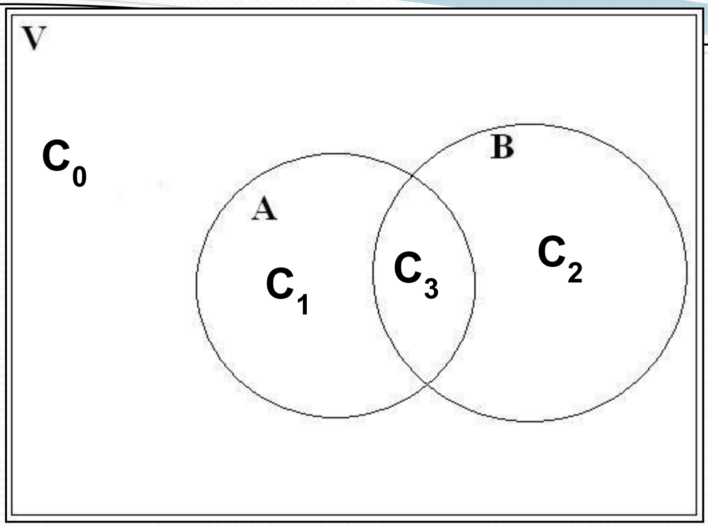
ЛОГИКА БУЛЯ

Булевы переменные и булевы функции



Возвращаясь к диаграмме Эйлера-Венна для двух множеств , с точки зрения логики, вместо одной *предметной* переменной ***x*** удобно ввести две логические переменные **a** и **b**, определяемые областями множеств соответственно **A** и **B**.

Эти переменные могут принимать только два логических значения: **1** – *истина*, т.е. принадлежность множеству, или **0** – *ложь*.

Тогда подмножества C_0, C_1, C_2 и C_3 определят следующие значения логических переменных: C_0 - **a = 0, b = 0**; C_1 - **a = 1, b = 0**; C_2 - **a = 0, b = 1**; C_3 - **a = 1, b = 1**.

Аппарат логики Буля оперирует с логическими (Булевыми) переменными, которые могут принимать только два значения:

0 и **1**.

Логические переменные определяют некую логическую зависимость, которую принято называть ***булевой функцией.***

Множество всех булевых функций и операций над ними образует ***булеву алгебру*** или алгебру логики.

Булевы функции могут принимать тоже только два взаимно исключающих значения **0** и **1**.

Логические величины **0** и **1** нельзя трактовать как числа, над ними нельзя производить арифметические действия, поскольку алгебра логики – это не алгебра чисел, а ***алгебра состояний.***

Основные логические действия соответствуют простейшим операциям над множествами, это:

- ***инверсия***, или отрицание,
- ***дизъюнкция***, или логическое сложение,
- ***конъюнкция***, или логическое умножение.

На основании этих трех логических действий строятся все сколь угодно сложные логические функции.

При этом следует особо выделить функции одной и двух переменных, которые играют в алгебре Буля весьма важную роль.

При помощи этих функций, используя ***принцип суперпозиции,*** можно описать любую логическую функцию любой сложности любого числа переменных.

Принцип суперпозиции заключается в том, что каждый аргумент логической функции может являться функцией других логических переменных, а именно: если есть функция

$$f\{x_1; x_2; x_3\}$$,

то возможно, что

$$x_1 = \varphi(x_4; x_5)$$.

- Булевых функций *одной переменной* всего четыре.
- ***Нулевая (const"0")*** $\Phi = \tilde{O} \wedge \overline{\tilde{O}} = 0$ – значение функции равно нулю, каким бы ни было значение входной переменной.
- ***Инверсия (не)*** $\Phi = \overline{\tilde{O}}$ – значение функции инверсно значению входной переменной.
- ***Повторение (да)*** $\Phi = \tilde{O}$ – значение функции повторяет значение входной переменной.
- ***Единичная (const"1")*** $\Phi = \tilde{O} \vee \overline{\tilde{O}} = 1$ – значение функции равно единице при любом значении входной переменной.

Функции двух переменных

- 1. $Y_1 = a \wedge b; (a \cap b; a \,\&\, b; a \cdot b)$ – *конъюнкция*, логическое «и»;
- 2. $Y_2 = a \vee b; (a \cup b; a + b)$ – *дизъюнкция*, логическое «или»;
- 3. $Y_3 = a / b; (\overline{a \wedge b}; \overline{a \cdot b})$ – *штрих Шеффера*, логическое «и-не»;
- 4. $Y_4 = a \downarrow b; (\overline{a \vee b}; \overline{a + b})$ – *стрелка Пирса* (функция Вебба), логическое «или - не»;
- 5. $Y_5 = a \leftarrow b; (a \wedge \overline{b}; a \cdot \overline{b})$ – *запрет* **b**, «**a**, но не **b**»
- 6. $Y_6 = a \rightarrow b; (\overline{a} \vee b; \overline{a} + b)$ – *импликация* **b**, «если **a**, то **b**»

- 7. $Y_7 = b \leftarrow a\ ;(\bar{a} \wedge b; \bar{a} \cdot b)$ - ***запрет*** **a**,
  «**b**, но не **a**»
- 8. $Y_8 = b \rightarrow a\ ;(a \wedge \bar{b}; a + \bar{b})$ - ***импликация*** **a**,
  «если **b**, то **a**»
- 9. $Y_9 = a \equiv b;((a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}));((a \cdot b) + (\bar{a} \cdot \bar{b}))$
  - ***эквивалентность***, равнозначность
- 10. $Y_{10} = a \oplus b\ ;((a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b));((a \cdot \bar{b}) + (\bar{a} \cdot b))$
  - ***неравнозначность***, «сумма по модулю 2».

- Из всех функций *двух переменных* десять являются самостоятельными и зависят как от переменной **a**, так и от переменной **b**.
- Притом функции $\mathbf{Y_5}$, $\mathbf{Y_6}$ отличаются от соответствующих им $\mathbf{Y_7}$, $\mathbf{Y_8}$ лишь порядком расположения аргументов.
- Таким образом, лишь восемь из 16-ти булевых функций двух переменных являются оригинальными.

Постулаты (аксиомы) логики Буля

- Если $x \neq 1$, то $\bar{\delta} = 0$; если $x = 0$, то $\bar{\delta} = 1$ (аксиома взаимоисключения);
- $\mathbf{0 \wedge 0 = 0;\ 0 \vee 0 = 0;}$
- $\mathbf{0 \wedge 1 = 0;\ 0 \vee 1 = 1;\ (1 \wedge 0 = 0;\ 1 \vee 0 = 1);}$
- $\mathbf{1 \wedge 1 = 1;\ 1 \vee 1 = 1;}$
- $\bar{0} = 1$; $\bar{1} = 0$ (инверсии);
- $\bar{\bar{0}} = 0$; $\bar{\bar{1}} = 1$ (двойной инверсии).

В качестве основных законов алгебры Буля чаще других используют следующие :

1. *Нулевого множества:*

$$\mathbf{0 \wedge a = 0; \quad 0 \wedge a \wedge b \wedge \ldots \wedge x = 0; 0 \vee a = a}$$

2. *Универсального множества*:

$$\mathbf{1 \wedge a = a; \quad 1 \vee a = 1; \quad 1 \vee a \vee b \vee c \vee \ldots \vee x = 1;}$$

3. *Идемпотентности* (повторения):

$$\mathbf{a \vee a \vee a \vee \ldots \vee a = a; \quad a \wedge a \wedge a \wedge \ldots \wedge a = a;}$$

4. *Дополнительности* (противоречия):

$$\mathbf{a \wedge \square a = 0; \quad a \vee \square a = 1;}$$

5. *Двойной инверсии*: $\bar{\bar{a}} = a$;

6. *Коммутативности*(переместительный):

$$\mathbf{a \lor b = b \lor a; \qquad a \land b = b \land a;}$$

7. *Ассоциативности* (сочетательный):

$$\mathbf{a \lor (b \lor c) = (a \lor b) \lor c;}$$

$$\mathbf{a \land (b \land c) = (a \land b) \land c;}$$

8. *Дистрибутивности* (распределительный):

$$\mathbf{a \land (b \lor c) = (a \land b) \lor (a \land c);}$$

9. *Поглощения*:

$$\mathbf{a \lor (a \land b) = a; \; a \land (a \lor b) = a;}$$

10. *Склеивания*:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) = a; \quad (a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) = a;$$

$$a \wedge (\neg a \vee b) = a \wedge b; \quad a \vee (\neg a \wedge b) = a \vee b;$$

11. *Инверсии* (теорема де-Моргáна):

$$\overline{a \wedge b \wedge c} = \neg a \vee \neg b \vee \neg c;$$

$$\overline{a \vee b \vee c} = \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c;$$

12. *Теорема Шеннона*: для того, чтобы получить инверсию некоторой ФАЛ, необходимо взять инверсии переменных и заменить операции дизъюнкции на конъюнкции и наоборот:

если существует $Y = f\,(a,b,c,\dots,x, \wedge, \vee)$,

то $\overline{Y} = f\,(\overline{a},\overline{b},\overline{c},\dots,\overline{x}, \wedge, \vee)$.

13. *Разложения*:

$$\mathbf{f\,(a,\ b,\ c,\dots,\ x) =}$$

$$\mathbf{[a \wedge f\,(1,b,c,\dots,x)] \vee [\square a \wedge f\,(0,b,c,\dots,x)]};$$

$$\mathbf{f\,(a,\ b,\ c,\dots,\ x) =}$$

$$\mathbf{[a \vee f\,(0,b,c,\dots,x)] \wedge [\square a \vee f\,(1,b,c,\dots,x)]}.$$

Законы и теоремы булевой алгебры необходимы для преобразования и упрощения логических функций, для доказательства тождественности и равносильности функций, а также для представления булевых функций в различных формах.

Формы представления булевых функций

Элементарная конъюнкция (дизъюнкция) – это логическое произведение (сумма) любого числа независимых логических переменных, входящих в нее с инверсией или без инверсии не более одного раза. Число входных переменных называется рангом элементарной конъюнкции (дизъюнкции).

Соседними называются элементарные конъюнкции (дизъюнкции) одного и того же ранга, содержащие одни и те же переменные, но отличающиеся знаком инверсии одной из переменных.

- Дизъюнкция любого числа элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ), например:

(□a ∧ b ∧□c)∨(□b ∧ c)∨ □d или **□a b□c +□b c +□d .**

- Конъюнкция любого числа элементарных дизъюнкций называется *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ), например:

(a ∨ b ∨ □c) ∧ (□a ∨ □c ∨ d) ∧ (□b ∨ □d)

или **(a + b + □c) (□a +□c + d) (□b +□d)**

(далее для упрощения восприятия булевых функций будем использовать второй вид записи)

- Теоремы разложения можно применить ко всем переменным, определяющим булеву функцию, тогда, например, используя первую теорему разложения для функции трех переменных **f(a,b,c)**, получим:

$$\mathbf{f(a,b,c) = a \cdot b \cdot c \cdot f(1,1,1) + \square a \cdot b \cdot c \cdot f(0,1,1) + a \cdot \square b \cdot c \cdot f(1,0,1) + a \cdot b \cdot \square c \cdot f(1,1,0) + \square a \cdot \square b \cdot c \cdot f(0,0,1) + \square a \cdot b \cdot \square c \cdot f(0,1,0) + a \cdot \square b \cdot \square c \cdot f(1,0,0) + \square a \cdot \square b \cdot \square c \cdot f(0,0,0)}.$$

Нетрудно заметить, что по закону нулевого множества элементы с нулевым значением функции обратятся в ноль и останутся лишь наборы переменных при единичном значении функции, которые далее будем называть ***конституентами*** разложения единицы, или ***минтермами***.

Разложения функции на конституенты нуля:

f(a,b,c)=[a + b + c + f(0,0,0)]·[□a + b + c + f(1,0,0)]·[a+□b +c + f(0,1,0]·[a + b+□c +f(0,0,1)]·[□a +□b +c + f(1,1,0)] ·[□a + b +□c +f(1,0,1)]·[a+□b +□c + f(0,1,1)] ·[□a +□b +□c f(1,1,1)].

Здесь, по закону универсального множества, каждая элементарная дизъюнкция с единичным значением функции принимает также единичное значение, и в результате остаются только те дизъюнкции переменных, инверсные значения которых определяют нулевое значение функции. Эти дизъюнкции называются ***конституентами*** разложения нуля, или ***макстермами***.

Раскладывая булевы функции на конституенты, мы получаем совершенные формы представления функций. Таким образом, ***совершенной дизъюнктивной формой (СДНФ)*** называется дизъюнкция конституентов единицы (минтермов), а ***совершенной конъюнктивной формой (СКФ)*** конъюнкция конституентов нуля (макстермов).

Для перехода из ДНФ в СДНФ необходимо следующее:

1. Ввести недостающие переменные в каждую конъюнкцию умножением ее на дополнительность вида (**x** +□**x**), где **x** – недостающая переменная.

2. Раскрыть скобки.

3. Избавиться от повторяющихся конъюнкций на основании закона повторения.

Например: Y =□a ·□b ·□c + b · c +□a =□a ·□b ·□c + b·c ·(a +□a) + ·(b +□b)·(c +□c) =□a ·□b ·□c + a · b · c +

□<u>a · b · c</u> +□<u>a · b · c</u> +□a ·b · □c +□a ·□b ·c +□a ·□b ·□c =□**a** ·□**b** ·□**c** + **a** · **b** · **c** + □**a** ·**b** · **c** +□**a** ·**b**·□**c** +□**a** ·□**b** ·**c** +□**a** ·□**b** ·□**c.**

Алгоритм перехода из КНФ в СКНФ

1. Ввести недостающие переменные в каждую дизъюнкции, используя закон дополнительности **x · □x = 0**, где **x** – недостающая переменная.
2. Произвести преобразования, используя законы ассоциативности и дистрибутивности:

a + (b · c) = (a + b) · (a + c).

3. Избавиться от повторяющихся дизъюнкций на основании закона повторения.

Например:

Y = (a+b+c)·(□a +□b)· □a = (a+b+c)·(□a +□b + c·□c) (□a + b ·□b + c·□c) = (a + b + c)·(□a +□b + c)· (□a +□b +□c)·(□a + b + c·□c)(□a + □b + c·□c) = (a+b+c)· (□a +□b + c) ·(□a +□b +□c)

(□a + b + c)·(□a +b+□c)~~· (□a +□b + c)~~ ·(□a +□b +□c) = **(a + b + c)·(□a +□b + c)·(□a +□b +□c)·(□a + b + c)·(□a + b +□c).**

Одной из самых распространенных форм представления булевых функций является ***таблица истинности*** (таблица состояний).Пример – табл.1. Функция является *полностью определённой*, если для любого набора входных переменных известны её значения (**0** или **1**).

Для того чтобы представить полностью определённую функцию, достаточно задать ее *единичные* (рабочие) наборы или *нулевые* (запрещенные).

Таблица 1

a	**b**	**Y = a ∧ b**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Булева функция является *не полностью определённой*, если есть один или несколько наборов переменных, при которых значение функции не определено (может быть и **0,** и **1)** или функция не существует.

Таблица 2

Переменные				Функция	Десятичный эквивалент
a	**b**	**c**	**d**	**Y**	
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	2
0	0	1	1	1	3
0	1	0	1	1	5
0	1	1	1	0	7
1	0	0	0	1	8
1	0	0	1	0	9
1	1	0	1	0	13
1	1	1	1	0	15

Такие значения функции называются ***фиктивными*** (**Ф**). Пример задания не полностью определенной функции представлен в табл. 2.

Десятичное число, соответствующее двоичному набору логических переменных, называется ***десятичным эквивалентом***. Таким образом, булеву функцию можно представить с помощью десятичных эквивалентов:

$\mathbf{Y_1 = \{ 0,1,3,5,8\}}$; $\mathbf{Y_0 = \{2,7,9,13,15\}}$.

Оставшиеся наборы, не заданные таблицей истинности, по всей вероятности, будут фиктивными $\mathbf{Y_Ф = \{4,6,10,11,12,14\}}$.

По таблице истинности можно получить совершенные формы записи булевых функций. Так, для записи в виде СДНФ нужно из таблицы выбрать единичные наборы переменных, представить их в виде конституентов единицы и произвести их дизъюнкцию.

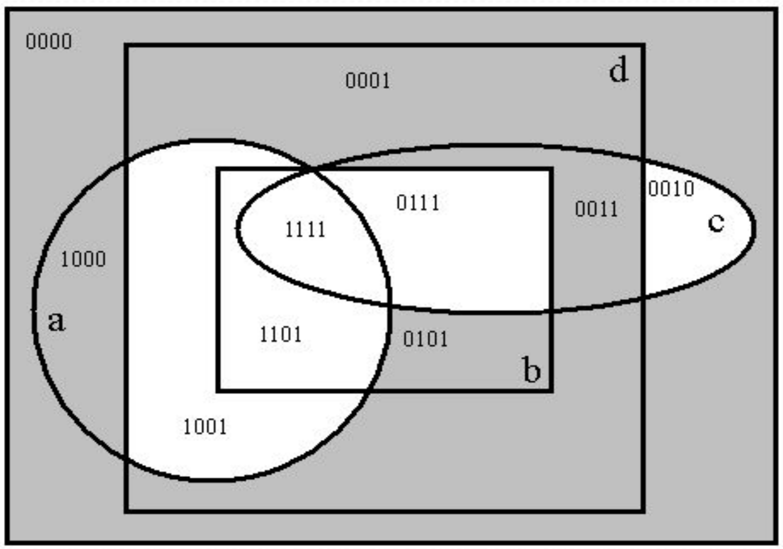
СДНФ: **Y =□a□b□c□d + □a□b□c d +□a□b c d +□a b□c d + a□b□c□d .**

Для записи в форме СКНФ нужно выбрать из таблицы нулевые наборы переменных, проинвертировать переменные в каждом из этих наборов, представить в виде конституентов нуля и произвести их конъюнкцию.

СКНФ: **Y=(a + b+□c + d)(a+□b +□c +□d)(□a + b + c +□d)(□a +□b + c +□d)(□a +□b +□c +□d).**

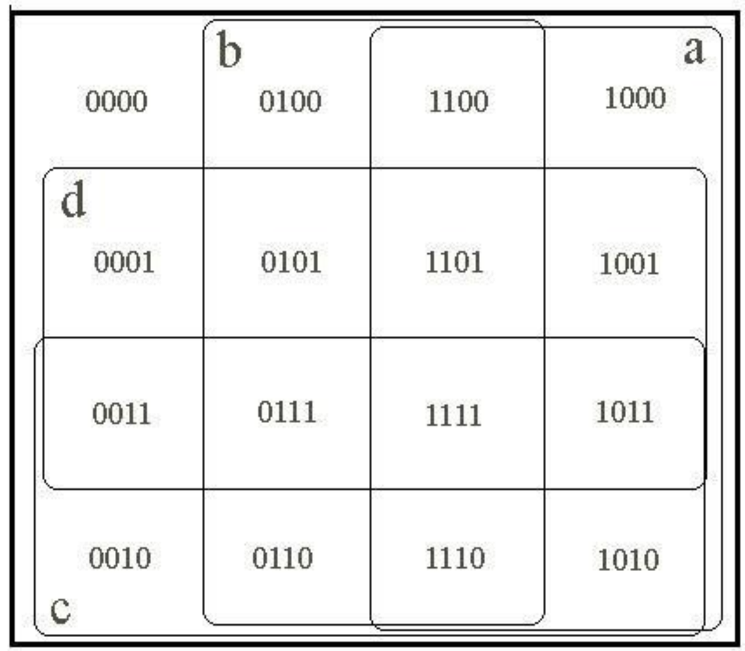
Аналогично можно составить СДНФ и СКНФ по десятичным эквивалентам, определяющим булеву функцию.

Число единиц в таблице истинности всегда будет совпадать с числом заштрихованных областей на диаграмме Эйлера-Венна. Если же функция имеет фиктивные состояния, тогда в этой диаграмме соответствующие области должны отсутствовать. Таким образом, по таблице истинности можно построить для заданной функции диаграмму Эйлера-Венна, а также можно поставить обратную задачу, т.е. по диаграмме составить совершенные формы представления булевой функции.



- Матрица Карно представляет собой специально организованные таблицы соответствия, обладающие тем замечательным свойством, что любые две соседние клетки матрицы определяют *«соседние»* наборы переменных, т.е. наборы, отличающиеся значением только одной переменной. Клетки, расположенные по краям матрицы, также являются соседними и обладают этим свойством. Это достигается благодаря кодированию столбцов и строк матрицы специальным циклическим ***кодом Грея.***

Еще одним свойством матриц Карно является то, что при увеличении количества переменных на единицу, матрица увеличивается вдвое, поскольку число клеток матрицы определяется показательной функцией «2^n».



Матрицы Карно для разного числа переменных

b \ a	0	1
0	0	1
1	1	0

c \ a,b	00	01	11	10
0		1	1	0
1	1	1	0	0

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1	0	0
11	1	0	0	
10	0			

d,f \ a,b,c	000	001	011	010	110	111	101	100
00		1			1	1		
01	0	1	0	1	1		0	0
11			0			0	0	
10		1				1	1	

На рисунке показаны соответственно матрицы Карно для двух, трех, четырех и пяти переменных.

Вопросы???