Геометрический метод решения задач ЛП

Графически могут решаться

- задачи, заданные в произвольной форме, содержащие не более двух переменных,

Графически могут решаться

- задачи, заданные в произвольной форме, содержащие не более двух переменных,
- задачи, заданные в канонической форме, с числом свободных переменных $n - m \le 2$,

Графически могут решаться

- задачи, заданные в произвольной форме, содержащие не более двух переменных,
- задачи, заданные в канонической форме, с числом свободных переменных $n - m \le 2$,
- задачи, в произвольной форме записи, которые после приведения к канонической форме будут содержать не более двух свободных переменных $n - m \le 2$.

Этапы графического решения задачи ЛП

- **Этап 1** – построение области допустимых решений.
- **Этап 2** – построение в допустимой области оптимального плана

Рассмотрим реализацию метода на следующем примере:

$$f(x) = 2x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 \leq 3 \end{cases}$$

Построение области допустимых решений

- Заменяя каждое ограничение равенствами, построим прямые .

Построение первой прямой

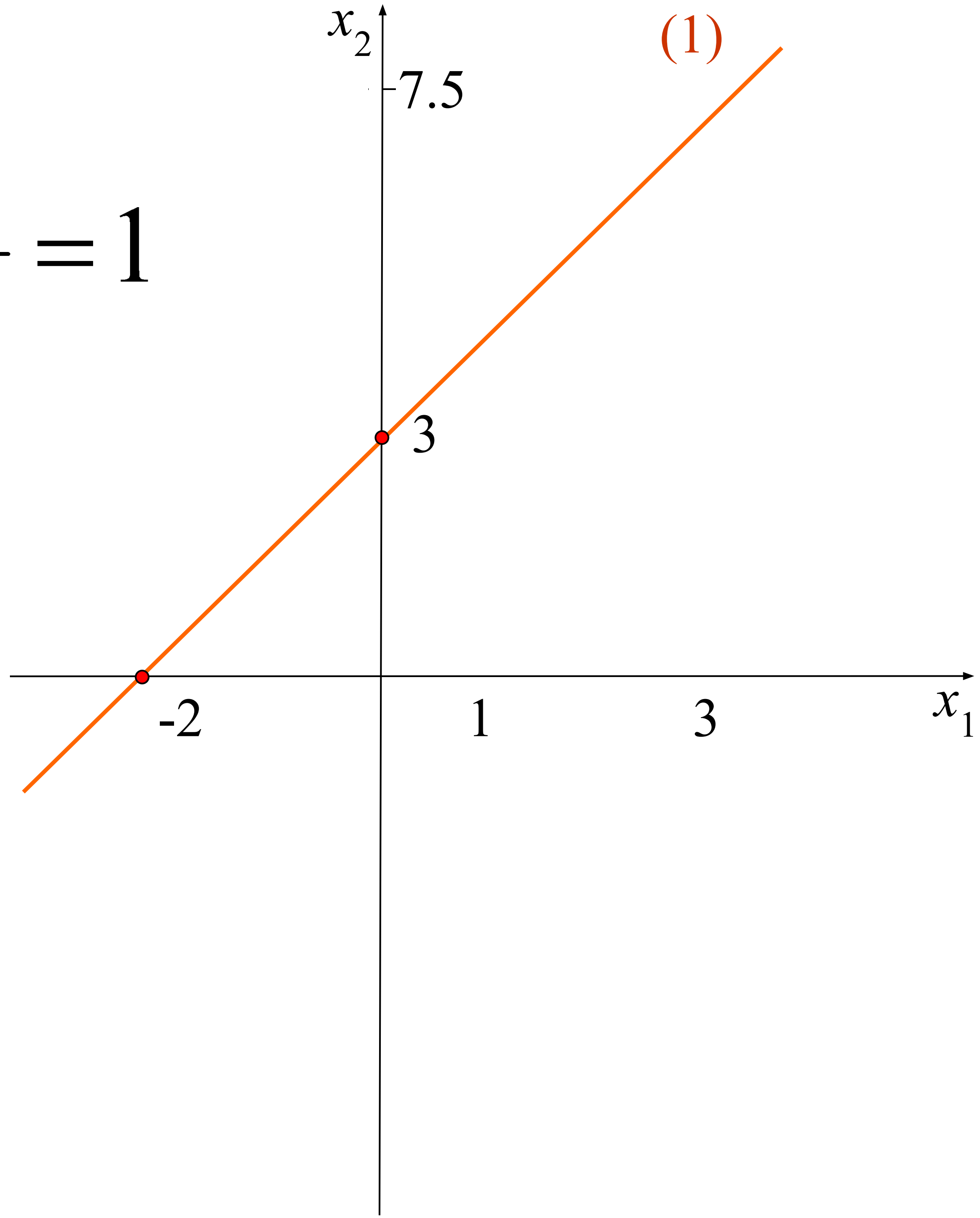
$$(1)\ 3x_1 - 2x_2 = -6$$

Построение первой прямой

(1) $3x_1 - 2x_2 = -6$

$$\frac{x_1}{-2} + \frac{x_2}{3} = 1$$

$$\frac{x_1}{-2} + \frac{x_2}{3} = 1$$



Построение второй прямой

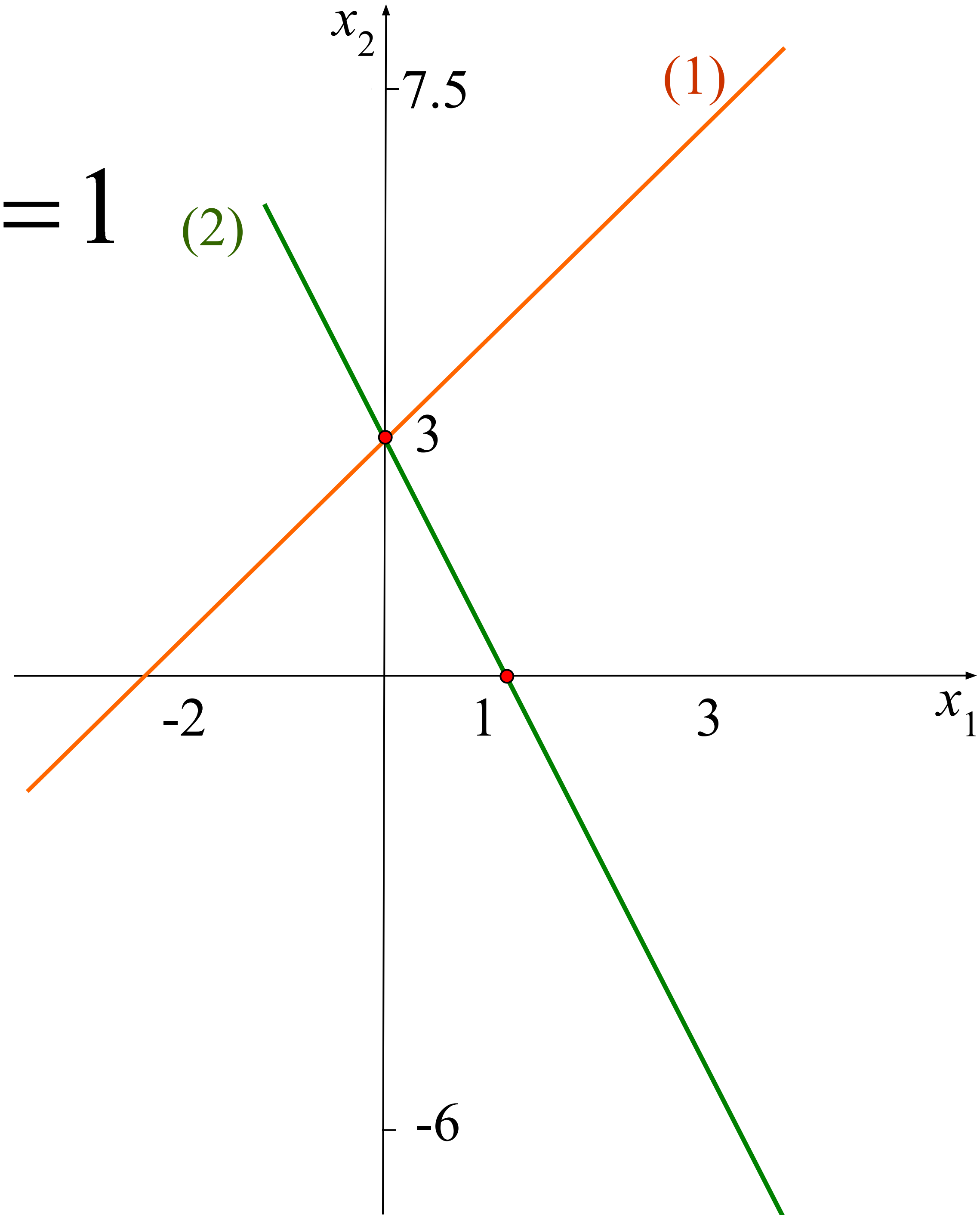
$(2)\ 3x_1 + x_2 = 3$

Построение второй прямой

$$(2)\ 3x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 + \frac{x_2}{3} = 1$$

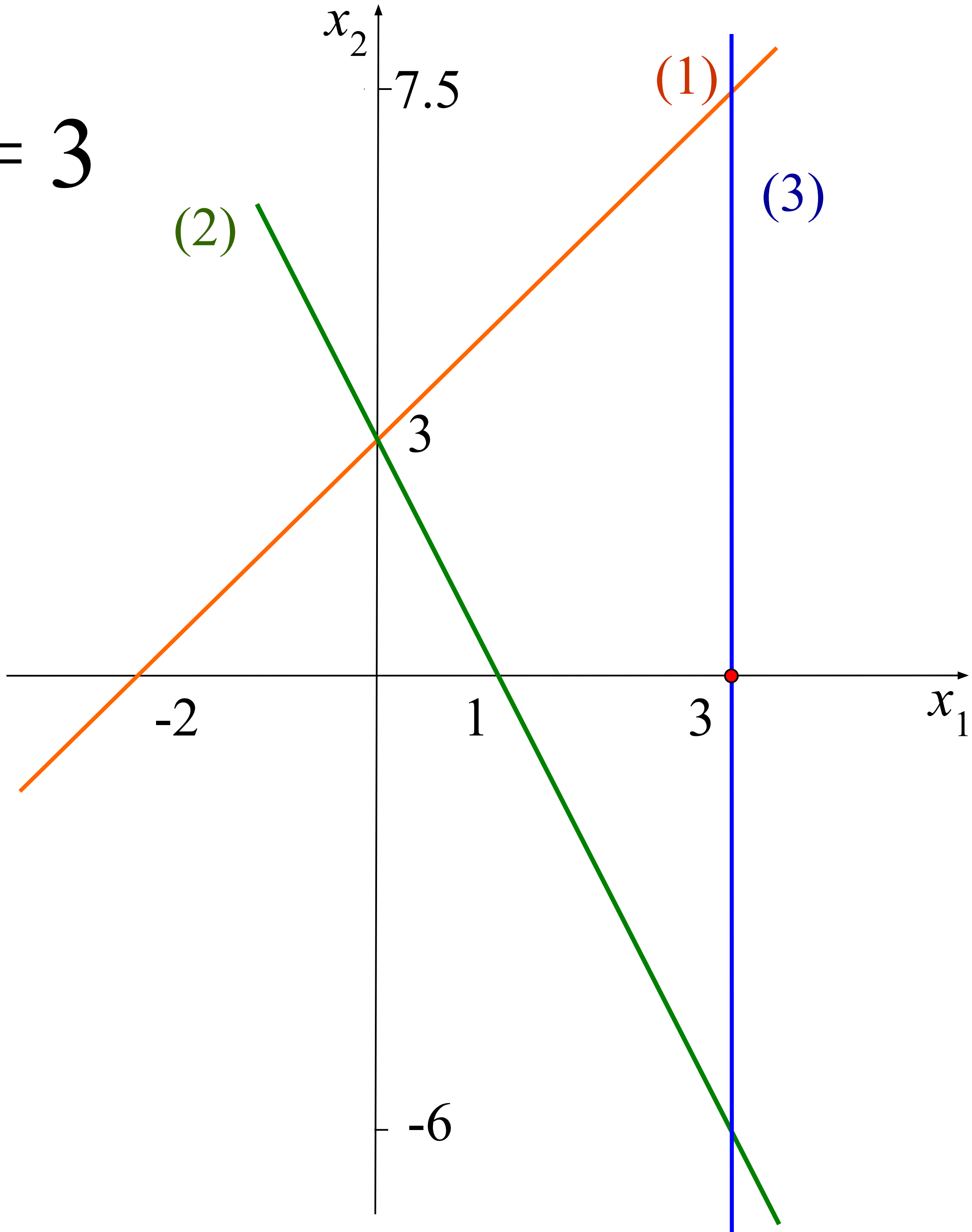
$$x_1 + \frac{x_2}{3} = 1$$



Построение третьей прямой

(3) $x_1 = 3$

(3) $x_1 = 3$



Построение первой полуплоскости

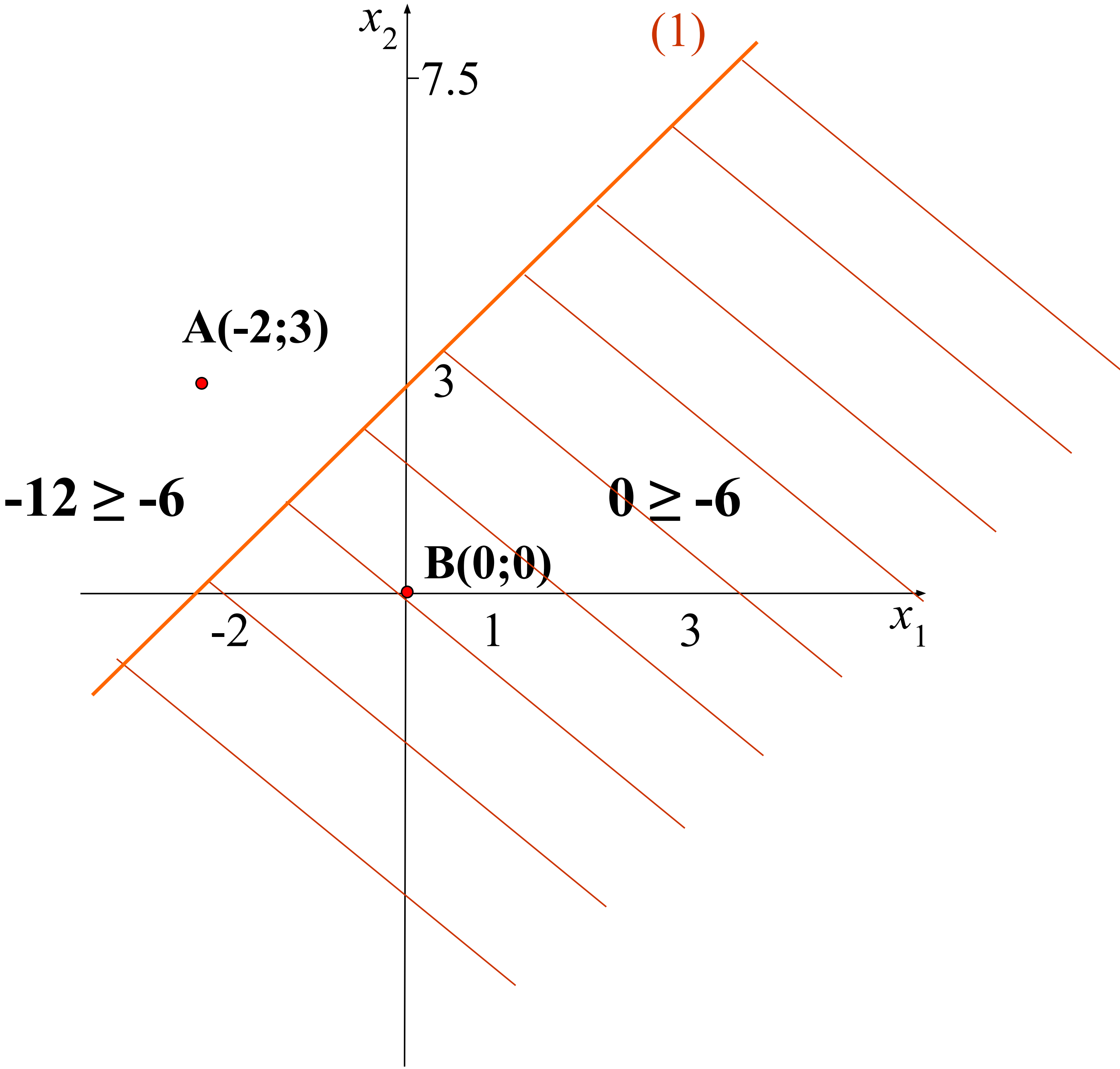
- По знакам неравенств определим область решений задачи.

Построение первой полуплоскости

$$(1)\ 3x_1 - 2x_2 \geq -6$$

Выбираем точки **A(-2; 3)** и **B(0;0)**, принадлежащие разным полуплоскостям.

A(-2; 3)	**B(0; 0)**
$3\cdot(-2) - 2\cdot 3 \geq -6$	$3\cdot 0 - 2\cdot 0 \geq -6$
$-12 \geq -6$	$0 \geq -6$
(неверно)	(верно)



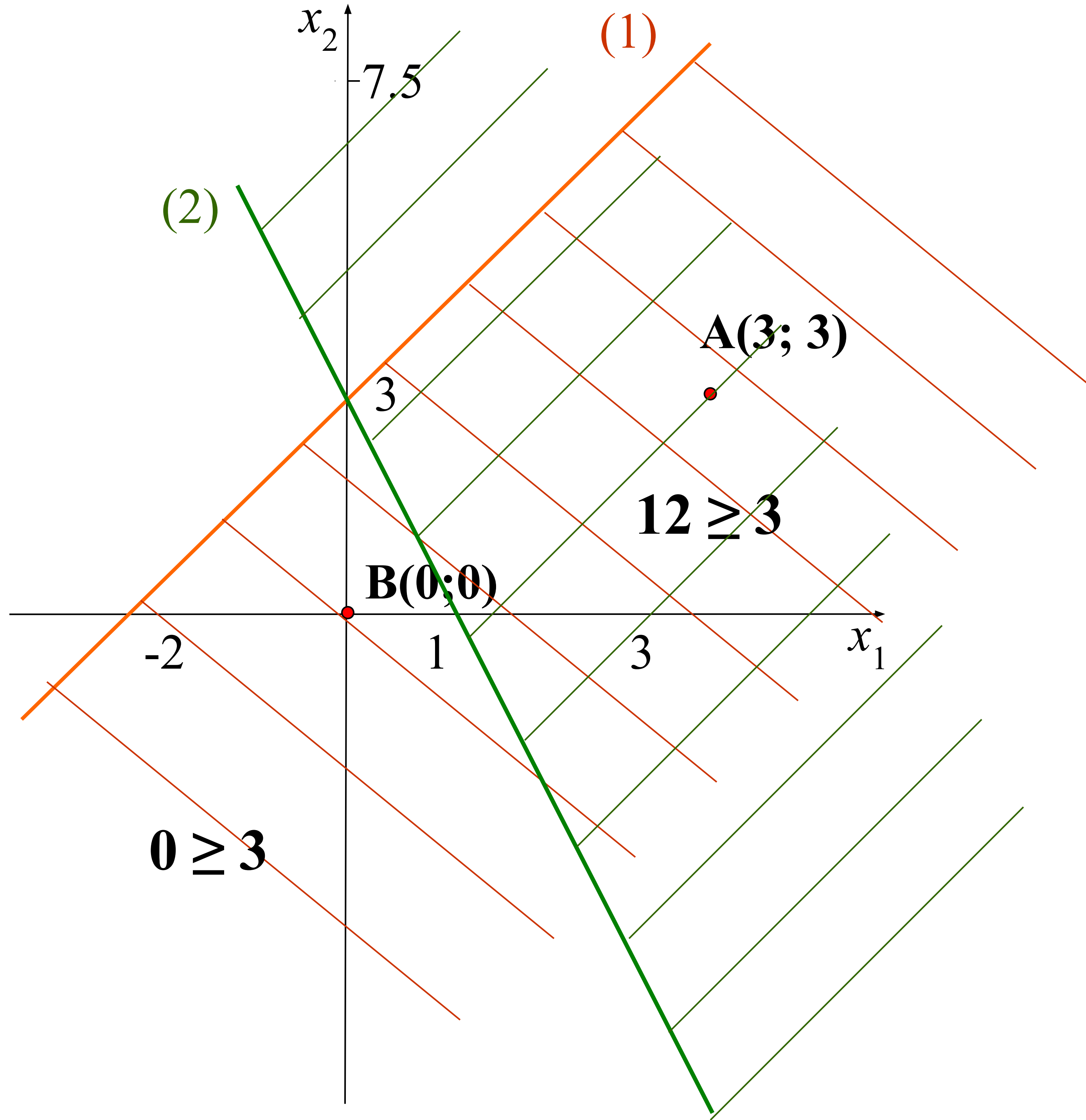
x_2
(1)
7.5
A(-2;3)
3
-12 ≥ -6
0 ≥ -6
B(0;0)
-2
1
3
x_1

Построение второй полуплоскости

$$(2)\ 3x_1 + x_2 \geq 3$$

Выбираем точки **A(3; 3)** и **B(0;0)**, принадлежащие разным полуплоскостям.

A(3; 3)	**B(0; 0)**
$3 \cdot 3 + 3 \geq 3$	$3 \cdot 0 + 0 \geq 3$
$12 \geq 3$	$0 \geq 3$
(верно)	(неверно)



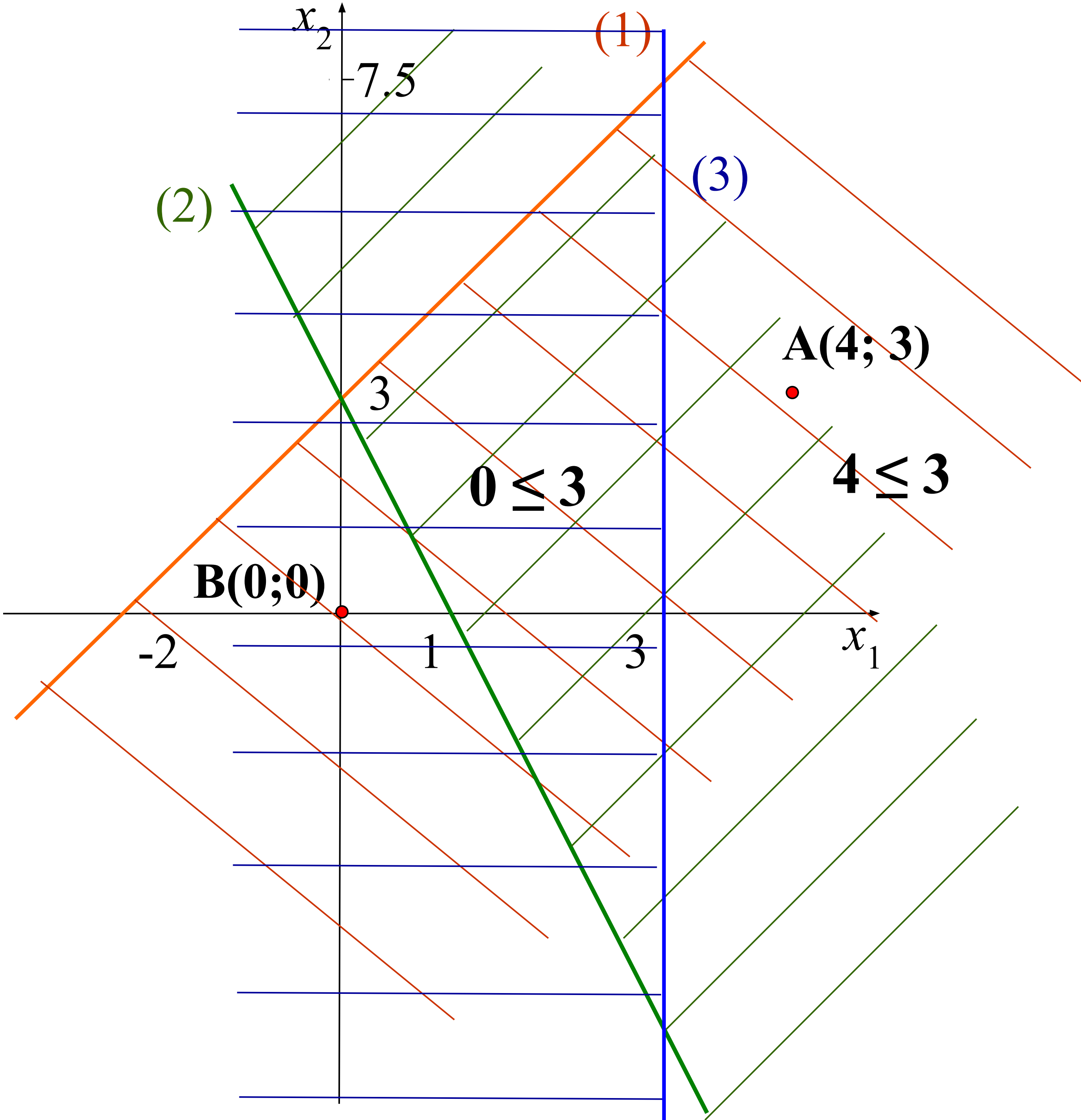
x2
7.5
(1)
(2)
A(3; 3)
3
12 ≥ 3
B(0;0)
-2
1
3
x1
0 ≥ 3

Построение третьей полуплоскости

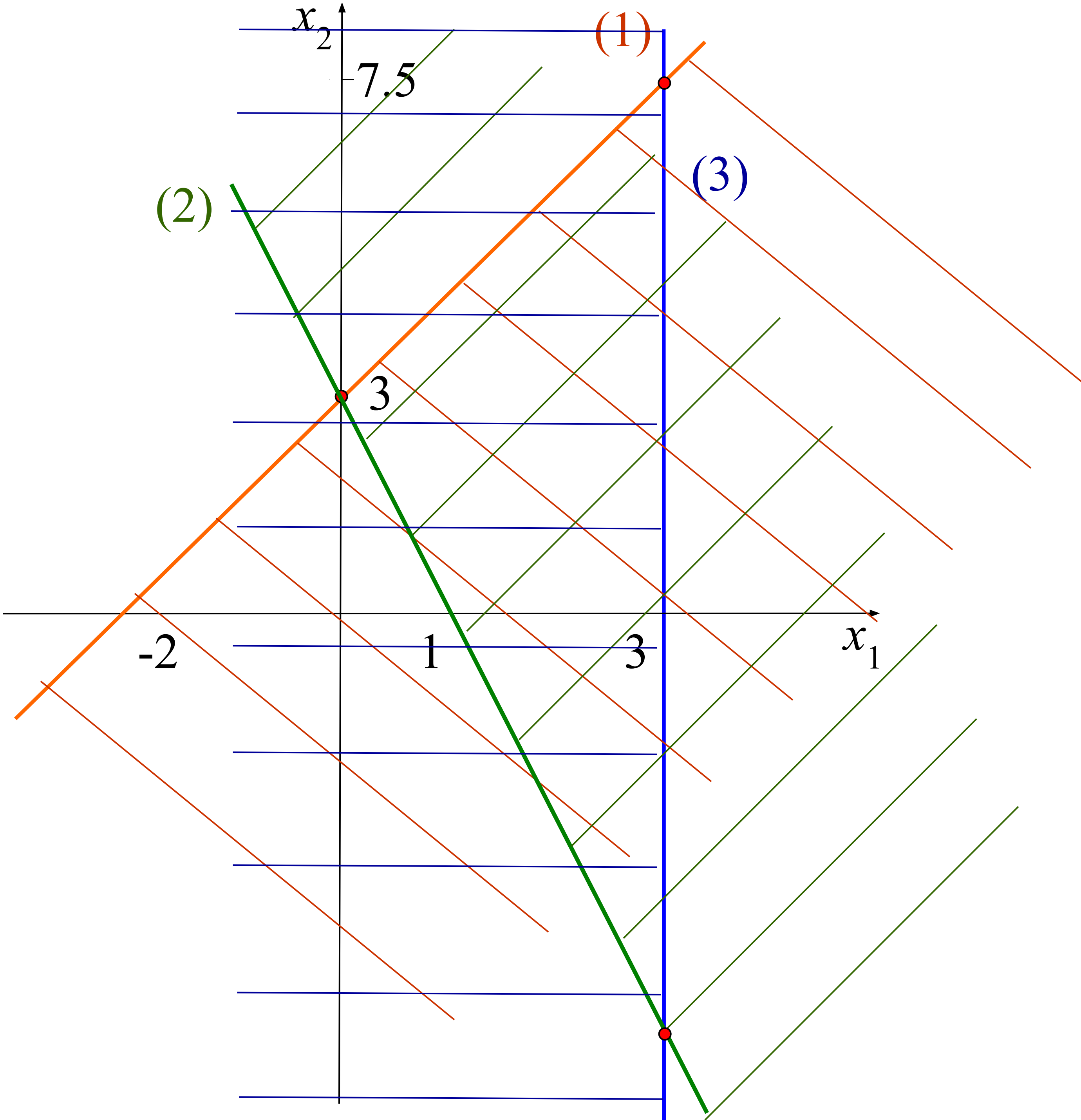
(3) $x_1 \leq 3$

Выбираем точки **A(4; 3)** и **B(0;0)**, принадлежащие разным полуплоскостям.

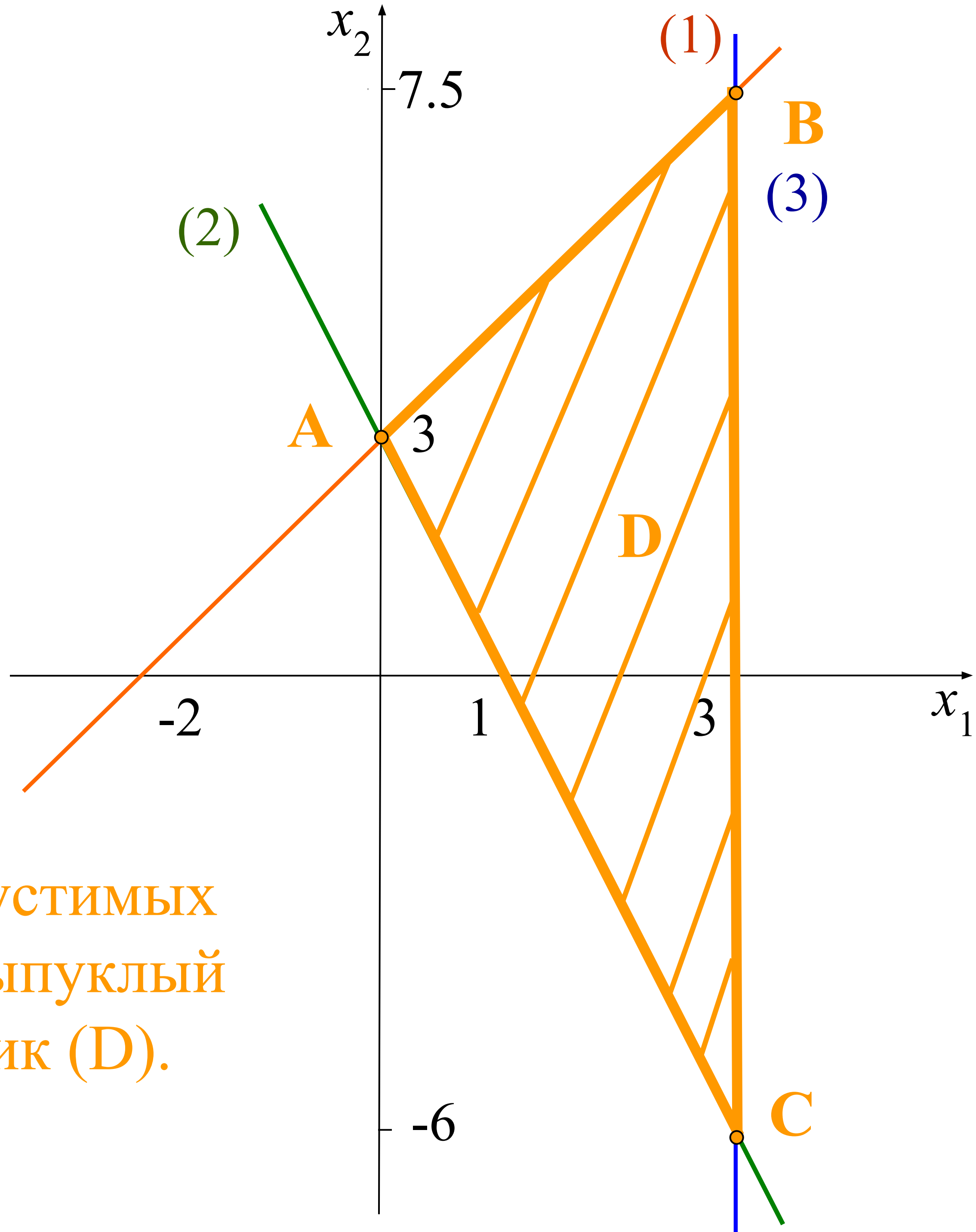
A(4; 3)	**B(0; 0)**
$4 \leq 3$	$0 \leq 3$
(неверно)	(верно)



x_2
7.5
(1)
(3)
(2)
A(4; 3)
3
0 ≤ 3
4 ≤ 3
B(0;0)
-2
1
3
x_1



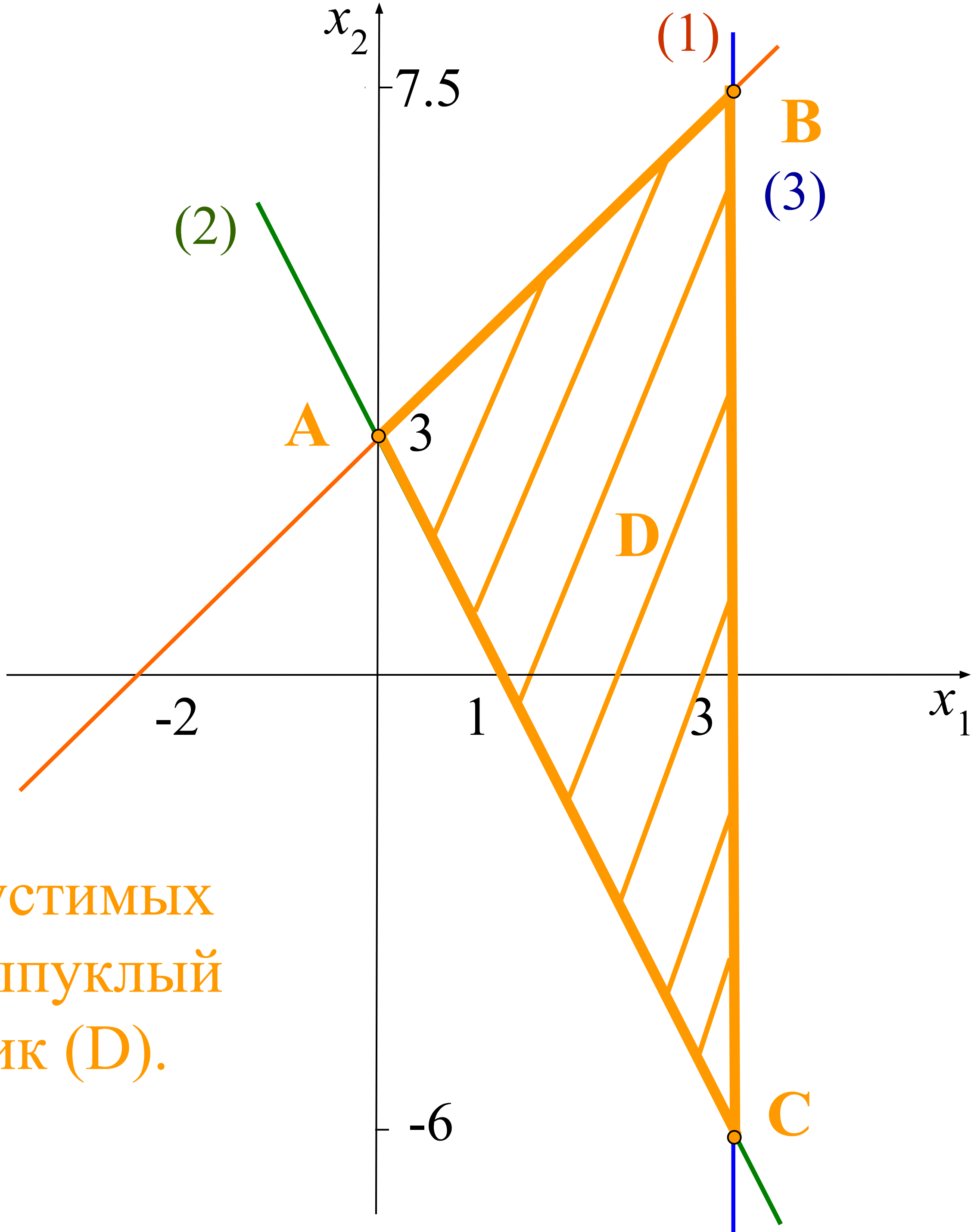
x_2
7.5
(1)
(3)
(2)
3
-2
1
3
x_1



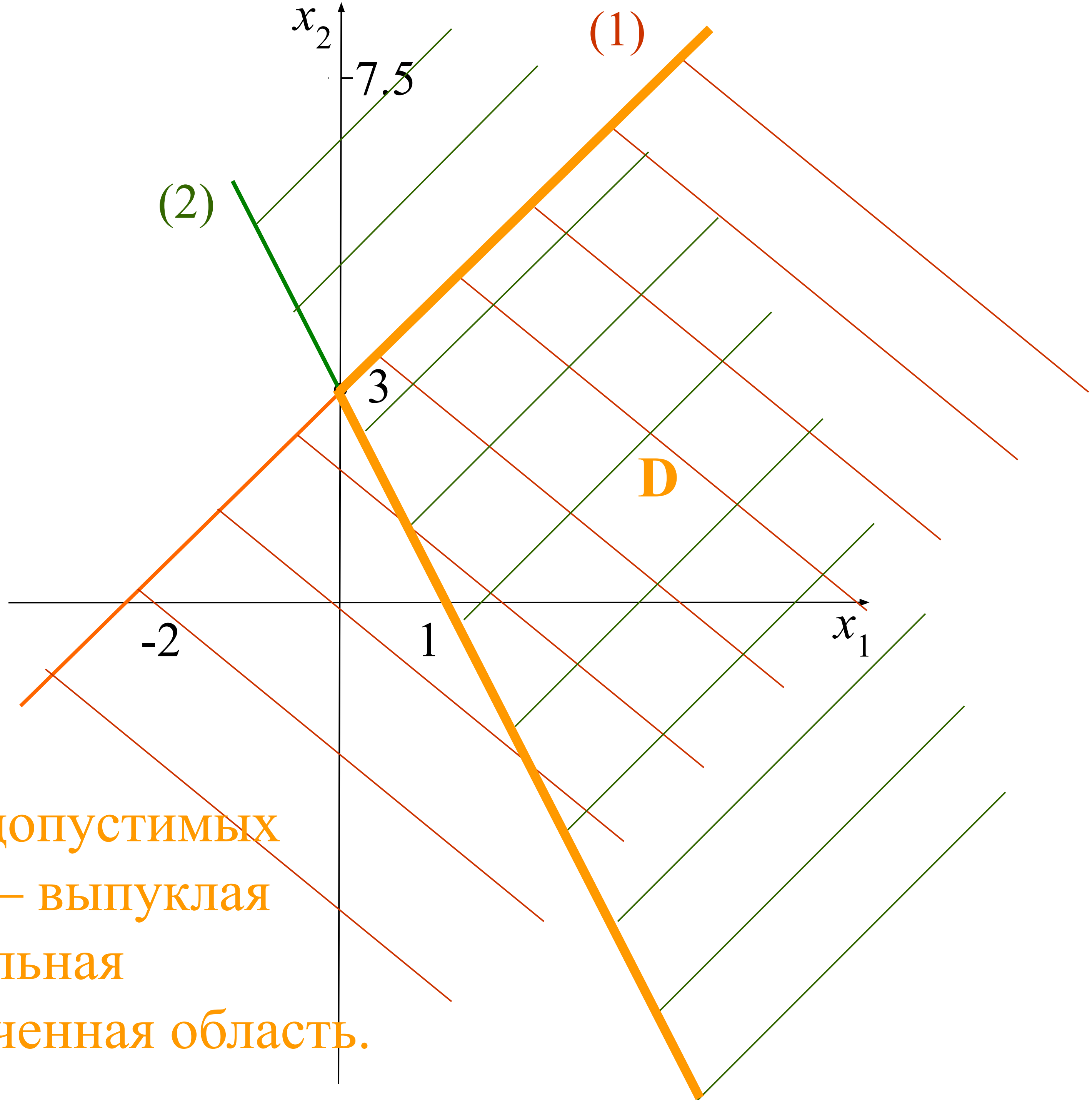
Область допустимых решений – выпуклый многоугольник (D).

Построение
области допустимых решений

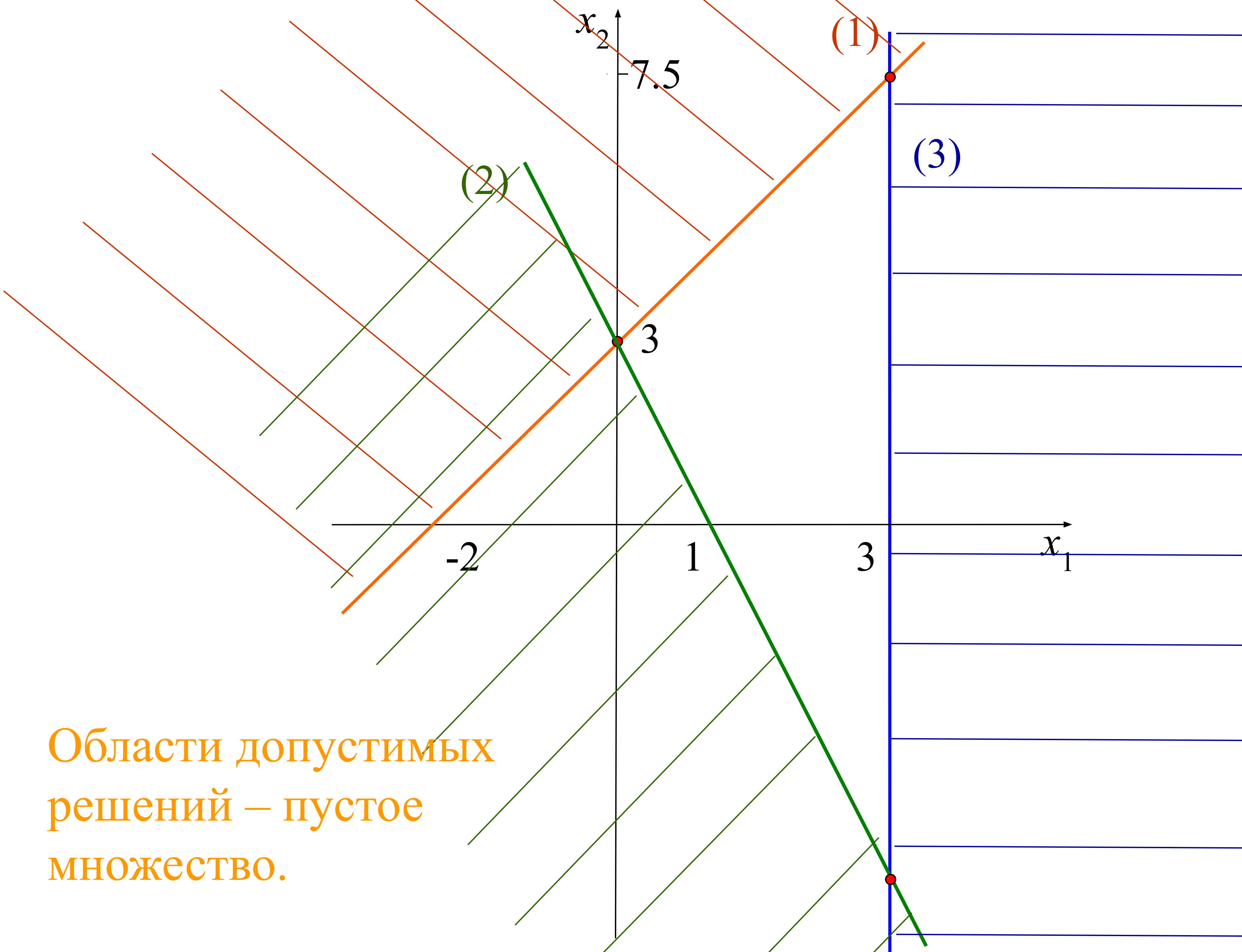
Какие варианты ОДР возможны?



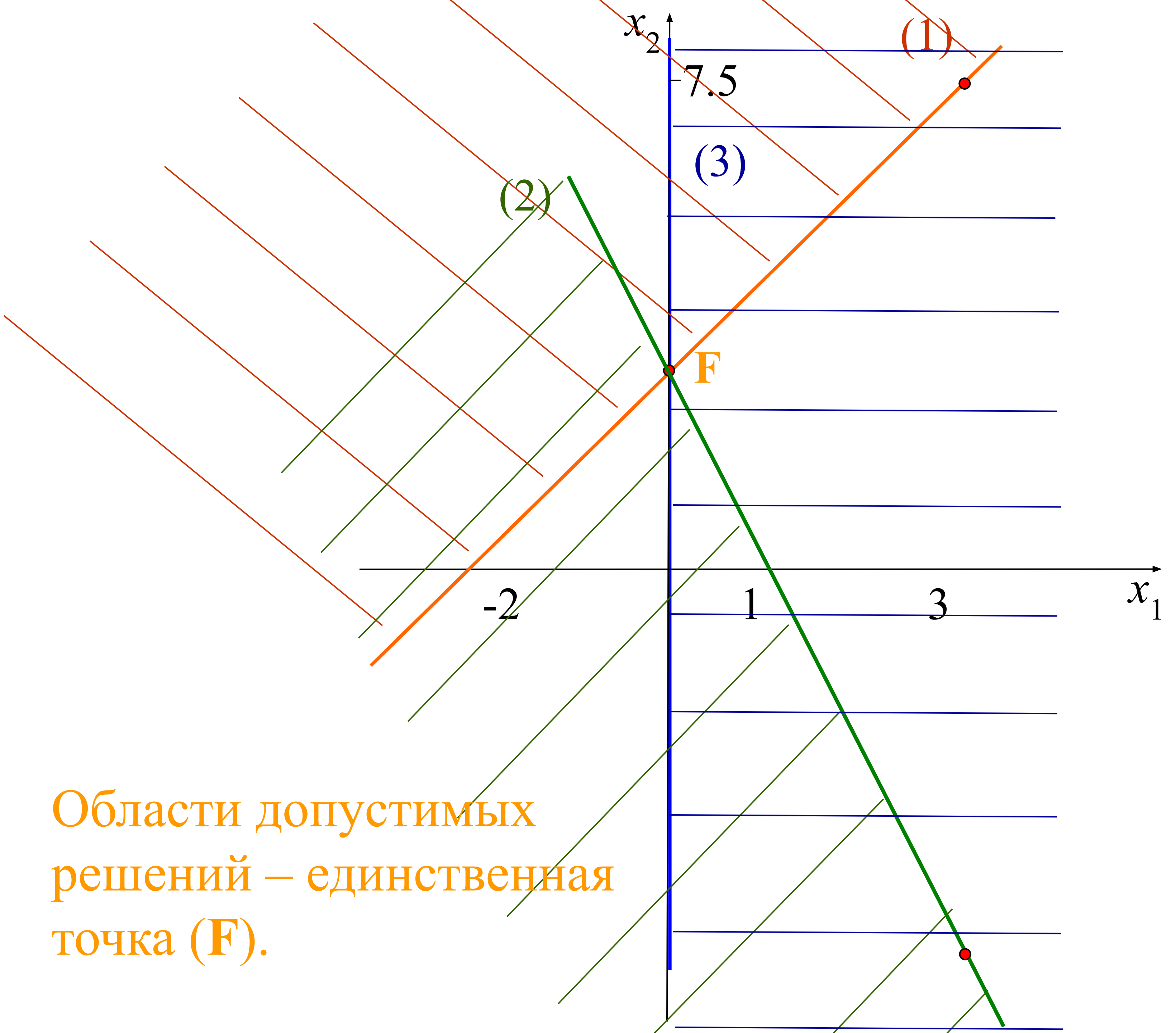
Область допустимых решений – выпуклый многоугольник (D).



Область допустимых решений – выпуклая многоугольная неограниченная область.



Области допустимых решений – пустое множество.



Области допустимых решений – единственная точка (**F**).

Построение оптимального решения

Для нахождения среди допустимых решений оптимального решения используют **линии уровня**.

Построение оптимального решения

Линией уровня называется прямая, на которой функция принимает постоянное значение. Уравнение линии уровня имеет вид $c_1x_1 + c_2x_2 = l, \quad l = const$.
Все линии уровня параллельны. Их нормаль - вектор $c = (c_1; c_2)$

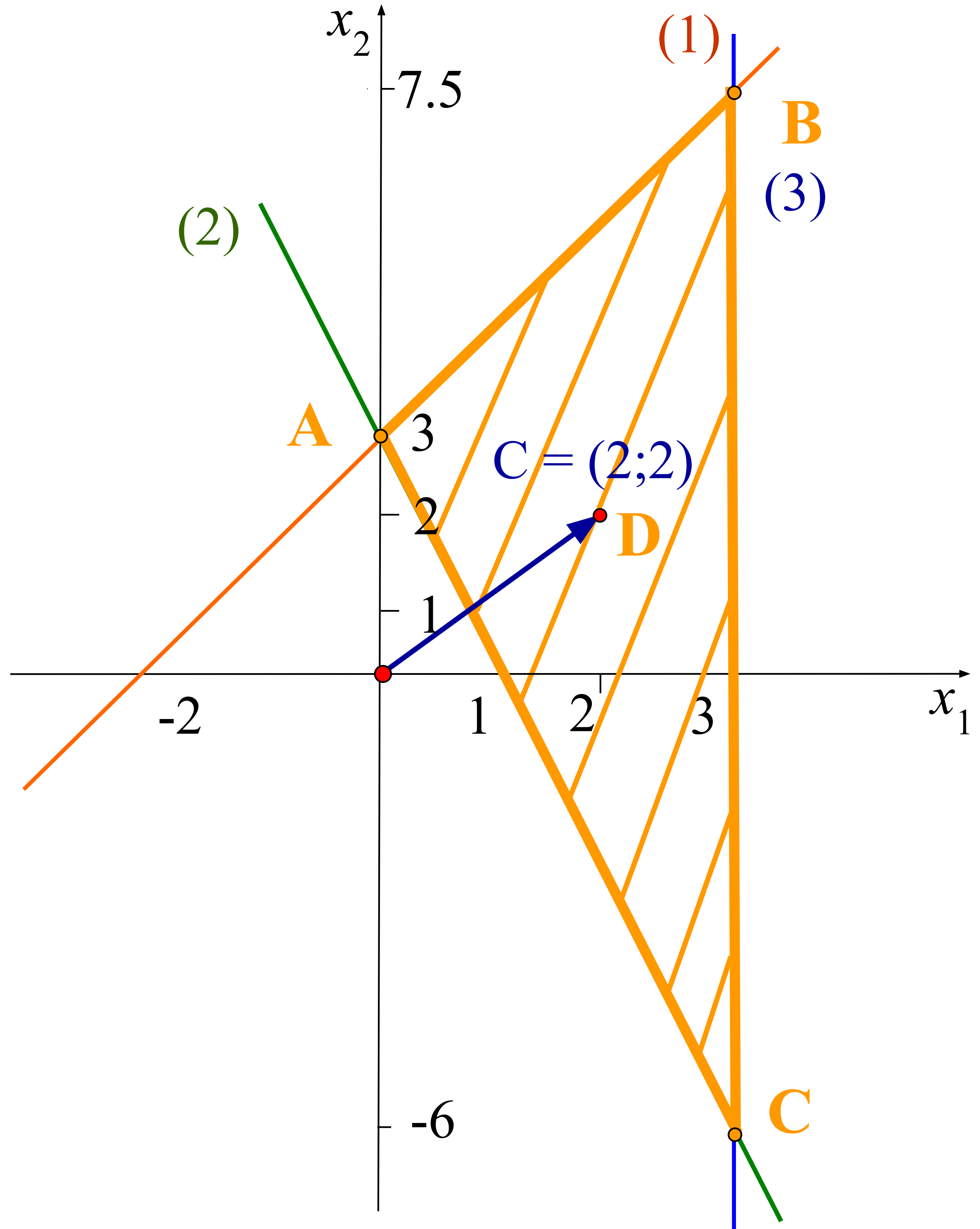
Построение оптимального решения

Нормаль линий уровня $\bar{c} = (c_1; c_2)$ указывает направление наискорейшего возрастания целевой функции, а противоположный вектор $-\bar{c}$ - направление наискорейшего убывания целевой функции.

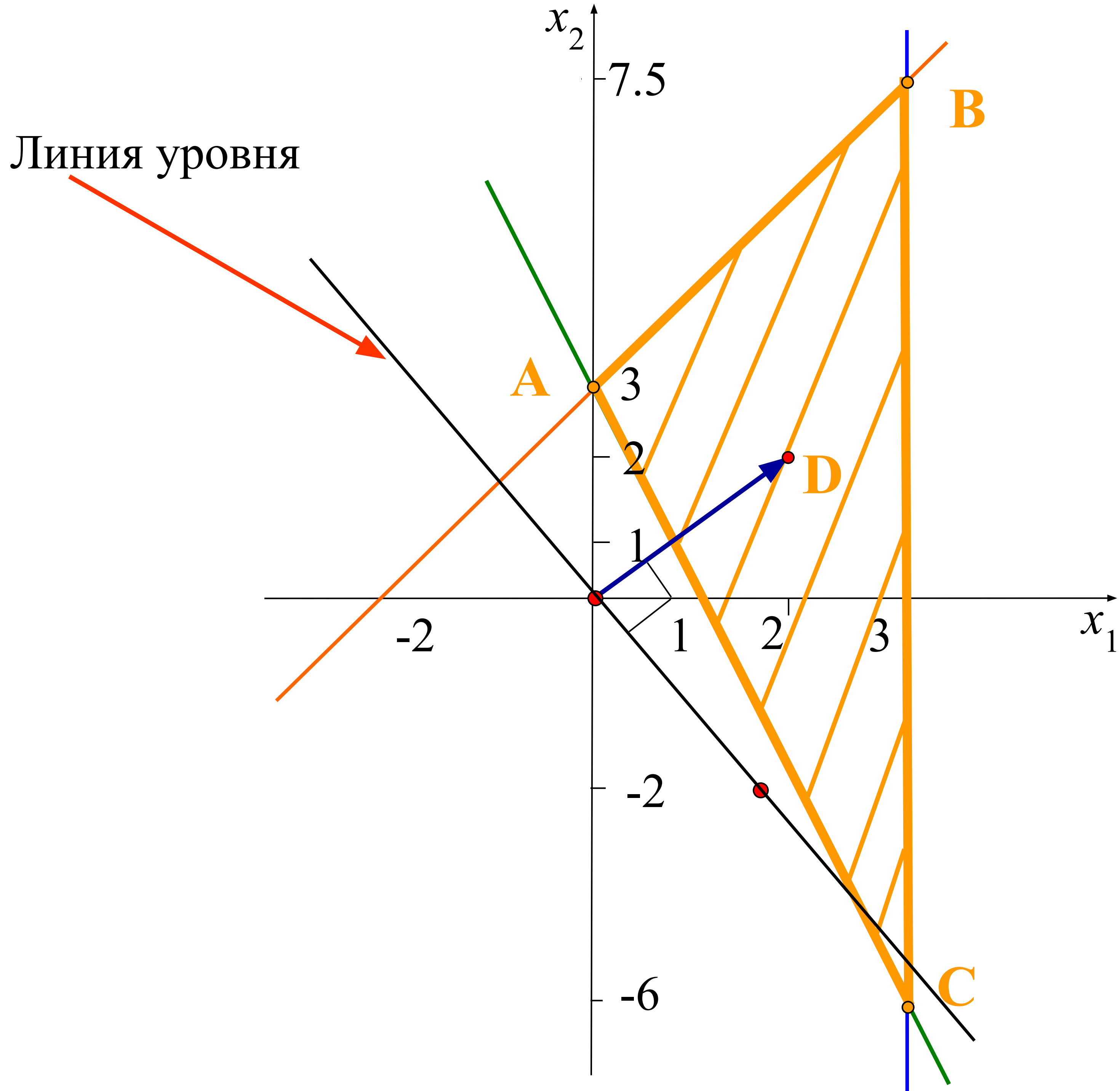
Линии уровня перемещают в задачи на максимум в направлении нормали, а в задачи на минимум – в противоположном направлении.

Построение оптимального решения

Строим прямую $2x_1 + 2x_2 = 0$
и определяем направление
возрастания функции $L = 2x_1 + 2x_2$,
это направление вектора $\bar{c} = (2; 2)$.



x2
x1
7.5
3
2
1
-6
-2
1
2
3
(1)
(2)
(3)
A
B
C
D
C = (2;2)

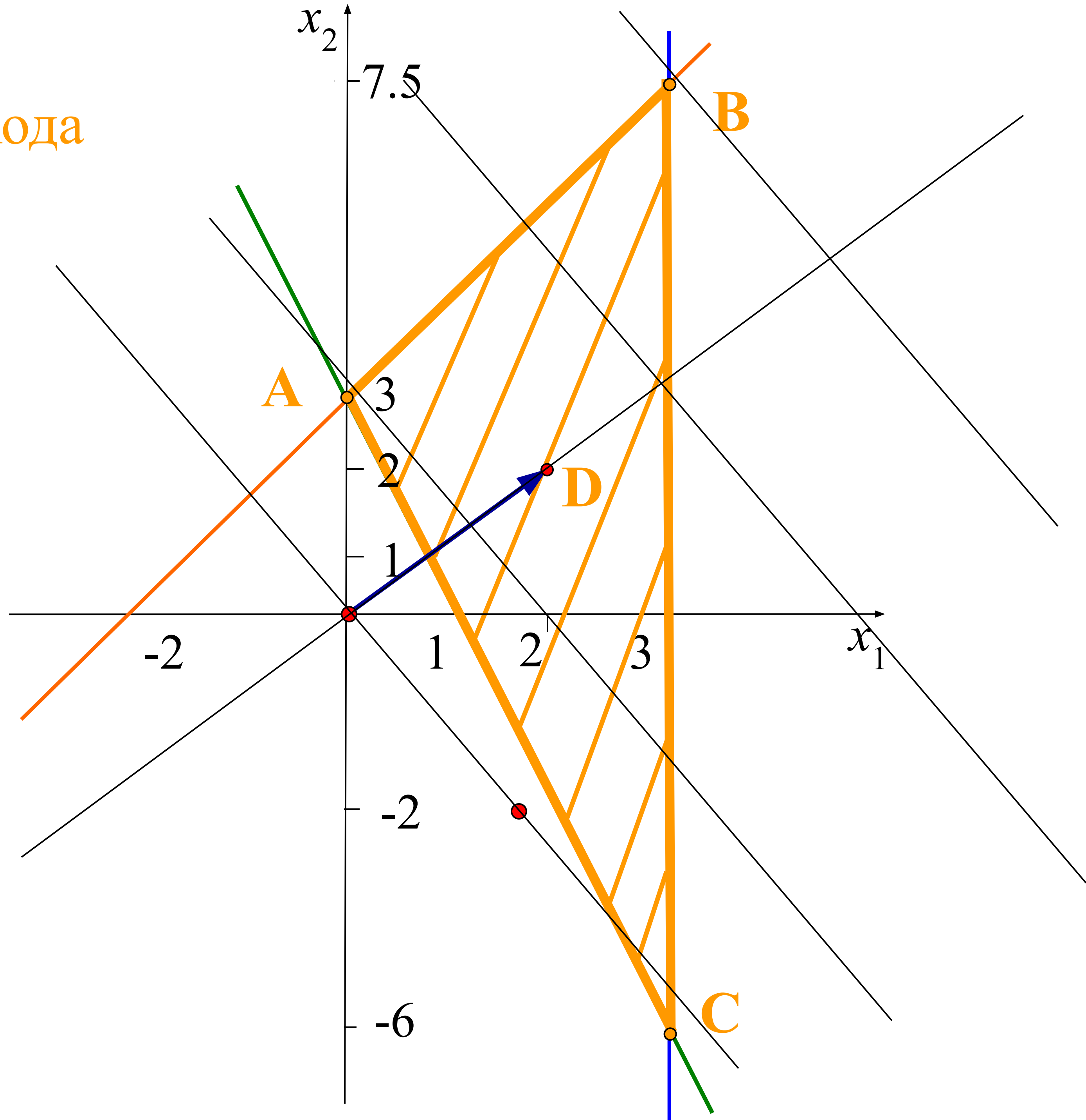


Линия уровня
x_2
x_1
7.5
3
2
1
-2
-6
-2
1
2
3
A
B
C
D

Линии уровня перемещают в задачи на максимум в направлении нормали, а в задачи на минимум – в противоположном направлении.

Перемещаем прямую параллельно себе в направлении вектора $C = (2; 2)$.

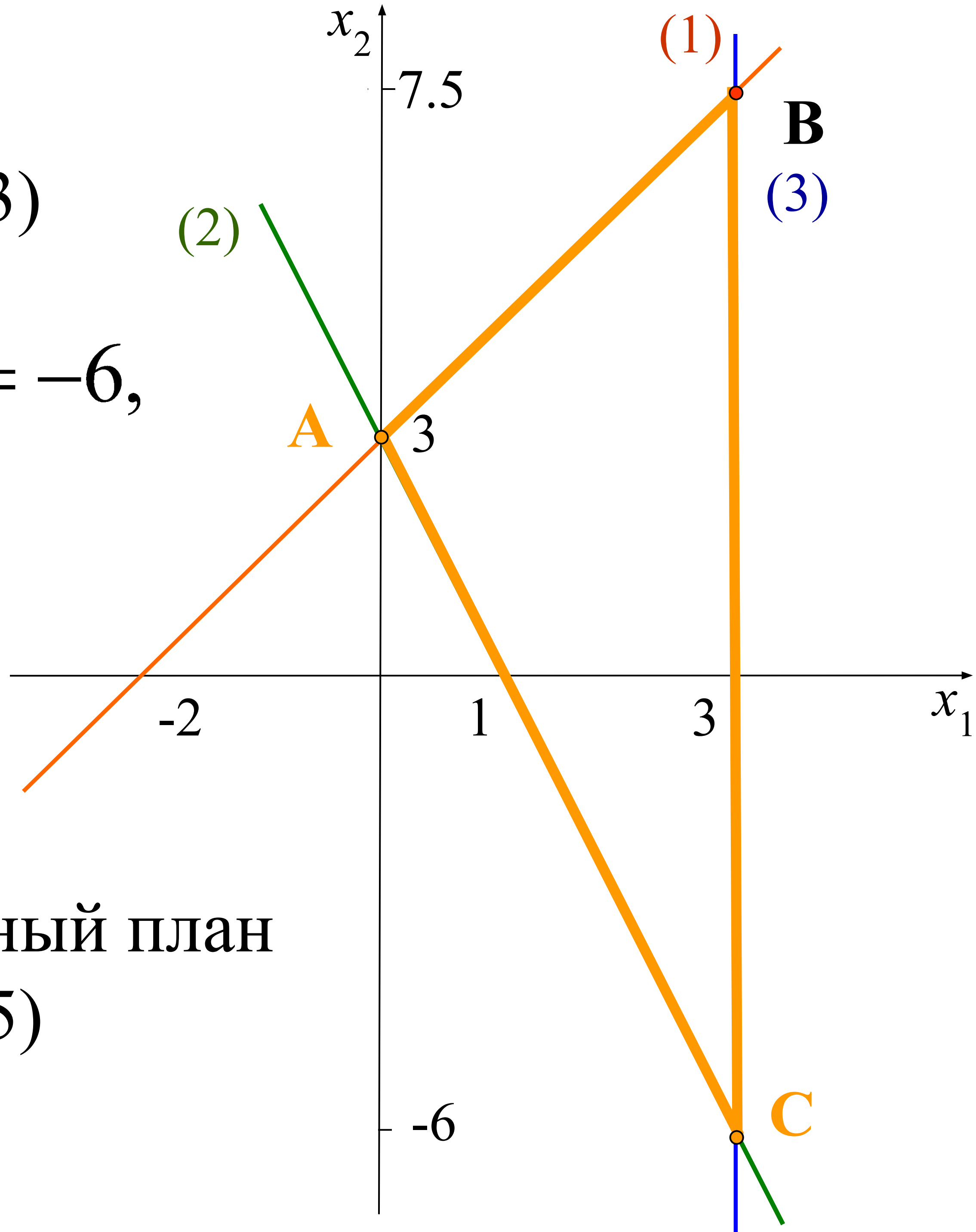
B – точка выхода



$B = (1) \cap (3)$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -6, \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

$B = (3;\ 7{,}5)$



Оптимальный план

$X^* = (3;\ 7{,}5)$

Определение экстремального значения целевой функции

$$f(x) = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$X^* = (3;\ 7{,}5)$ - оптимальный план

$$f_{\max} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7.5 = 21$$

$$\boxed{f_{\max} = 21, \quad \text{при } X^* = (3;\ 7{,}5).}$$

Задача 1

Решить графически задачу ЛП

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2 \geq 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 6 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2 \geq 0, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$L = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

Задача 2

Решить графически задачу ЛП

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ x_1 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \end{cases}$$

$$L = 4x_1 + 2x_2 \to \min$$

Задача 3

Решить графически задачу ЛП

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 0, \\ x_2 \geq 3, \end{cases}$$

$$L = 3x_1 + 7x_2 \to \max$$

Задача 4

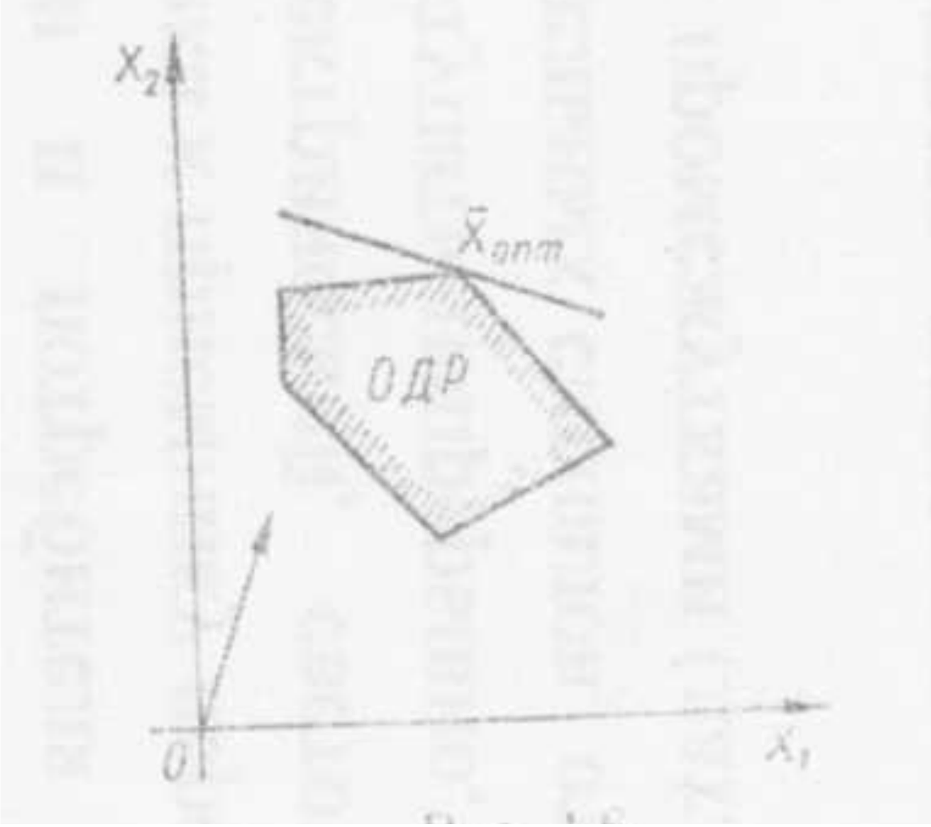
Решить графически задачу ЛП

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 - x_2 \geq 3, \end{cases}$$

$$L = 4x_1 + 5x_2 \to \max$$

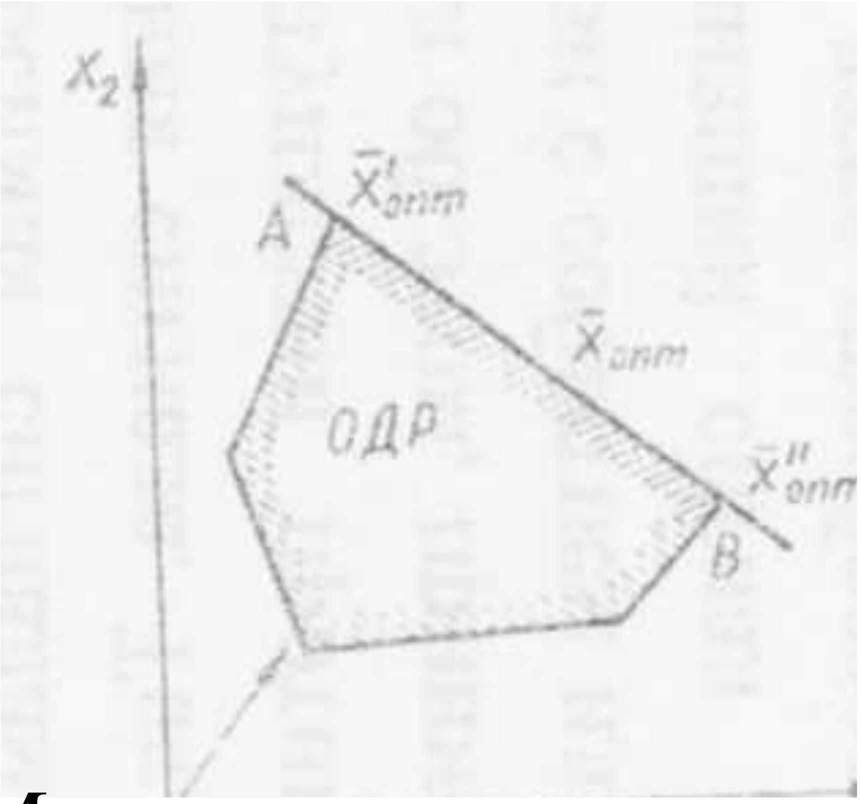
В зависимости от характера ОДР и взаимного расположения области и вектора-нормали могут встречаться различные случаи

Ограниченная область допустимых решений



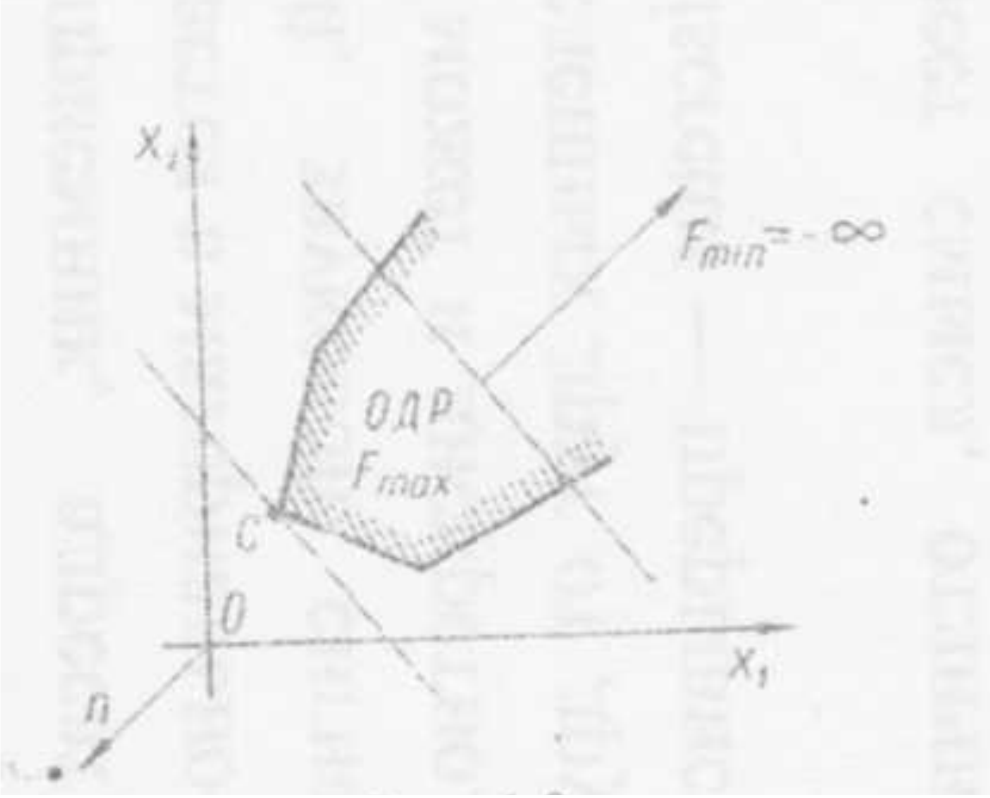
Максимум достигается в единственной точке

Ограниченная область допустимых решений



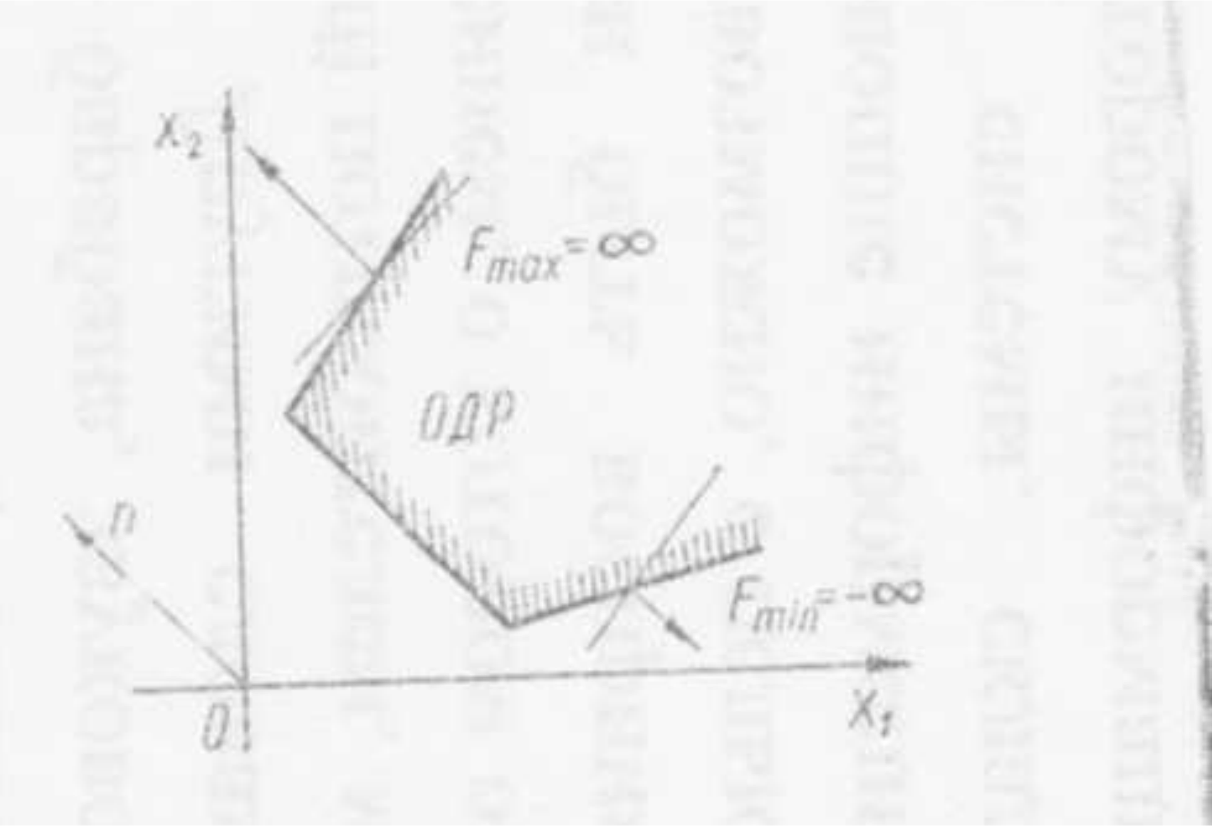
Максимум достигается в двух вершинах, и, следовательно, в любой точке отрезка AB

Неограниченная область допустимых решений



Целевая функция имеет экстремум

Неограниченная область допустимых решений



Функция неограниченна снизу и сверху

$$\begin{cases} x_1 \le 100, \\ x_2 \le 200, \\ 20x_1 + 15x_2 \ge 1500, \\ 35x_1 + 30x_2 \le 5000, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$L = -20x_1 - 30x_2 + 3800 \to \max$$

Дома

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - 8x_5 = 3, \\ x_2 + x_3 - 4x_5 = -4, \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

$$L = -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 7x_5 \to \min$$