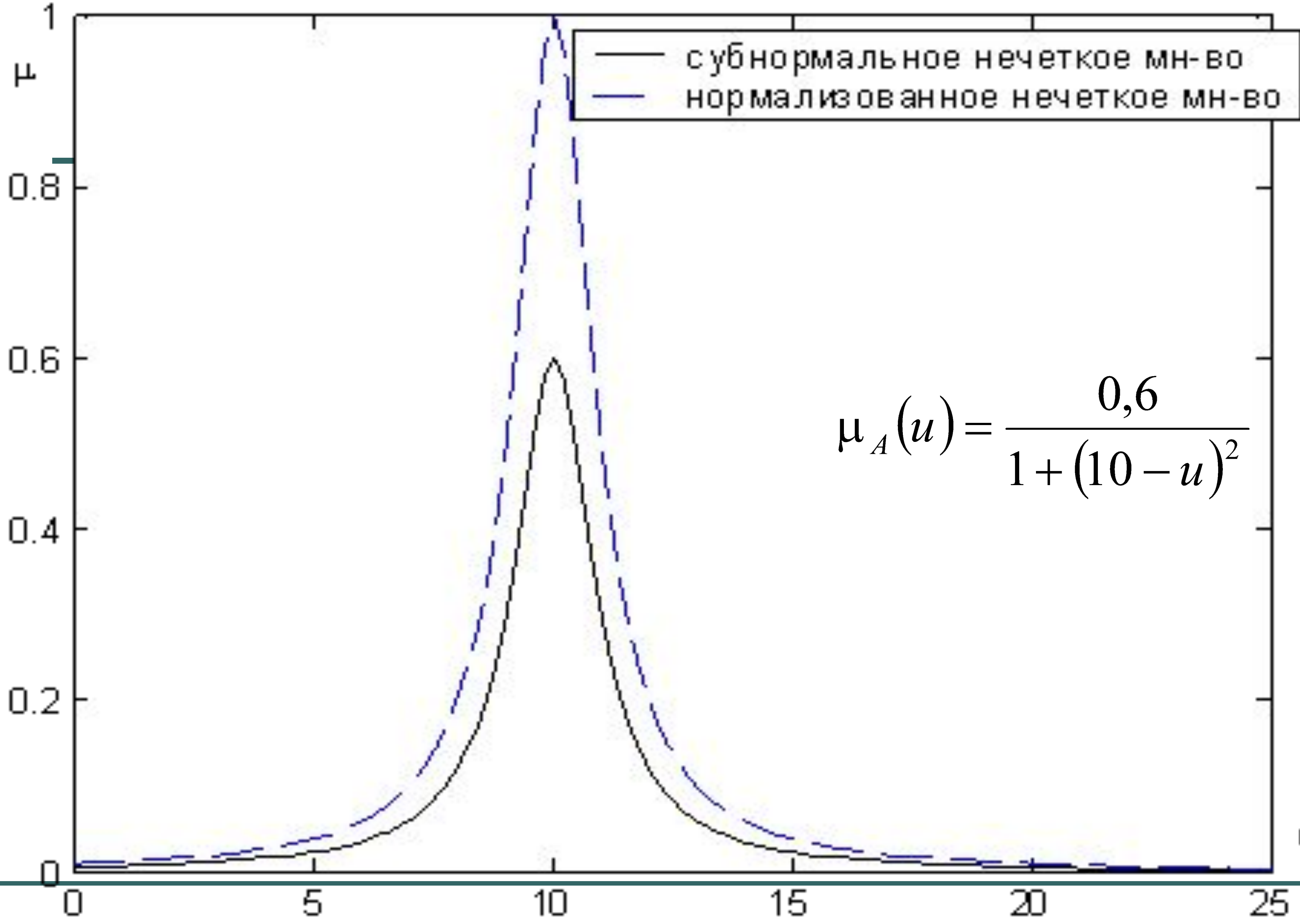
Нечеткое множество A в X

совокупность пар вида

$(x, \mu_A(x))$, где $x \in X$,

$\mu_A : x \rightarrow [0,1]$ – *функция принадлежности* (***membership function***) нечеткого множества *A*

- Значение $\mu_A(x)$ называется степенью принадлежности x нечеткому множеству *A*



$$\mu_A(u) = \frac{0{,}6}{1 + (10 - u)^2}$$

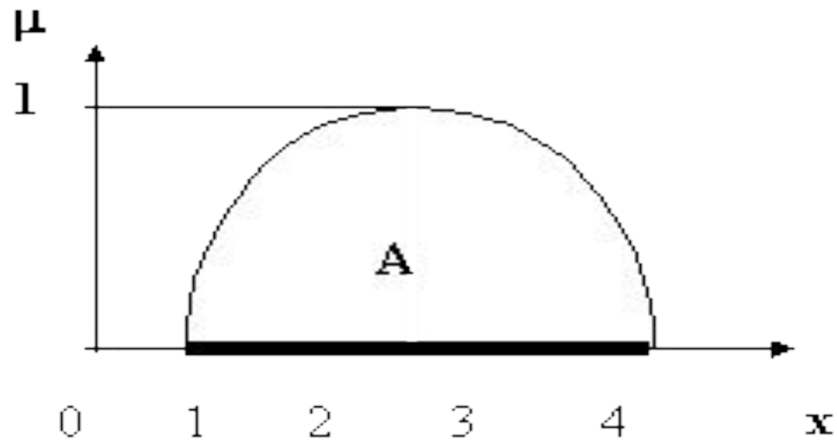
Определения

- $\underline{sup \mu_A(x)}$ называется ***высотой*** нечеткого множества *A*
- Нечеткое множество *A* ***нормально***, если его высота равна **1**, т.е. верхняя граница его функции принадлежности равна **1**
- При sup $\underline{\mu_A(x)}$**<1** нечеткое множество называется ***субнормальным***

Носителем нечеткого множества A (***supp A***) с функцией принадлежности $\mu_A(x)$

называется множество вида

- $suppA=\{x|x\in X,\ \mu_A(x)>0\}$
- Для практических приложений носители нечетких множеств всегда ограничены

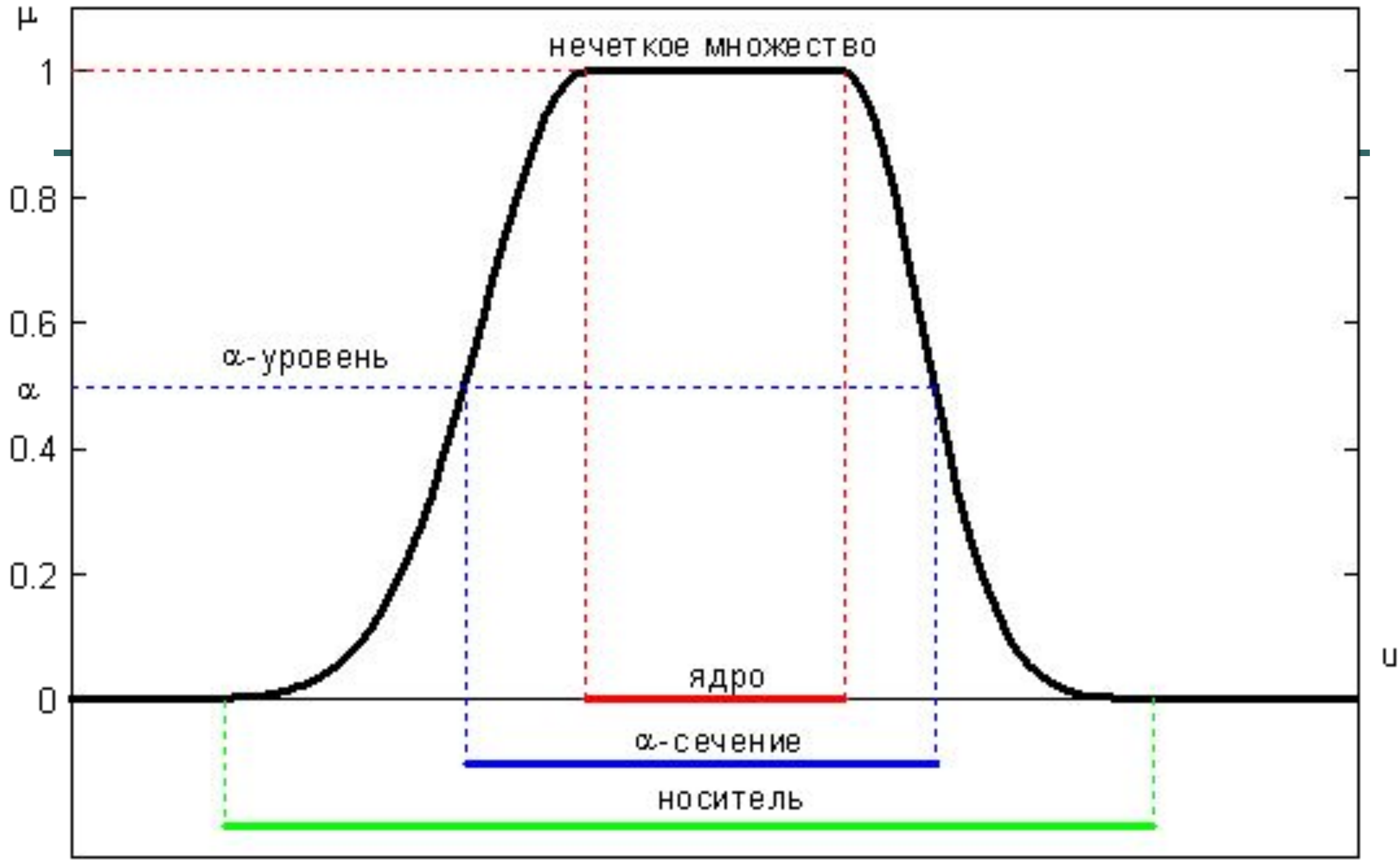


Ядром нечеткого множества

- называется четкое подмножество универсального множества ***U***, элементы которого имеют степени принадлежности, равные единице
- Ядро субнормального нечеткого множества пусто

α-сечением (или множеством α-уровня) нечеткого множества

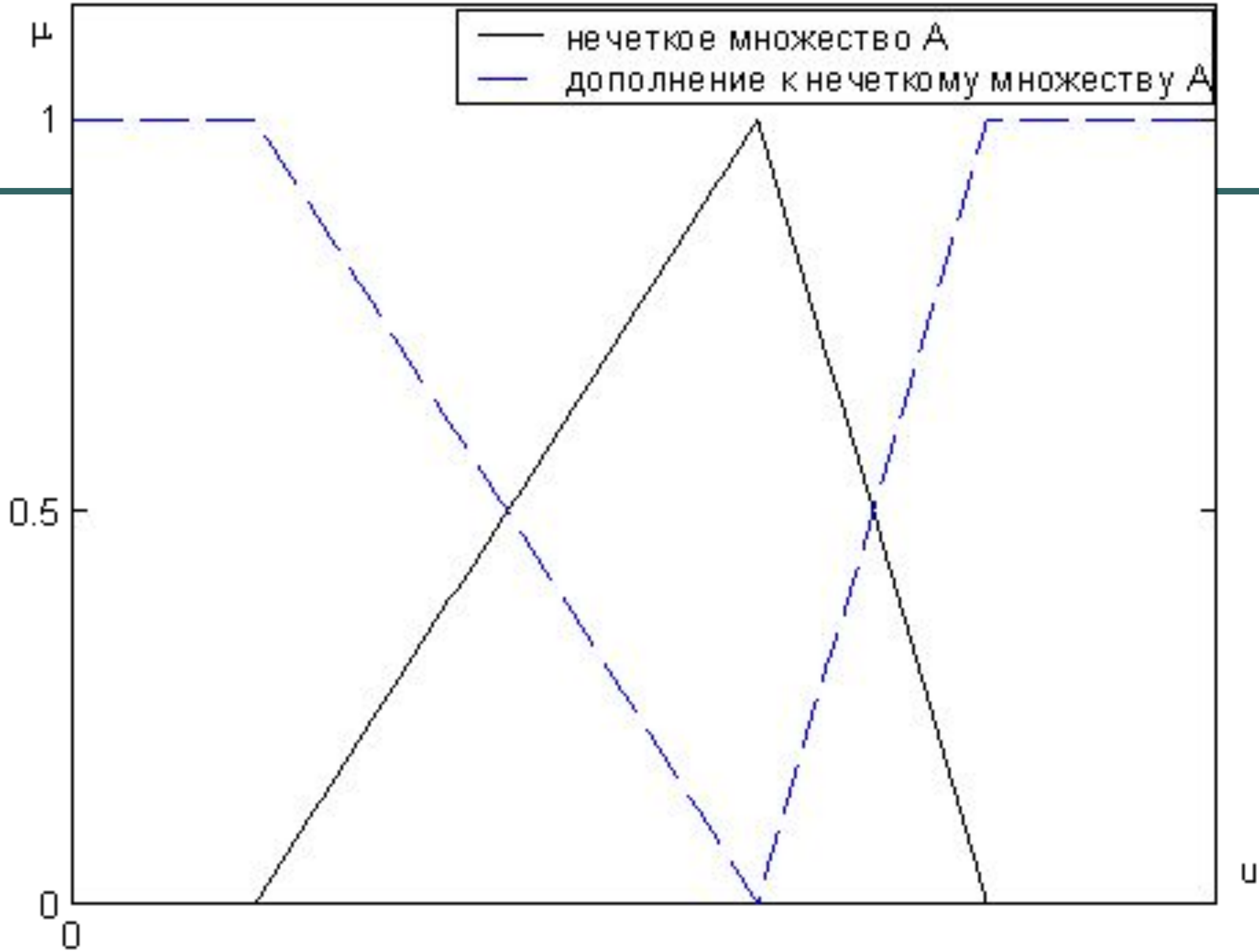
- называется четкое подмножество универсального множества ***U***, элементы которого имеют степени принадлежности, большие или равные **α**:
- $$A_{\alpha} = \{u \mid \mu_A(u) \geq \alpha\}, \alpha \in [0;1]$$


μ
нечеткое множество
1
0.8
0.6
α-уровень
α
0.4
0.2
0
u
ядро
α-сечение
носитель

Операции над нечеткими множествами

- нечеткие множества *A* и *B* равны, если $\mu_A(x)=\mu_B(x)$;
- нечеткое множество *C* является подмножеством *B*, т.е. $C \subset B$, если $\mu_C(x) \le \mu_B(x)$;
- нечеткие множества можно объединять $A \cup B$, тогда $\mu_{A \cup B}(x)= max\ \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$;
- нечеткие множества могут пересекаться $A \cap B$, тогда $\mu_{A \cap B(}x)= min\ \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$;
- 5) прямое произведение нечетких множеств *AxB:* $\mu_{AxB}(x)= \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$;
- 6) алгебраическая сумма *A+B:* $\mu_{A+B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_{AB}(x)$;
- 7) дополнением нечеткого множества *A* называется нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_{\overline{A}}(u)=1-\mu_{\overline{A}}(u)$$



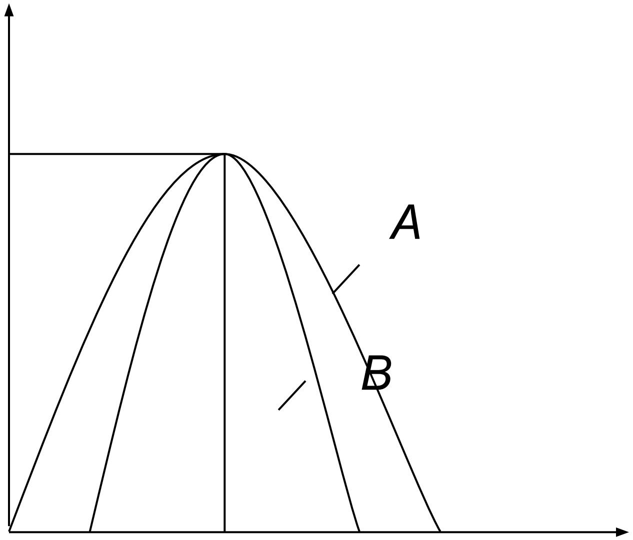
μ
нечеткое множество А
дополнение к нечеткому множеству А
1
0.5
0
0
u

Пример 1.

$suppA$ = { x| величина x близка к **1},**

$suppB$ = {x| величина x очень близка к **1}**

- Ясно, что $B \subseteq A$,
- т.е. μ_A и μ_B должны удовлетворять неравенству
- $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$ при любом $x \in X$.



Примеры записи нечеткого множества

- Пусть $\boldsymbol{X} = \{x\mathbf{1}, x\mathbf{2}, x\mathbf{3}, x\mathbf{4}, x\mathbf{5}\}$,
- $M = [0,1]$;
- A - нечеткое множество, для которого

$\mu_A(x1)=0,3; \mu_A(x2)=0; \mu_A(x3)=1;$

$\mu_A(x4)=0,5;\ \mu_A(x5)=0,9.$

- A = **{0,3/*x*1**; **0/*x*2**; **1/*x*3**; **0,5/*x*4**; **0,9/*x*5 }**,
- или

  A **= 0,3/*x*1 + 0/*x*2 + 1/*x*3 + 0,5/*x*4 + 0,9/*x*5**,
- или

x1	*x*2	*x*3	*x*4	*x*5
0,3	0	1	0,5	0,9

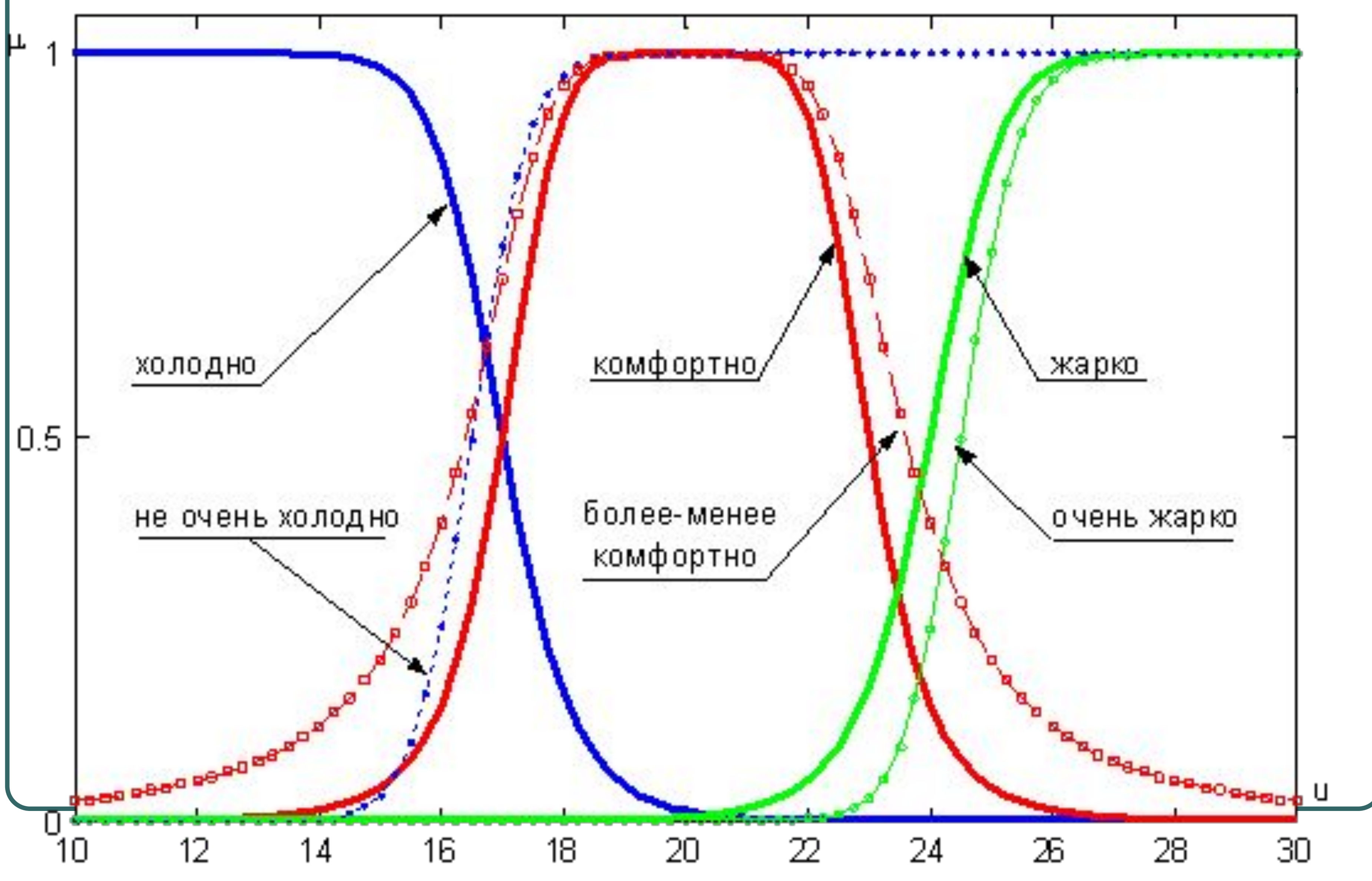
Лингвистические переменные (linguistic variable)

- *Терм–множеством (term set)* называется множество всех возможных значений лингвистической переменной.
- *Термом (term)* называется любой элемент терм–множества. В теории нечетких множеств терм формализуется нечетким множеством с помощью функции принадлежности.
- Например, лингвистическая переменная ***ВОЗРАСТ*** принимает нечеткие значения «***юный***», «***молодой***», «***средний***», «***пожилой***», «***старый***», и т.д., которые являются термами, образующими терм-множество.

Лингвистическая переменная X = "температура в комнате"

- универсальное множество
- U=[5; 35] ;
- терм-множество

T={"холодно", "комфортно", "жарко"}



μ
1
0.5
0
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
u
холодно
комфортно
жарко
не очень холодно
более-менее
комфортно
очень жарко

Пример нечеткого множества

- Пусть ***X*=** {0,1,2,..,10}, M =[0,1]. Нечеткое множество *"несколько"* можно определить следующим образом:
- "***несколько***"={0,5/3+0,8/4+1/5+1/6+0,8/7+0,5/8} его характеристики:
- *высота* **= 1**, *носитель***=**{3,4,5,6,7,8},
- *точки перехода* - {3,8}.

Построение функций принадлежности нечетких множеств

- ***прямые*** и ***косвенные*** методы

прямые методы используются для *измеримых* понятий, таких как

скорость, время, расстояние, давление, температура и т.д., или когда выделяются полярные значения

Шкалы в задаче распознавания образов

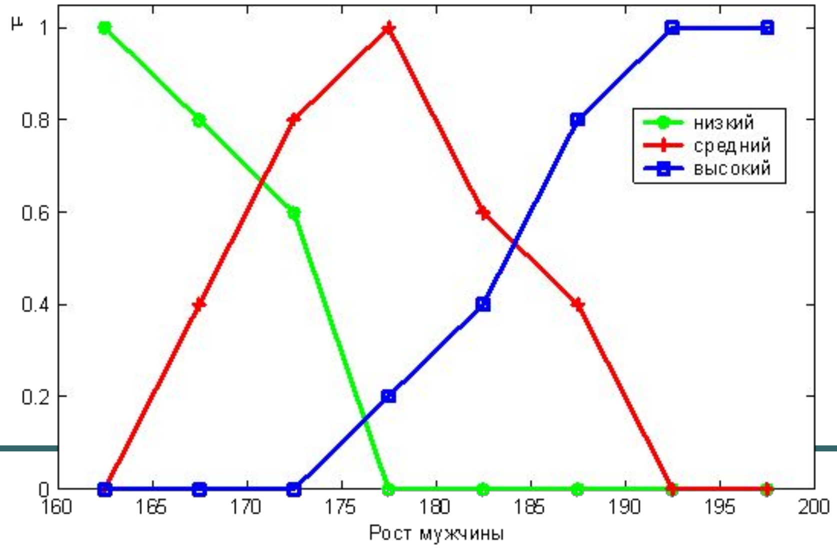
•		**0**	**1**
x_1	высота лба	низкий	широкий
x_2	профиль носа	курносый	горбатый
x_3	длина носа	короткий	длинный
x_4	разрез глаз	узкие	широкие
x_5	цвет глаз	светлые	темные
x_6	форма подбородка	остроконечный	квадратны
x_7	толщина губ	тонкие	толстые
x_8	цвет лица	темный	светлый
x_9	очертание лица	овальное	квадратное

Пример. Построить функции принадлежности значений «низкий», «средний», «высокий», используемых для лингвистической оценки переменной «рост мужчины»

k	Значения	[160, 165)	[165, 170)	[170, 175)	[175, 180)	[180, 185)	[185, 190)	[190, 195)	[195, 200)
Эксперт 1	низкий	1	1	1	0	0	0	0	0
	средний	0	0	1	1	1	0	0	0
	высокий	0	0	0	0	0	1	1	1
Эксперт 2	низкий	1	1	1	0	0	0	0	0
	средний	0	0	1	1	0	0	0	0
	высокий	0	0	0	0	1	1	1	1
Эксперт 3	низкий	1	0	0	0	0	0	0	0
	средний	0	1	1	1	1	1	0	0
	высокий	0	0	0	0	0	1	1	1
Эксперт 4	низкий	1	1	1	0	0	0	0	0
	средний	0	0	0	1	1	1	0	0
	высокий	0	0	0	0	0	0	1	1
Эксперт 5	низкий	1	1	0	0	0	0	0	0
	средний	0	1	1	1	0	0	0	0
	высокий	0	0	0	1	1	1	1	1

Результаты обработки мнений экспертов

Значения	[160, 165)	[165, 170)	[170, 175)	[175, 180)	[180, 185)	[185, 190)	[190, 195)	[195, 200)
низкий	*5*	*4*	*3*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
	1	0.8	0.6	0	0	0	0	0
средний	*0*	*2*	*4*	*5*	*3*	*2*	*0*	*0*
	0	0.4	0.8	1	0.6	0.4	0	0
высокий	*0*	*0*	*0*	*1*	*2*	*4*	*5*	*5*
	0	0	0	0.2	0.4	0.8	1	1



Преобразования нечеткого множества

- *Дефаззификацией (defuzzification)* называется процедура преобразования нечеткого множества в четкое число

Для многоэкстремальных функций принадлежности в ***Fuzzy Logic Toolbox*** запрограммированы методы дефаззификации**:**

- ***Centroid*** - центр тяжести;
- ***Bisector*** - медиана;
- ***LOM*** *(Largest Of Maximums)* - наибольший из максимумов;
- ***SOM*** *(Smallest Of Maximums)* - наименьший из максимумов;
- ***Mom*** *(Mean Of Maximums)* - центр максимумов.

Процедура ***дефаззификации***

аналогична нахождению характеристик положения (математического ожидания, моды, медианы) случайных величин в теории вероятности

Простейшим способом выполнения процедуры ***дефаззификации*** является выбор четкого числа, соответствующего максимуму функции принадлежности

Метод центра тяжести

- ***Дефаззификация*** нечеткого множества

$$\tilde{A} = \int_{[u_1;u_2]} \mu_A(u)/u$$

по методу <u>*центра тяжести*</u> осуществляется по формуле

$$a = \frac{\int_{u_1}^{u_2} u\mu_A(u)du}{\int_{u_1}^{u_2} \mu_A(u)du}$$

Физическим аналогом является нахождение центра тяжести плоской фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции принадлежности нечеткого множества

Для дискретного универсального множества ***дефаззификация*** нечеткого множества

$$\widetilde{A} = \sum_{i=1}^{k} \mu_A(u_i)/u_i$$

по методу **центра тяжести** осуществляется по формуле

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{k} u_i \mu_A(u_i)}{\sum_{i=1}^{k} \mu_A(u_i)}$$

Метод медианы

Дефаззификация нечеткого множества $$\tilde{A} = \int\limits_{[u_1;u_2]} \mu_A(u)/u$$

по методу *__медианы__* состоит в нахождении такого числа ***а***, что

$$\int\limits_{u_1}^{a} \mu_A(u)du = \int\limits_{a}^{u_2} \mu_A(u)du$$

Геометрическая интерпретация метода медианы

- нахождение такой точки на оси абцисс, что перпендикуляр, восстановленный в этой точке, делит площадь под кривой функции принадлежности на две равные части

Для дискретного универсального множества

- ***дефаззификация*** нечеткого множества по методу ***<u>медианы</u>*** осуществляется по формуле

$$a = \min(u_j)\{\forall j \sum_{i=1}^{k} \mu_A(u_i) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \mu_A(u_i)$$

Метод центра максимумов

- ***Дефаззификация*** нечеткого множества

$$\widetilde{A} = \int\limits_{[u_1;u_2]} \mu_A(u)/u$$

по методу *центра максимумов* осуществляется по формуле

$$a = \frac{\int\limits_G u\,du}{\int\limits_G du}$$

где *G* – множество всех элементов из интервала [*u*1;*u*2], имеющих максимальную степень принадлежности нечеткому множеству .

В методе ***центра максимумов*** находится среднее арифметическое элементов универсального множества, имеющих максимальные степени принадлежностей. Если множество таких элементов конечно, то

$$a = \frac{\sum\limits_{u_j \in G} u_j}{|G|}$$

где $|G|$ – мощность множества G.

- В методе центра максимумов находится среднее арифметическое элементов универсального множества, имеющих максимальные степени принадлежности.
- Если множество таких элементов конечно, то

$$a = \frac{\sum\limits_{u_j \in G} u_j}{|G|}$$

- где $|G|$ – мощность множества G.

- В дискретном случае ***дефаззификация*** *по методам* ***наибольшего из максимумов*** и ***наименьшего из максимумов*** осуществляется по формулам
- ***a=max(G)*** и
- ***a=min(G)***

соответственно.

Пример

- Провести дефаззификацию нечеткого множества «***мужчина среднего роста***»,
- для которого нечеткое множество =
- {0/155; 0.1/160; 0.3/165; 0.8/170; 1/175; 1/180; 0.5/185; 0/190}, по методу ***центра тяжести***

{0/155; 0.1/160; 0.3/165; 0.8/170; 1/175; 1/180; 0.5/185; 0/190}

Решение:

- Применяя формулу $a = \frac{\sum_{i=1}^{k} u_i \mu_A(u_i)}{\sum_{i=1}^{k} \mu_A(u_i)}$, получаем:

$$a = \frac{0 \cdot 155 + 0.1 \cdot 160 + 0.3 \cdot 166 + 0.8 \cdot 170 + 1 \cdot 175 + 1 \cdot 180 + 0.5 \cdot 185 + 0 \cdot 190}{0 + 0.1 + 0.3 + 0.8 + 1 + 1 + 0.5 = 0} = 175.4$$

Задача достижения нечетко определенной цели (подход Беллмана-Заде)

- Пусть ***X*** – **универсальное множество альтернатив**,
- т.е. универсальная совокупность всевозможных выборов ЛПР
- **Нечеткой целью** является нечеткое подмножество *X*, которое мы будем обозначать ***G*,**

$$G \subset X$$

Нечеткая цель *G*

- Функция принадлежности нечеткой цели

$$\mu_G\colon X \to [0,1].$$

- Чем больше степень принадлежности альтернативы x нечеткому множеству цели μ_G,

  т.е. чем больше значение $\mu_G(x)$,

- тем больше степень достижения этой цели при выборе альтернативы x в качестве решения.

Пусть некоторая альтернатива $\boldsymbol{x}$ обеспечивает достижение цели со степенью $\mu_G(x)$, удовлетворяет ограничениям со степенью $\mu_C(x)$

- Решить задачу – означает ***достичь цели и удовлетворить ограничениям.***
- Таким образом, нечетким решением задачи достижения нечеткой цели называется **пересечение** нечетких множеств ***цели*** и ***ограничений***,
- т.е. функция принадлежности решений μ_D имеет вид:
- $$\mu_D(x) = \min \{\mu_G(x), \mu_C(x)\}.$$

При наличии нескольких целей и ограничений

- нечеткое решение описывается функцией принадлежности

$$\mu_D(x)=min\{\mu_{G1}(x),\ldots,\mu_{Gn}(x),\mu_{C1}(x),\ldots,\mu_{Cn}(x)\}$$

- Оптимальной в смысле подхода

Беллмана-Заде будет альтернатива x^*,

для которой $\boldsymbol{\mu_D(x)}$ максимальна

$$x^*: \qquad \mu_D(x^*)=\max_{x\in X} \mu_D(x)$$

$\alpha_i \in (0;1)$ - коэффициент относительной важности ***i*-ой** цели,

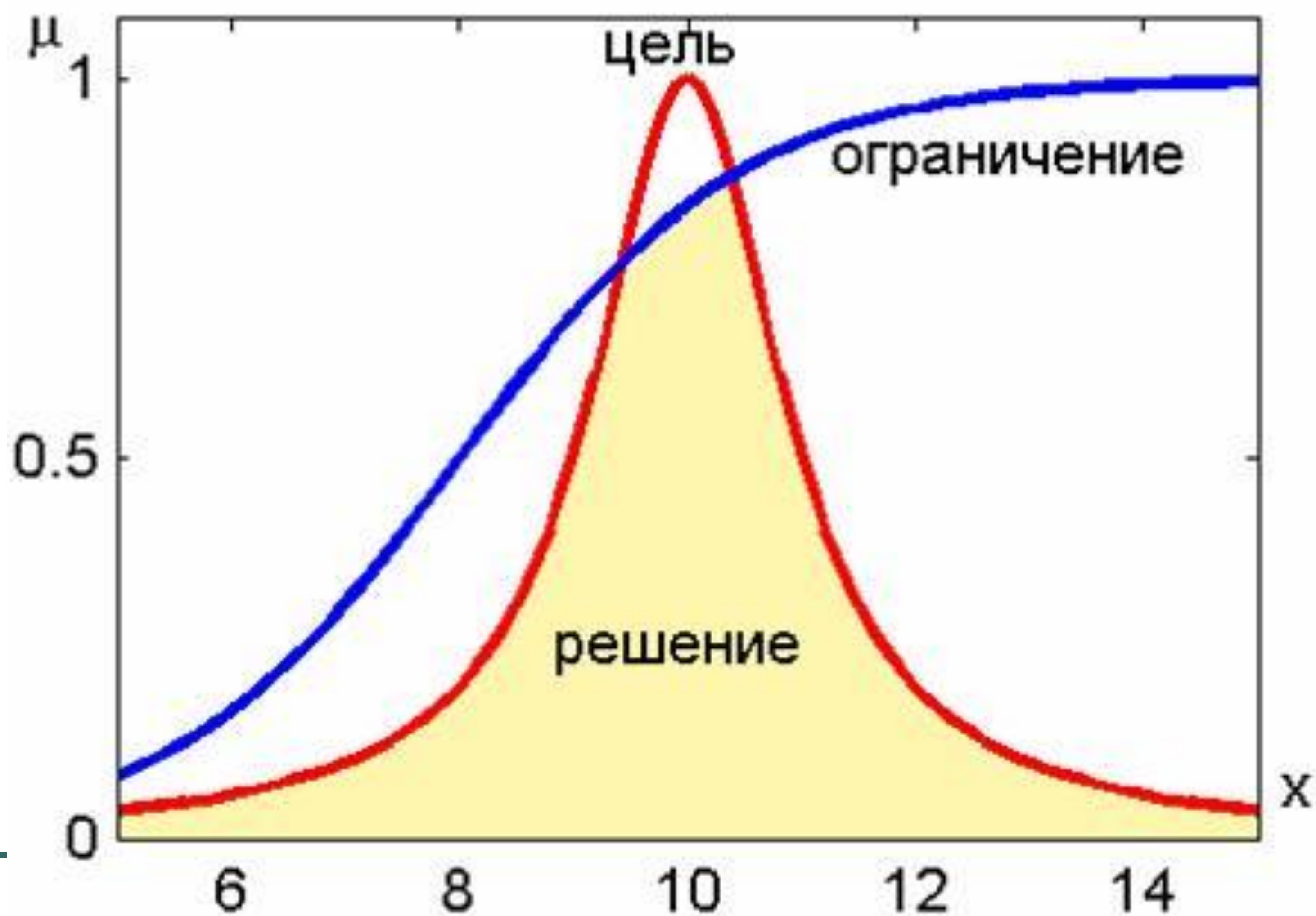
$\beta_j \in (0;1)$ - коэффициент относительной важности ***j*-го** ограничения

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1$$

$$\mu_D(x) = \min\left\{\mu_{G1}^{\alpha 1}(x), \ldots, \mu_{Gn}^{\alpha n}(x), \mu_{C1}^{\beta 1}(x), \ldots, \mu_{Cm}^{\beta m}(x)\right\}$$

G: "x должно быть около **10**" и

C:"x должно быть значительно больше **8**"



- При принятии решения по схеме Беллмана-Заде не делается никакого различия между целью и ограничениями.
- Всякое разделение на цель и ограничения является условным: можно поменять местами цель с ограничением, при этом решение не изменится

Нечеткие решения при различных коэффициентах важности цели и ограничения