Калистратова Л.Ф., Калистратова Н.П.

Мультимедийные лекции по физике

Раздел 1. Классическая и релятивистская механика

Темы лекций

1. Кинематика поступательного и вращательного движений.
2. Динамика поступательного движения.
3. Динамика вращательного движения.
4. Работа, энергия.
5. Законы сохранения.
6. Специальная теория относительности.

Основная литература: учебники

1. Савельев И.В. Курс общей физики: Т.1. Механика. Молекулярная физика.– М.: Наука, 1987.– 496 с.

2. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов. – 7-е изд., стер. – М.: Высш. школа, 2003. – 542 с.: ил.

3. Детлаф Ф.Ф., Яворский Б.М. Курс физики: учеб. пособ. для втузов. – М.: Наука, 1989. – 608 с.

Дополнительная литература по теоретической части

1. Калистратова Л.Ф., Гладенко А.А., Ярош Э.М. Основы классической и релятивистской механики. Учебн. пособие. Омск: ОмГТУ, 1996. - 107 с.

2. Данилов С.В. Классическая и релятивистская механика: конспект лекций /С.В. Данилов. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2008. – 56 с.

3. Калистратова Л.Ф., Калистратова Н.П.. Тестовые задания по общей физике. Механика, молекулярная физика и термодинамика. Учебно-практ. пособие. Омск: ОмГТУ, 2001. - 77 с.

Литература для практических и домашних заданий

1. Бердинская Н.В., Нижникова О.В., Ясько С.С. Кинематика и динамика поступательного и вращательного движений. Методические указания по решению задач. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2004. – 68 с.

2. Данилов С.В., Егорова В.А., Прокудина Н.А. Законы сохранения. СТО. Методические указания по решению задач. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2004. – 52 с.

3. Калистратова Л.Ф., Волкова В.К., Лях О.В., Павловская О.Ю. Физика – 1. Методические указания для аудиторных практических занятий. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2010. – 32 с.

4. Лиссон В.Н., Калистратова Л.Ф., Калистратова Н.П. Сборник задач по курсу общей физики. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2002. – 115 с.

Литература для подготовки к тестовой сдаче коллоквиума

1. Калистратова Л.Ф., Калистратова Н.П., Прокудина Н. А. Кинематика поступательного и вращательного движений. Тестовые задания.- Омск: Изд-во ОмГТУ, 2005. – 32 с.

2. ДаниловС.В., Егорова В.А., Иванова Г.П. Динамика поступательного и вращательного движений. Элементы специальной теории относительности. Тестовые задания. - Омск: Изд-во ОмГТУ, 2005. – 38 с.

3. Павловская О.Ю., Туровец А.Г., Ясько С.С., Калистратова Н.П. Законы сохранения. - Тестовые задания. - Омск: Изд-во ОмГТУ, 2005. – 34 с.

Тема 1. Кинематика поступательного и вращательного движений

План лекции

1.1. Введение.

1.2. Кинематика поступательного движения материальной точки.

1.3. Тангенциальное и нормальное ускорения.

1.4. Кинематика вращательного движения.

1.5. Взаимосвязь линейных и угловых величин.

1.1. ВВЕДЕНИЕ

Механическое движение – это процесс изменения расположения тел или их частей относительно друг друга.

Механическое, как и всякое другое, движение происходит в пространстве и времени.

Пространство и время – сложнейшие физические и философские категории.

В ходе развития физики и философии эти понятия претерпели весьма существенные изменения.

Классическая механика

Классическую механику создал И. Ньютон.

Он постулировал, что время и пространство абсолютны.

Абсолютное пространство и абсолютное время не взаимосвязаны.

Классическая механика приписывает абсолютному пространству и абсолютному времени вполне определенные свойства.

Их свойства не зависят также от материи и её движения.

Классические свойства пространства

Абсолютное пространство

- трехмерно (имеет три измерения),
- непрерывно (его точки могут быть сколь угодно близки друг к другу),
- эвклидово (его геометрия описывается геометрией Эвклида),
- однородно (в нем нет привилегированных точек),
- изотропно (в нем нет привилегированных направлений).

Классические свойства времени

Абсолютное время

- одномерно (имеет одно измерение),
- непрерывно (два его мгновения могут быть сколь угодно близки друг к другу),
- однородно (в нем нет привилегированных мгновений),
- анизотропно (течет только в одном направлении).

Релятивистская и квантовая механики

В начале XX века классическая механика подверглась кардинальному пересмотру.

В результате была создана одна из величайших теорий нашего времени – теория относительности.

Теория относительности (релятивистская механика) описывает движение макроскопических тел, когда их скорость соизмерима со скоростью света.

Кроме того, в XX веке была создана квантовая механика, описывающая движение микрообъектов.

Теория относительности

Теория относительности установила:

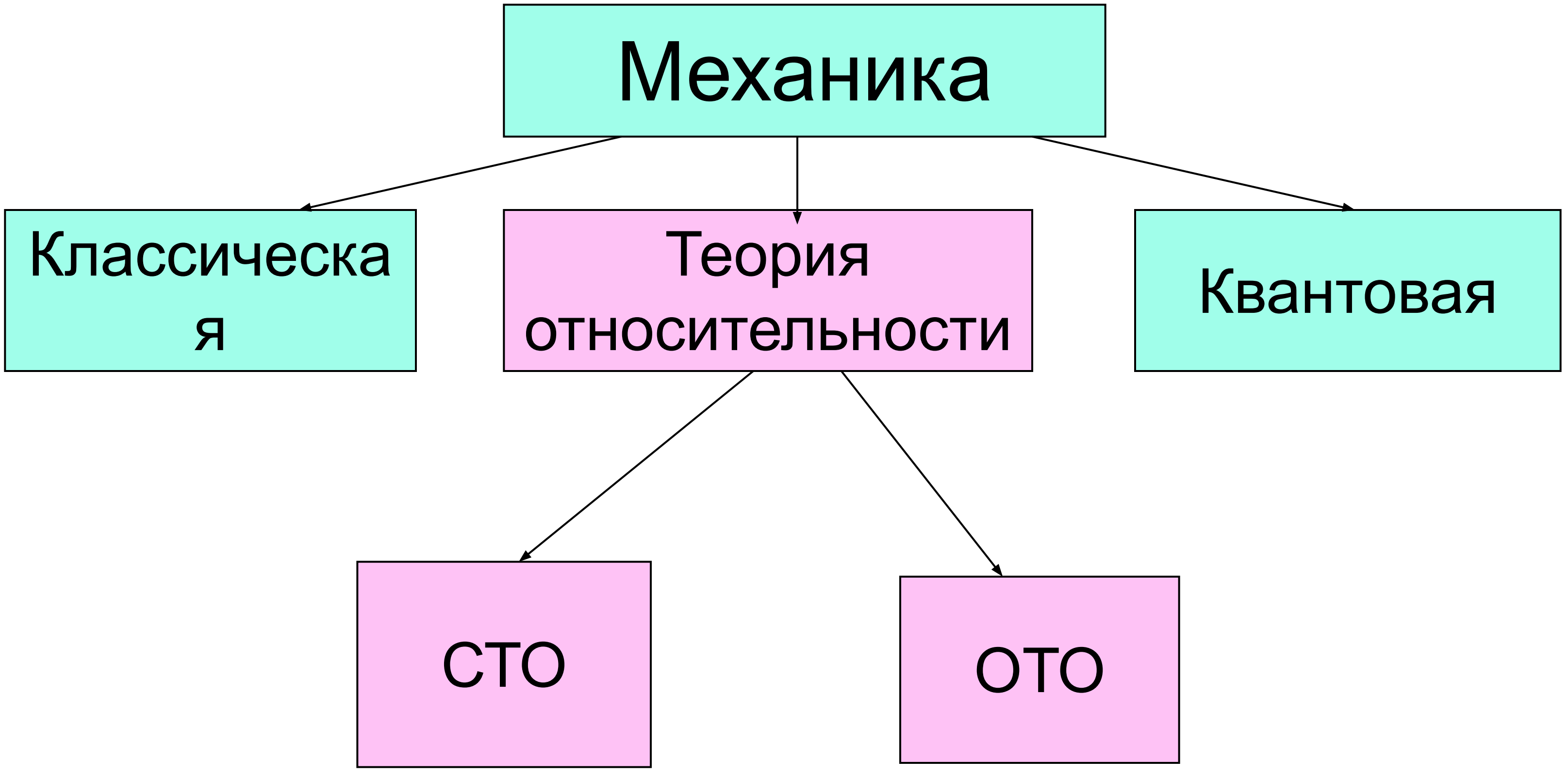
1) пространство и время не являются самостоятельными объектами;

2) пространство и время – формы существования материи;

3) пространство и время имеют не абсолютный, а относительный характер;

4) пространство и время неотделимы друг от друга;

5) пространство и время неотделимы от материи и её движения.


Механика
Классическа
я
Теория
относительности
Квантовая
СТО
ОТО

Объекты механики

Макроскопические тела, движущиеся с малыми скоростями, изучает классическая механика.

Макроскопические тела (макрочастицы), движущиеся с большими скоростями (порядка $C = 3\ 10^{8}$ м/с) в инерциальных системах отсчёта, изучает специальная теория относительности.

Макроскопические тела (макрочастицы), движущиеся с большими скоростями в неинерциальных системах отсчёта, изучает общая теория относительности.

Микроскопические тела (микрочастицы), движущиеся с большими, но нерелятивистскими скоростями, изучает квантовая механика.

Микрочастицы, движущиеся с релятивистскими скоростями, изучает релятивистская квантовая механика.

Разделы механики

Механика состоит из трех разделов – кинематики, динамики и статики.

Кинематика изучает виды движений, вне связи с причинами, вызывающими движение.

Динамика изучает причины, вызывающие тот или иной вид движения.

Статика изучает условия равновесия тел.

Основные понятия механики

Движение – изменение положения тел друг относительно друга.

Тело отсчёта - тело, по отношению к которому определяется положение других тел.

Система отсчёта - система декартовых координат, связанная с телом отсчета и прибором для отсчета времени.

Материальная точка – это тело, формой и размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

Абсолютно твердое тело – это тело, деформациями которого в данной задаче можно пренебречь.

1.2. Кинематика поступательного движения материальной точки

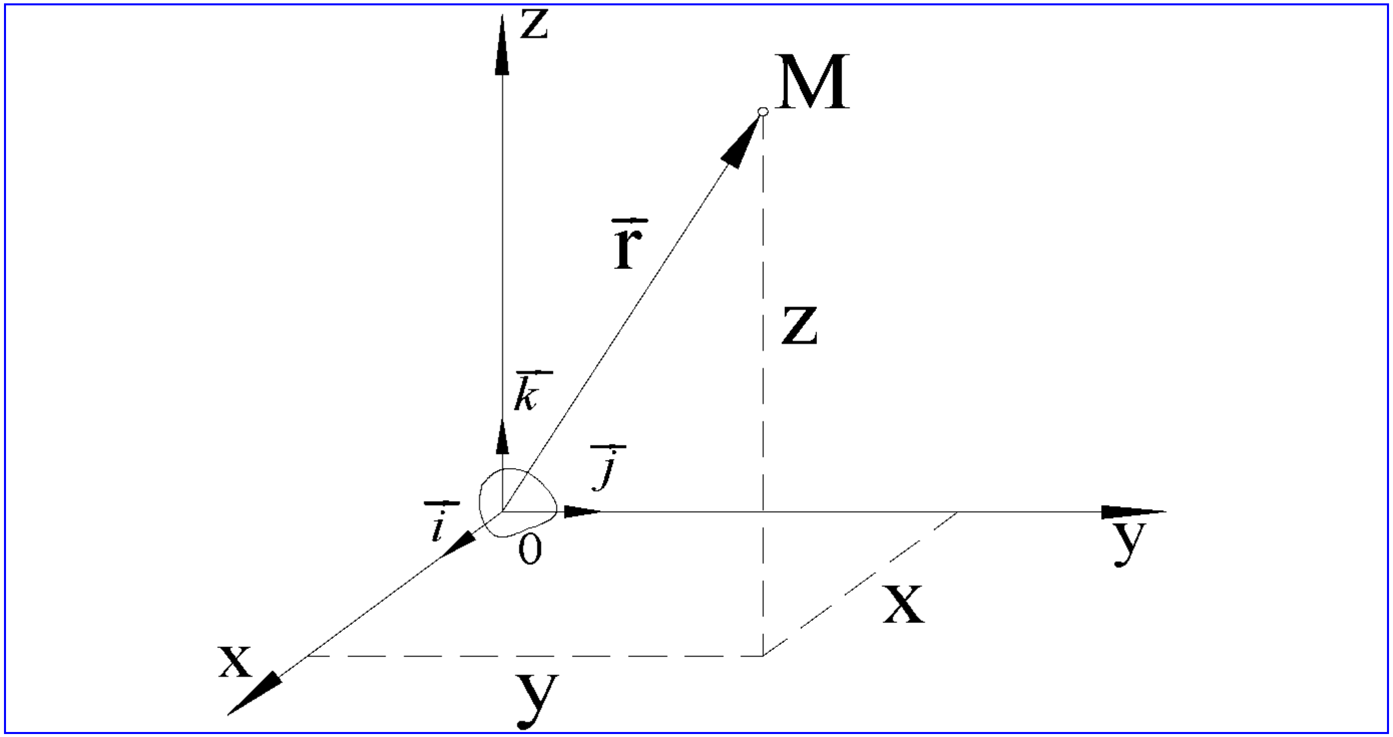
Описать движение материальной точки – значит знать её положение относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени.

Для решения этой задачи надо иметь эталон длины (например, линейку) и прибор для измерения времени – часы.

Выберем тело отсчета и свяжем с ним прямоугольную систему координат.

Радиус-вектор

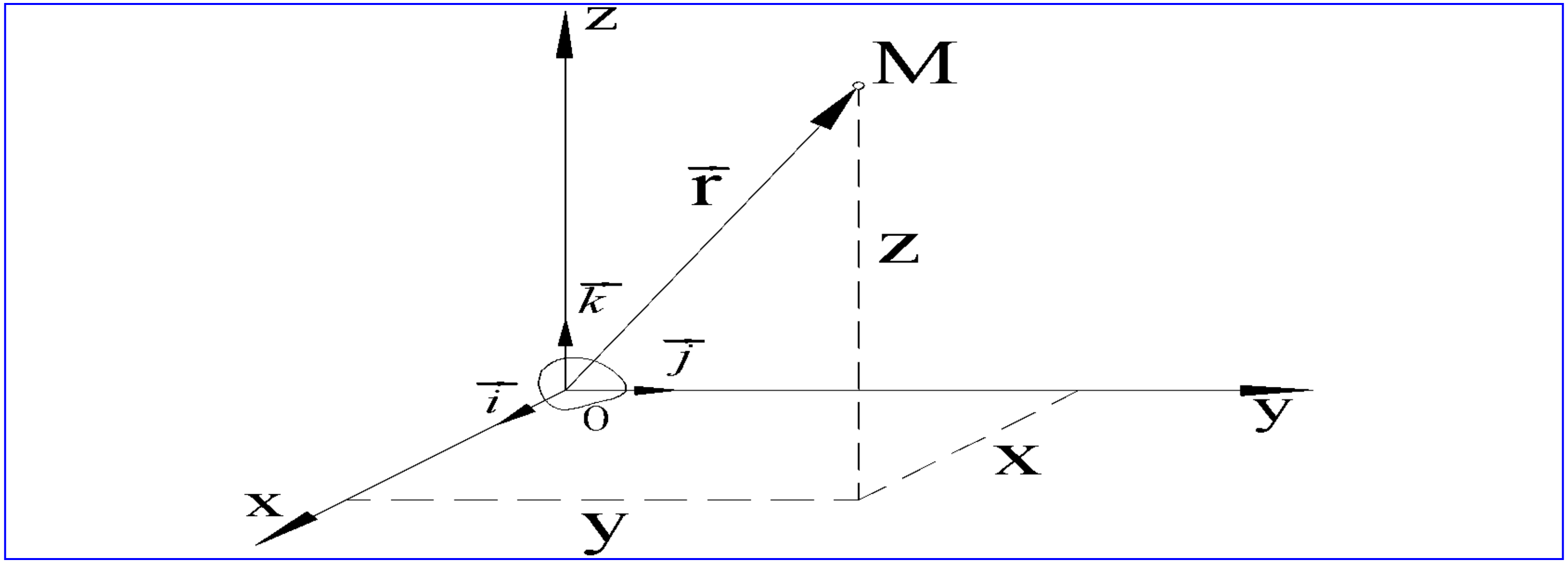
Радиус-вектор $\vec{r}$ - соединяет движущуюся материальную точку с центром координат и задаёт положение этой точки в системе координат.

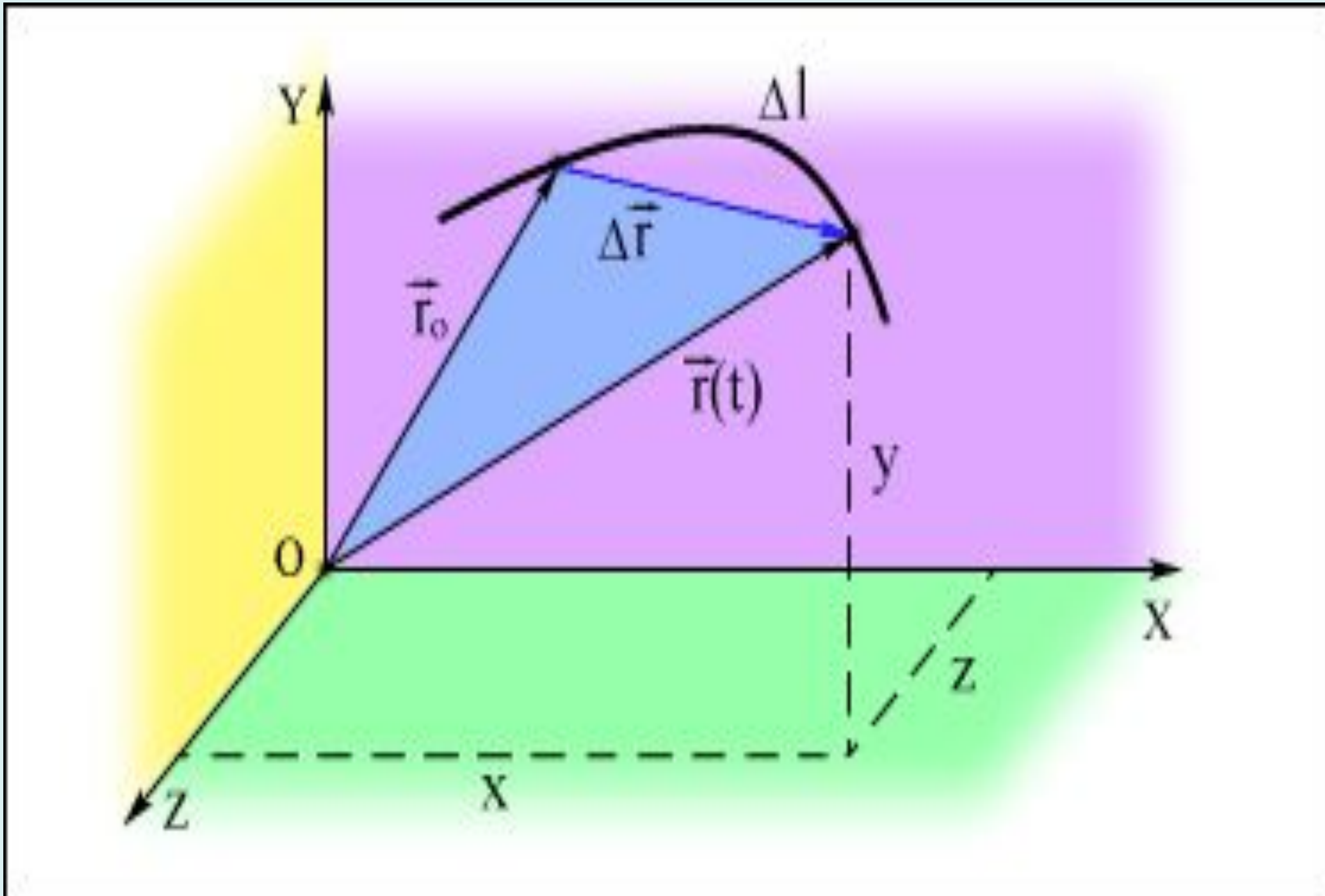


Спроецируем $\vec{\mathbf{r}}$ на оси координат:

$$\vec{r} = r_X \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} + r_Z \cdot \vec{k},$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты осей X,У,Z




Y
Δl
Δr
r₀
r(t)
y
O
X
z
Z
x

$$\boxed{r_x = x} \qquad \boxed{r_y = y} \qquad \boxed{r_z = z}$$

– проекции вектора $\vec{r}$ на эти оси.

X, У, Z называются декартовыми координатами материальной точки.

Модуль радиус-вектора равен:

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Закон движения

В процессе движения материальной точки её радиус-вектор изменяется по величине и направлению.

Законом движения материальной точки называется уравнение, выражающее зависимость её радиус-вектора от времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Траекторией называется линия, которую описывает конец радиус-вектора материальной точки при ее движении.

Кинематические уравнения движения

Закон движения, записанный в скалярной форме, представляет систему уравнений движения материальной точки.

X= f(t)

У= f(t)

Z= f(t)

Эти уравнения носят название кинематических уравнений движения.

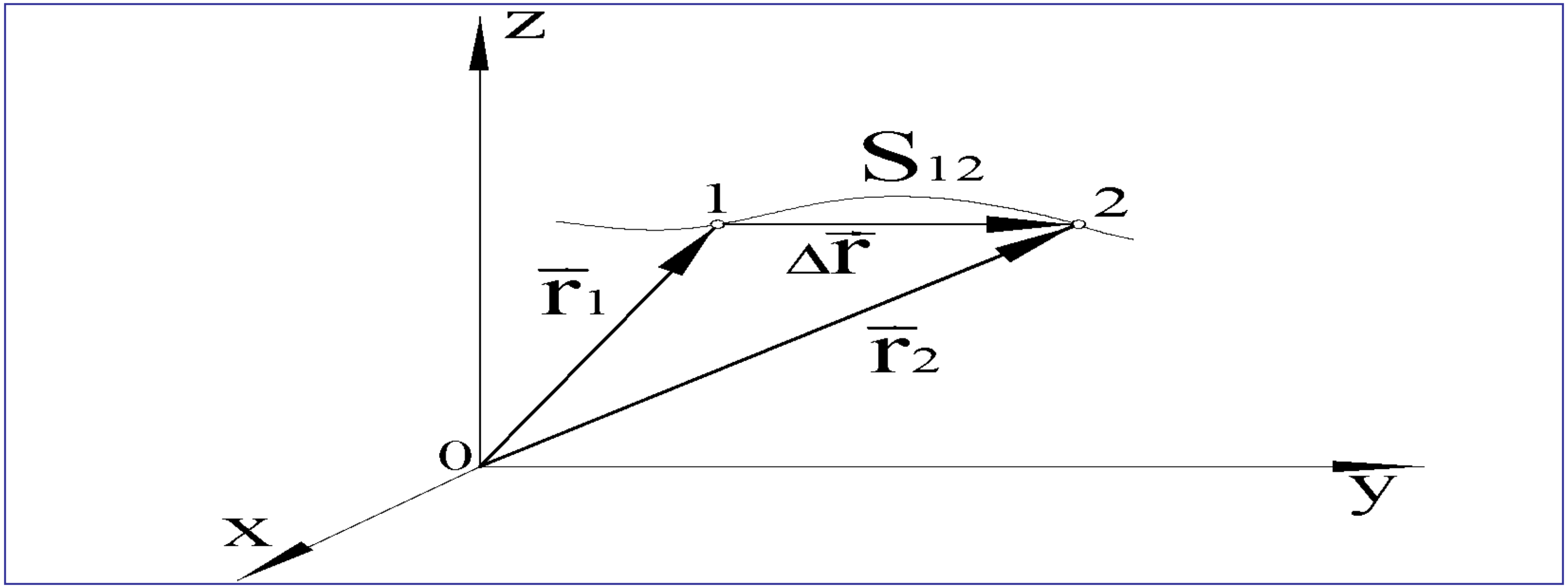
Исключив из этой системы параметр времени , получим уравнение траектории.

Уравнение траектории в случае плоского движения в системе координат Х,У выглядит как У = f(Х)

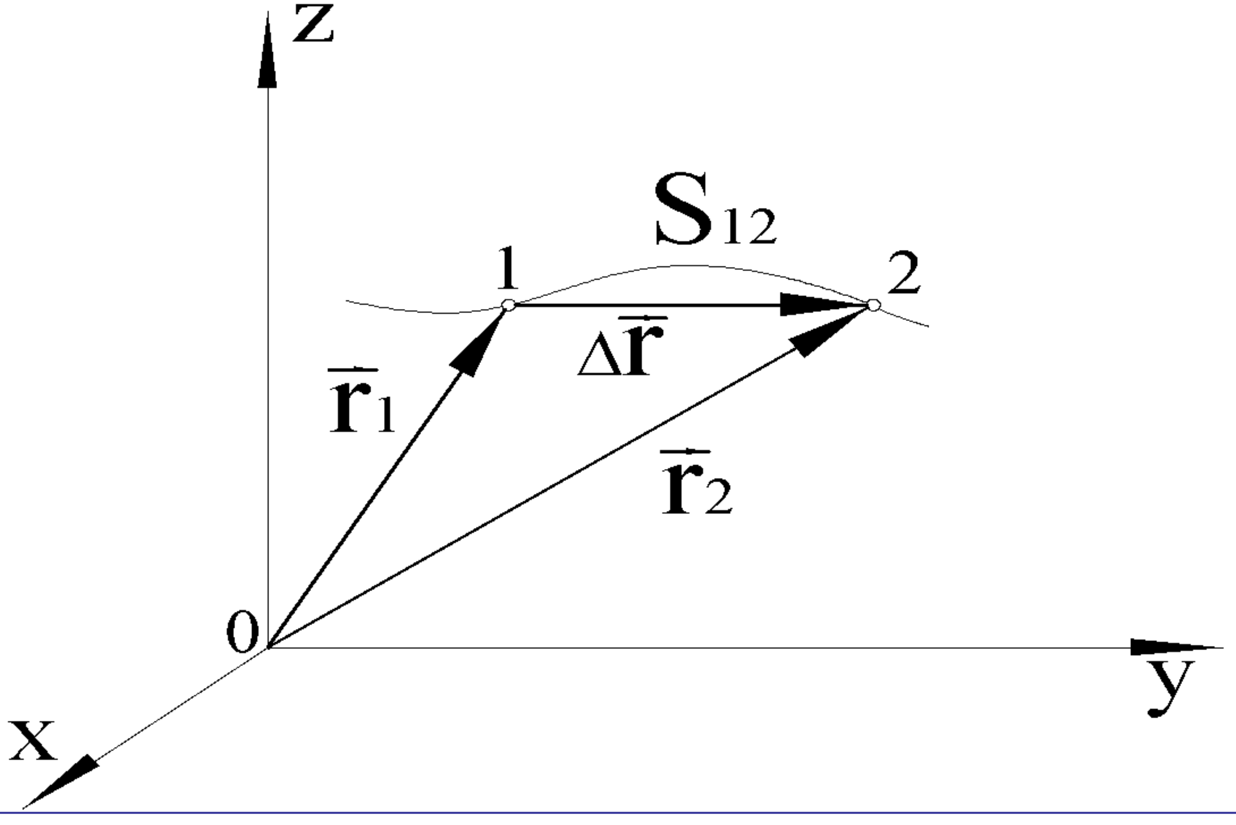
Вектор перемещения

Пусть материальная точка в момент времени t_1 находилась в точке 1, положение которой фиксирует радиус-вектор $\vec{r}_1$.

В момент времени t_2 в точке 2 с радиусом-вектором $\vec{r}_2$



Вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ соединяет начальную и конечную точки перемещения, пройденного материальной точкой за время $\Delta t = t_2 - t_1$.



Путь и перемещение

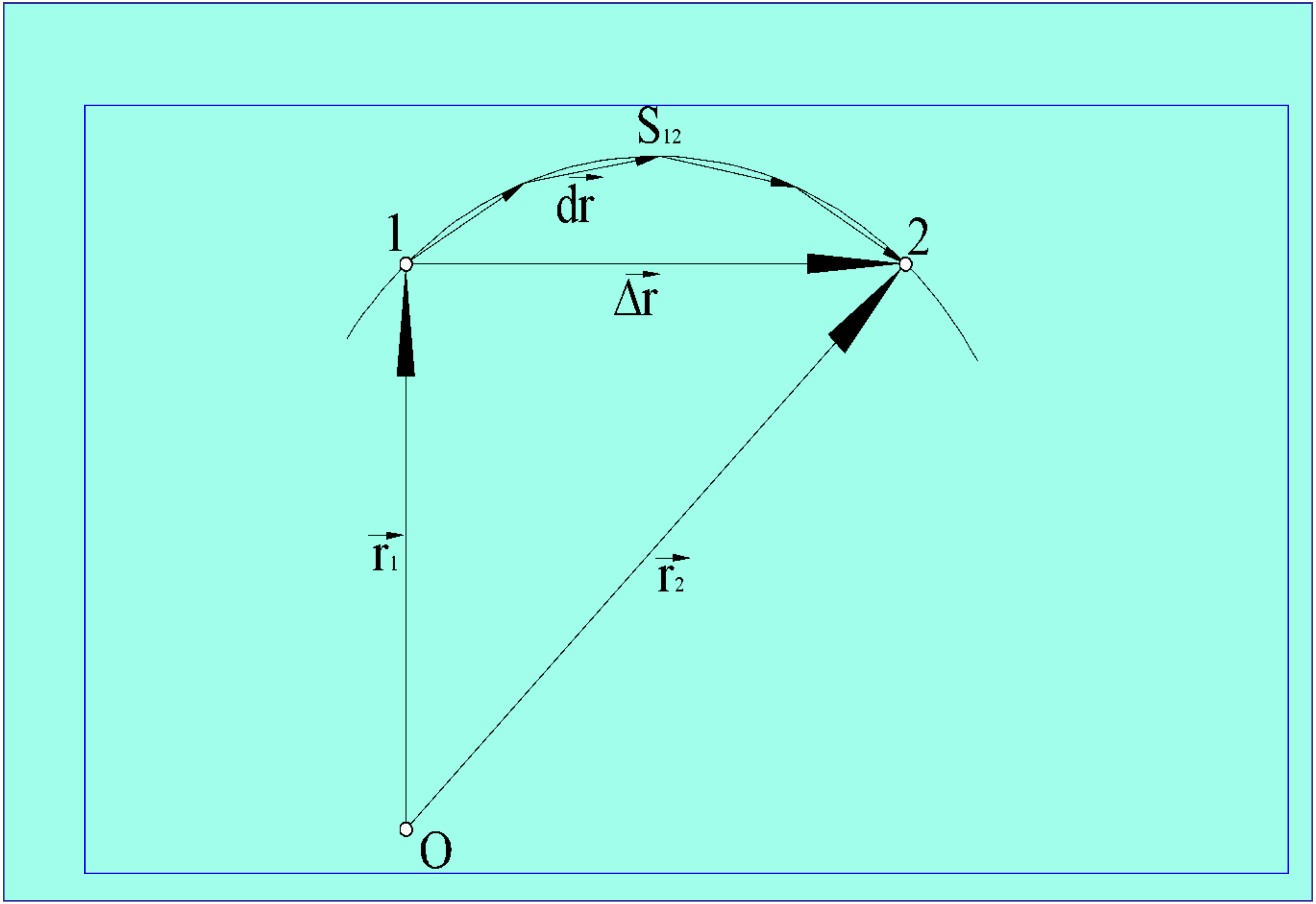
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$ - приращение радиуса – вектора.

Перемещением называется модуль вектора перемещения.

Путь - расстояние (S_{12}), пройденное по траектории.

Перемещение и путь – величины положительные.

В зависимости от вида траектории различают прямолинейное, криволинейное движения и движение по окружности.



S_{12}
$\vec{dr}$
1
2
$\Delta\vec{r}$
$\vec{r}_1$
$\vec{r}_2$
O

Элементарные путь и перемещение

Элементарное перемещение за бесконечно малый промежуток времени dt обозначается $d\vec{r}$.

Элементарный путь обозначается как dS.

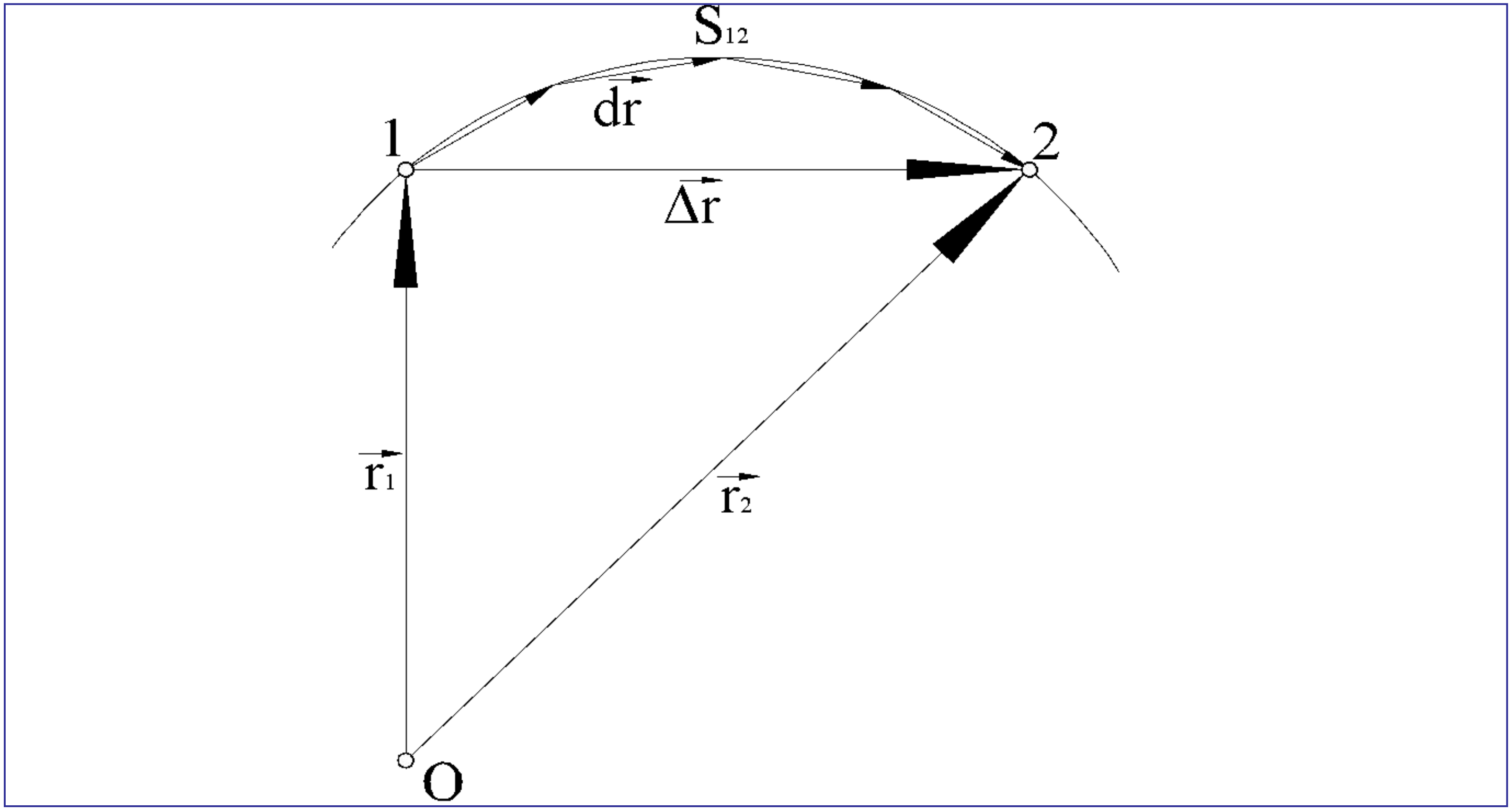
Для конечных промежутков времени в общем случае

$$|\Delta\vec{r}| \neq S_{12}$$

Для элементарных перемещений можно записать

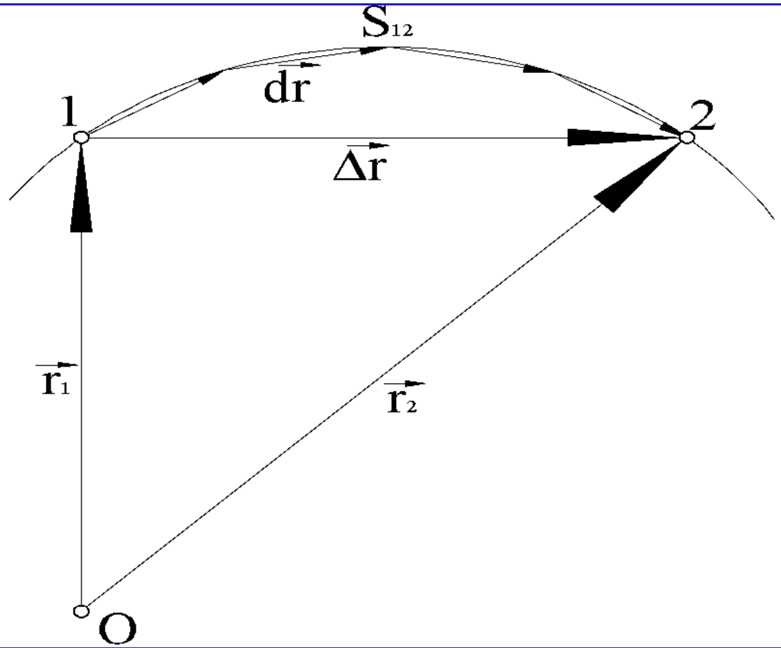
$$|d\vec{r}| = dS.$$

Перемещение по траектории из точки 1 в точку 2 можно представить как сумму бесконечно большого числа элементарных перемещений $d\vec{r}$.



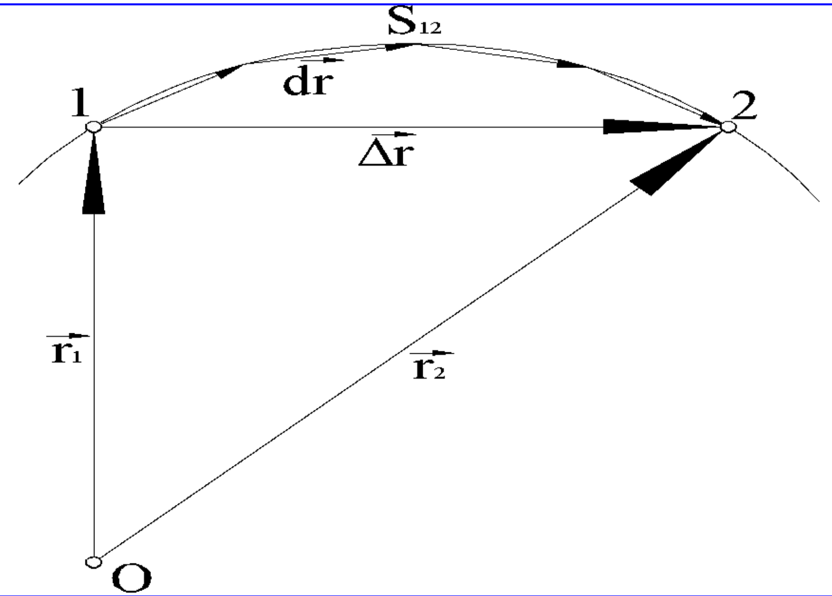
Вектор перемещения получим, просуммировав элементарные перемещения:

$$\Delta\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r}$$



При интегрировании (суммировании) модулей элементарных перемещений получим путь.

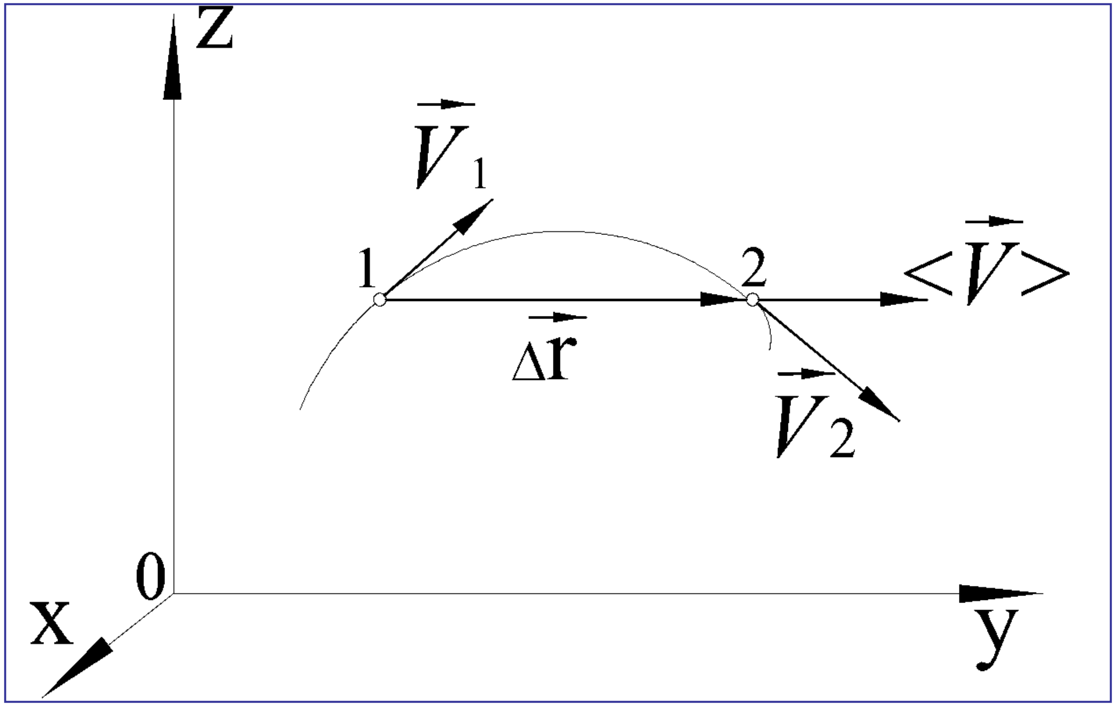
$$S_{12} = \int_{S_{12}} dS = \int_{r_1}^{r_2} |\, d\vec{r} \,|$$



Скорость

Скорость характеризует быстроту изменения пространственного положения материальной точки.

Скорость равна перемещению, совершенному точкой за единицу времени.

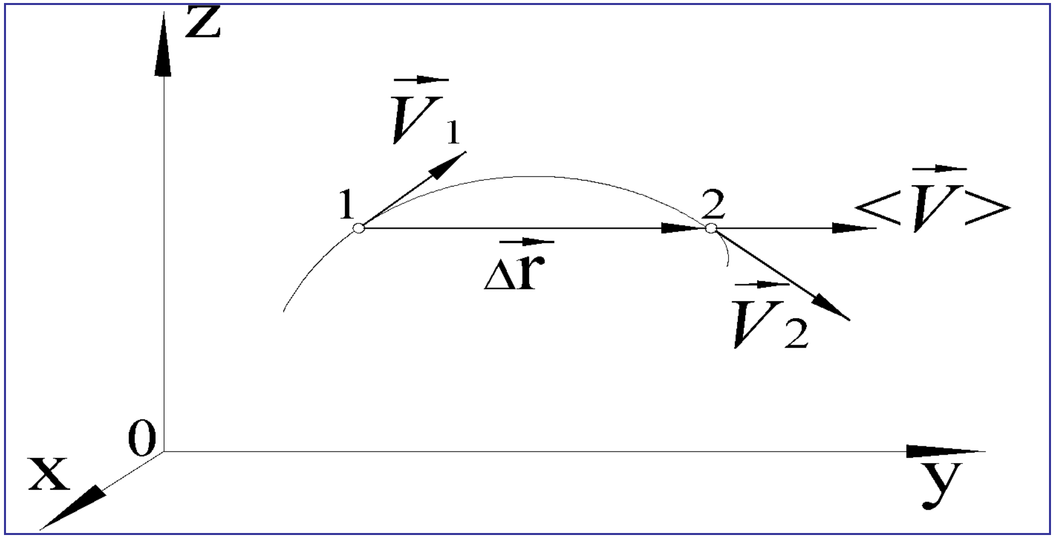


Средняя скорость

Вектор **средней скорости** за промежуток времени Δt равен

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

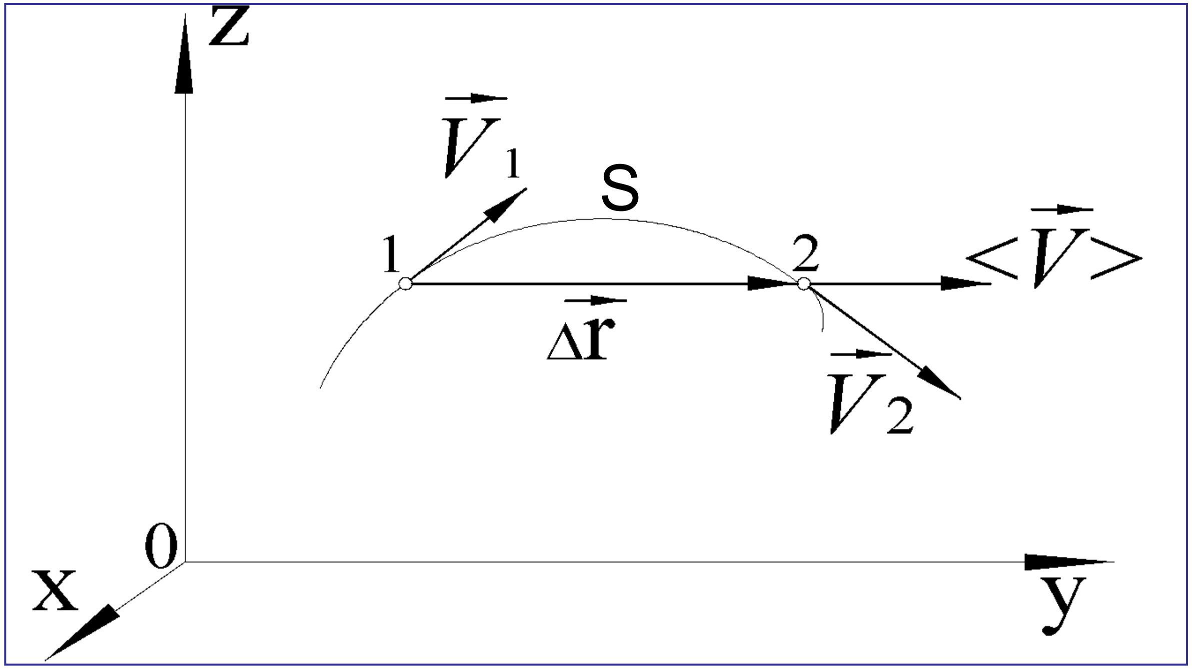
Вектор средней скорости $< \vec{v} >$ направлен вдоль вектора $\Delta \vec{r}$.



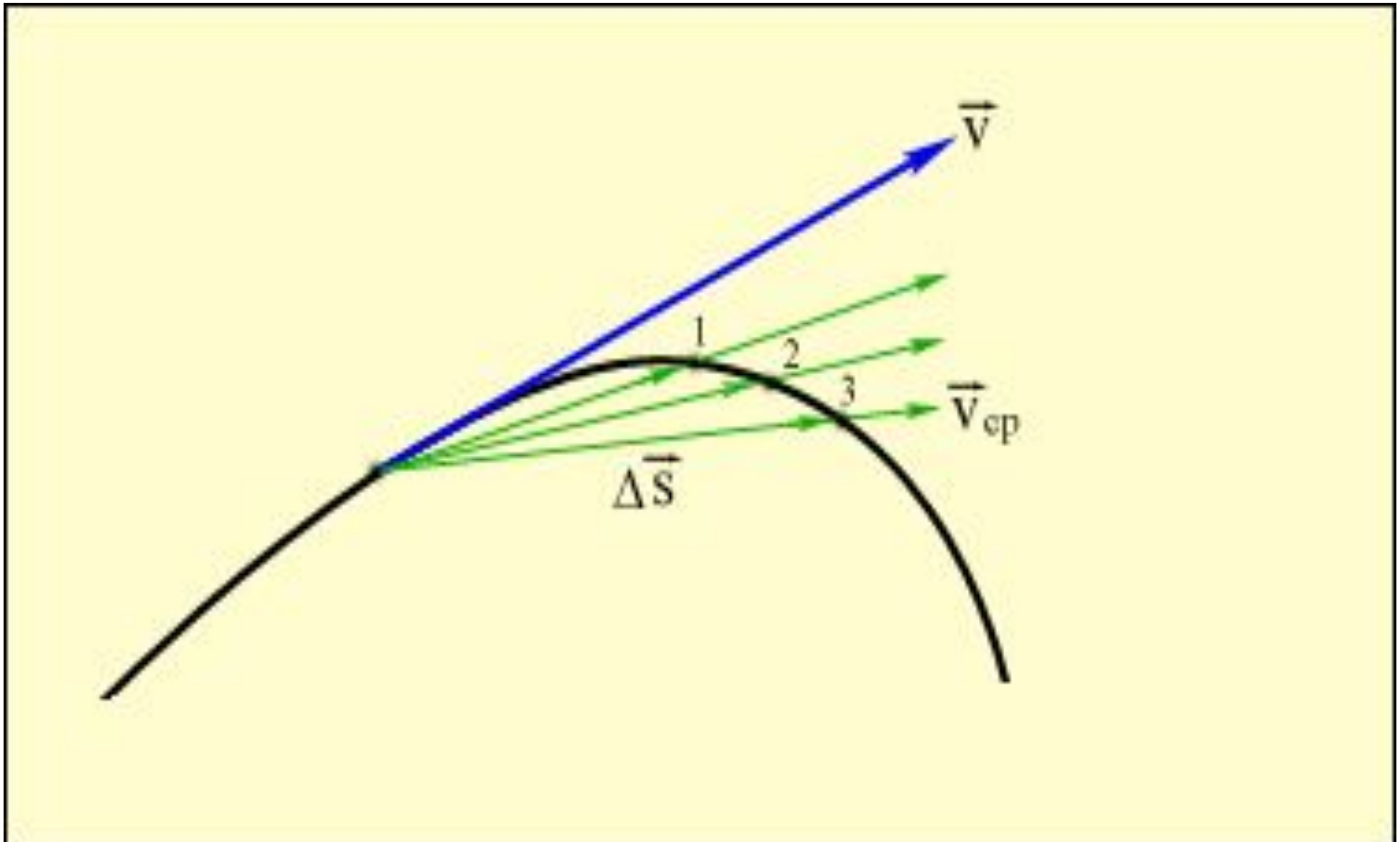
Среднее значение модуля скорости равно

$$\boxed{\langle v \rangle = \frac{S}{\Delta t}}$$

Среднее значение модуля скорости - скалярная величина.



При движении средняя скорость изменяет направление и величину.



Мгновенная скорость

Мгновенная скорость равна пределу вектора средней скорости при неограниченном убывании промежутка времени до нуля (Δt→0).

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Мгновенная скорость равна первой производной от радиуса-вектора по времени.

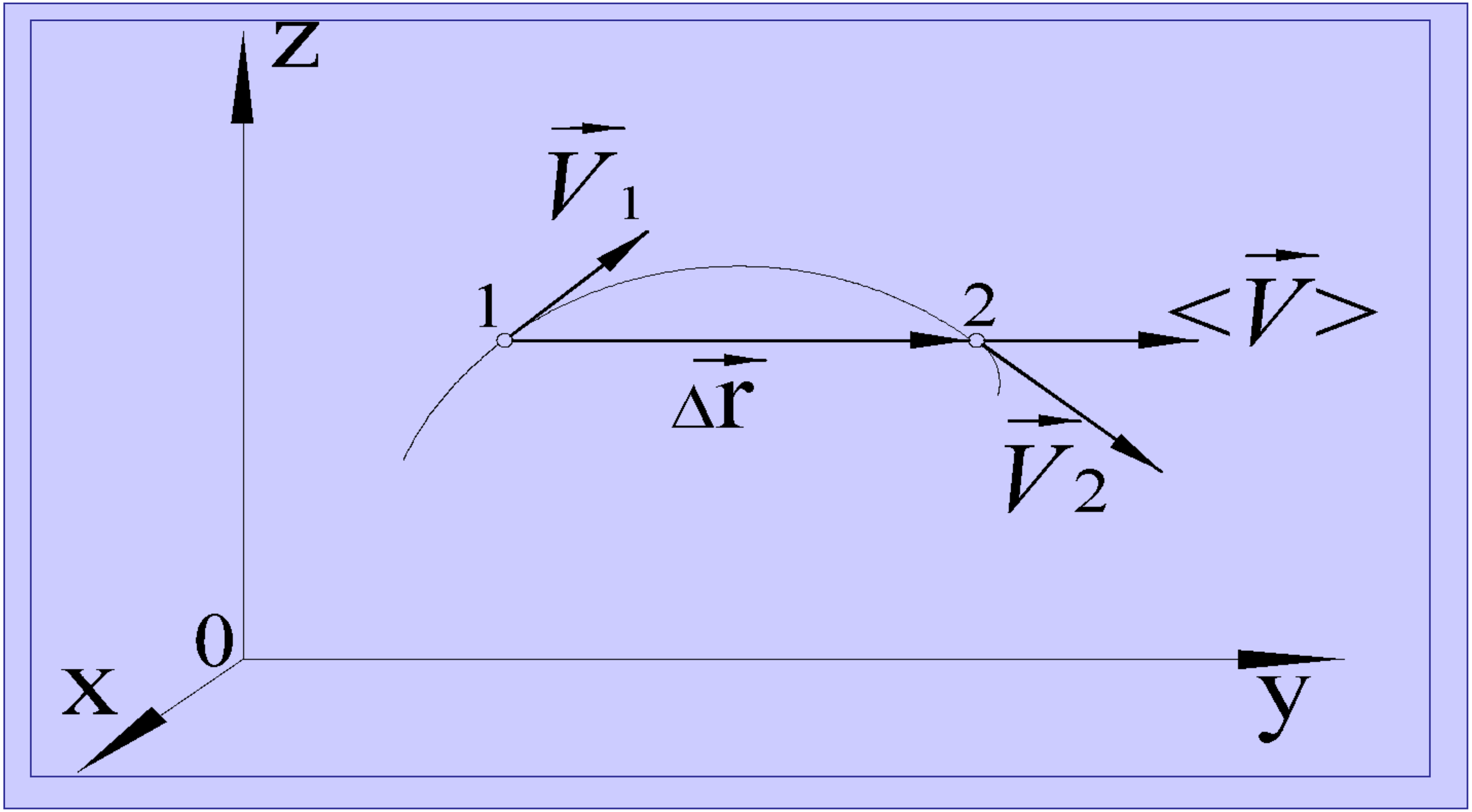
Вектор мгновенной скорости $\vec{v}$ направлен по вектору $d\vec{r}$, т. е. по касательной к траектории.

Модуль мгновенной скорости равен:

$$\mathrm{v} = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt}$$

Скорость измеряется в м/с.

Направление средней и мгновенной скоростей



Проекции скорости на оси координат

Проекции скорости на координатные оси равны первым производным от координат x, y, z по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Вектор мгновенной скорости $\vec{v}$ и его модуль V через проекции скорости v_x, v_y, v_z, можно записать как:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Ускорение

В процессе движения материальной точки модуль и направление её скорости в общем случае изменяются.

Ускорение характеризует быстроту изменения **скорости** с течением времени.

Ускорение равно изменению скорости за единицу времени.

Ускорение измеряется в $м/с^2$.

Среднее ускорение

Среднее ускорение за промежуток времени Δt равно

$$\boxed{\langle \vec{\mathbf{a}} \rangle = \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta \mathbf{t}}}$$

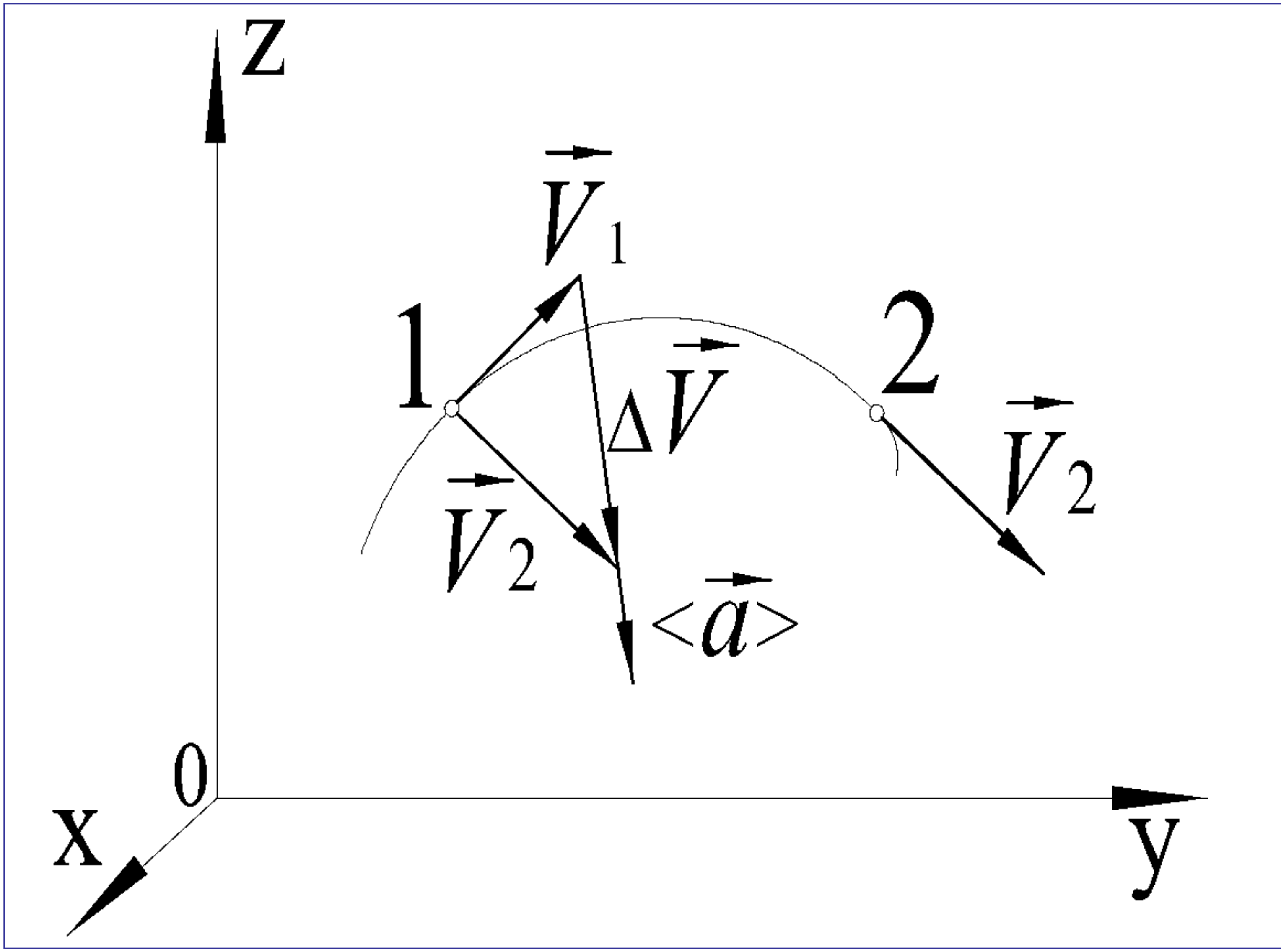
,

где

$$\boxed{\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1}$$ – приращение скорости за время Δt.

Вектор среднего ускорения $\langle \vec{\mathbf{a}} \rangle$ направлен по вектору

$$\Delta \vec{\mathbf{v}}$$



z
$\vec{V}_1$
1
2
$\Delta\vec{V}$
$\vec{V}_2$
$\vec{V}_2$
$\langle\vec{a}\rangle$
0
x
y

Мгновенное ускорение

Мгновенное ускорение равно пределу, к которому стремится среднее ускорение при неограниченном убывании промежутка времени ($\Delta t \rightarrow 0$).

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Мгновенное ускорение равно первой производной от мгновенной скорости по времени.

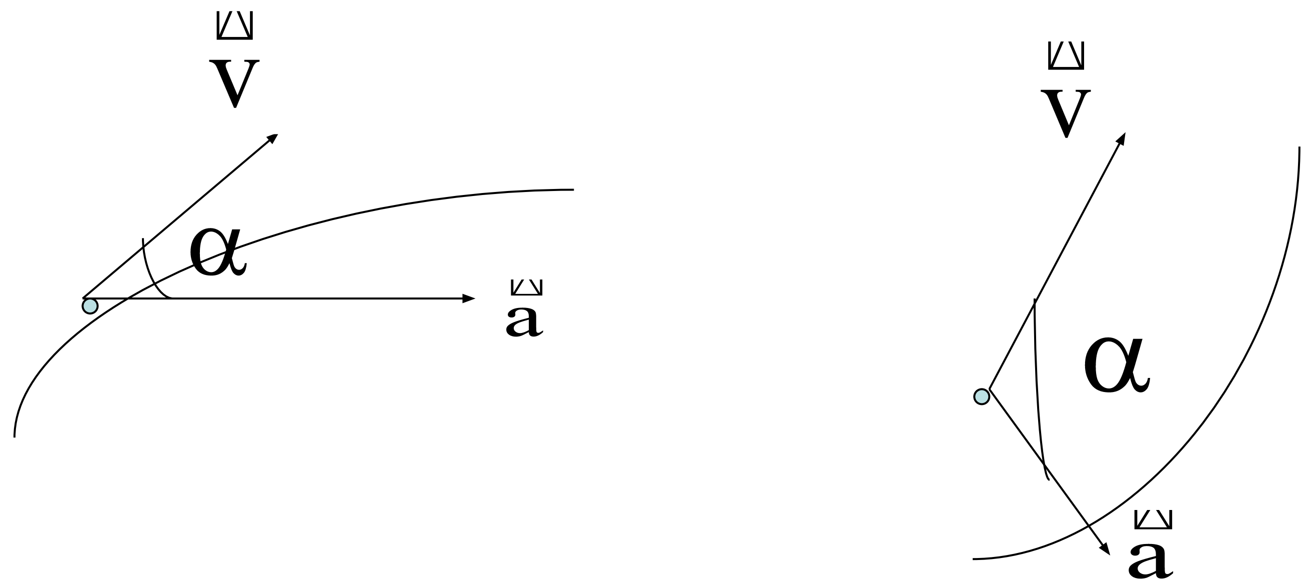
Направление вектора мгновенного ускорения $\vec{a}$ совпадает с направлением вектора $d\vec{v}$, который направлен по касательной к траектории.

Направление векторов ускорения и скорости в конкретной точке траектории не совпадают по направлению.

Мгновенное ускорение равно второй производной от радиуса – вектора по времени.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} \longleftarrow \boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}} \qquad \boxed{\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

Вектор ускорения по отношению к вектору скорости может занять любое положение под углом α.

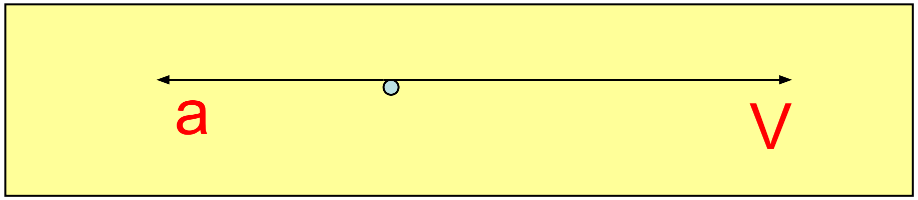


Если угол α - острый, то движение материальной точки будет являться ускоренным.

В пределе острый угол равен нулю. В этом случае движение является равноускоренным.

Если угол α - тупой, то движение точки будет замедленным.

В пределе тупой угол равен 180 $^{\circ}$. В этом случае движения будет равнозамедленным.



Проекции ускорения

Проекции вектора ускорения на координатные оси:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Вектор мгновенного ускорения $\vec{a}$ и его модуль a можно записать

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Обратная задача кинематики

В рамках кинематики решаются две основные задачи: прямая и обратная.

При решении прямой задачи по известному закону движения

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

находятся все остальные кинематические характеристики материальной точки:

путь, перемещение, скорость и ускорение в любой момент времени.

При решении обратной задачи по известной зависимости ускорения от времени ,

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}(t)}$$

находят положение материальной точки на траектории в любой момент времени.

Для решения обратной задачи нужно задать в некоторый начальный момент времени t_0 начальные условия:

- радиус-вектор $\vec{r}_0$
- скорость точки $\vec{v}_0$.

Нахождение скорости

Из определения ускорения имеем

$$d\vec{v} = \vec{a}(t)\,dt$$

Проинтегрируем

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt$$

или

$$\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt$$

Получим

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt \qquad (1)$$

Нахождение положения точки

Из определения скорости следует, что элементарное перемещение равно

$$d\vec{r} = \vec{v}(t)\,dt$$

Подставим сюда полученное равенство (1) и проинтегрируем полученное уравнение:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \left[\vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt \right] dt$$

Получим

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \left[\vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt \right] dt$$

Равномерное движение

Рассмотрим частные случаи.

1. Равномерное прямолинейное движение

(ускорение $\vec{a} = 0$ и $t_0 = 0$).

Тогда

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}_0 dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t}$$

Перейдём от векторной формы записи уравнений к скалярной:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_{0x} t}$$

Равноускоренное движение

2. Равнопеременное прямолинейное движение

(ускорение $\vec{a}$ = const и $t_0 = 0$).

Тогда

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \left[\vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}\,dt \right] dt = \vec{r}_0 + \int_0^t \left[\vec{v}_0 + \vec{a}\,t \right] dt =$$

$$= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

Полученное выражение, спроецированное на ось *x* имеет вид:

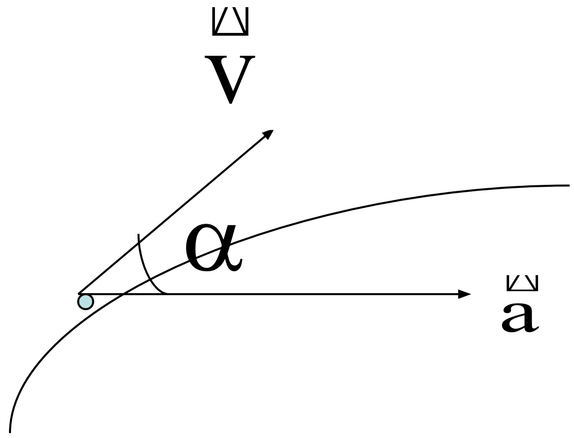
$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

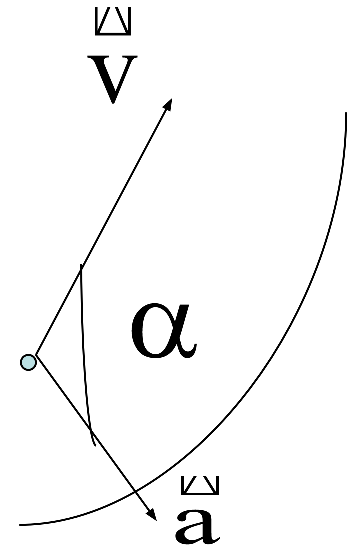
1.3. Тангенциальное и нормальное ускорения

Пусть материальная точка движется по криволинейной траектории, имея различную скорость в разных точках траектории.

Скорость при криволинейном движении может изменяться и по модулю и по направлению.

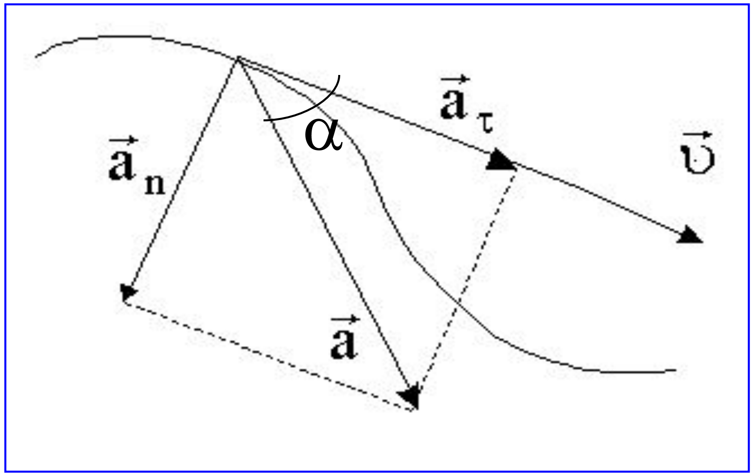
Эти изменения можно оценивать раздельно.


$\vec{V}$
α
$\vec{a}$


$\vec{V}$
α
$\vec{a}$

Вектор ускорения $\vec{a}$ можно разложить на два направления: касательное к траектории и перпендикулярное к ней (т.е. по радиусу к центру окружности).

Составляющие на эти направления носят названия тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$ и нормального ускорений $\vec{a}_n$.



$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Тангенциальное ускорение характеризует изменение скорости по модулю.

Модуль тангенциального ускорения равен модулю первой производной от скорости по времени.

$$\left|a_\tau\right| = \left|\frac{dv}{dt}\right|$$

Тангенциальное ускорение направлено по касательной к траектории.

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.

Модуль нормального ускорения равен:

$$\boxed{a_n = \frac{V^2}{R}}$$

Нормальное ускорение направлено перпендикулярно скорости по радиусу к центру кривизны траектории.

Полное ускорение

Полное ускорение материальной точки.

$$\vec{a} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_{n}$$

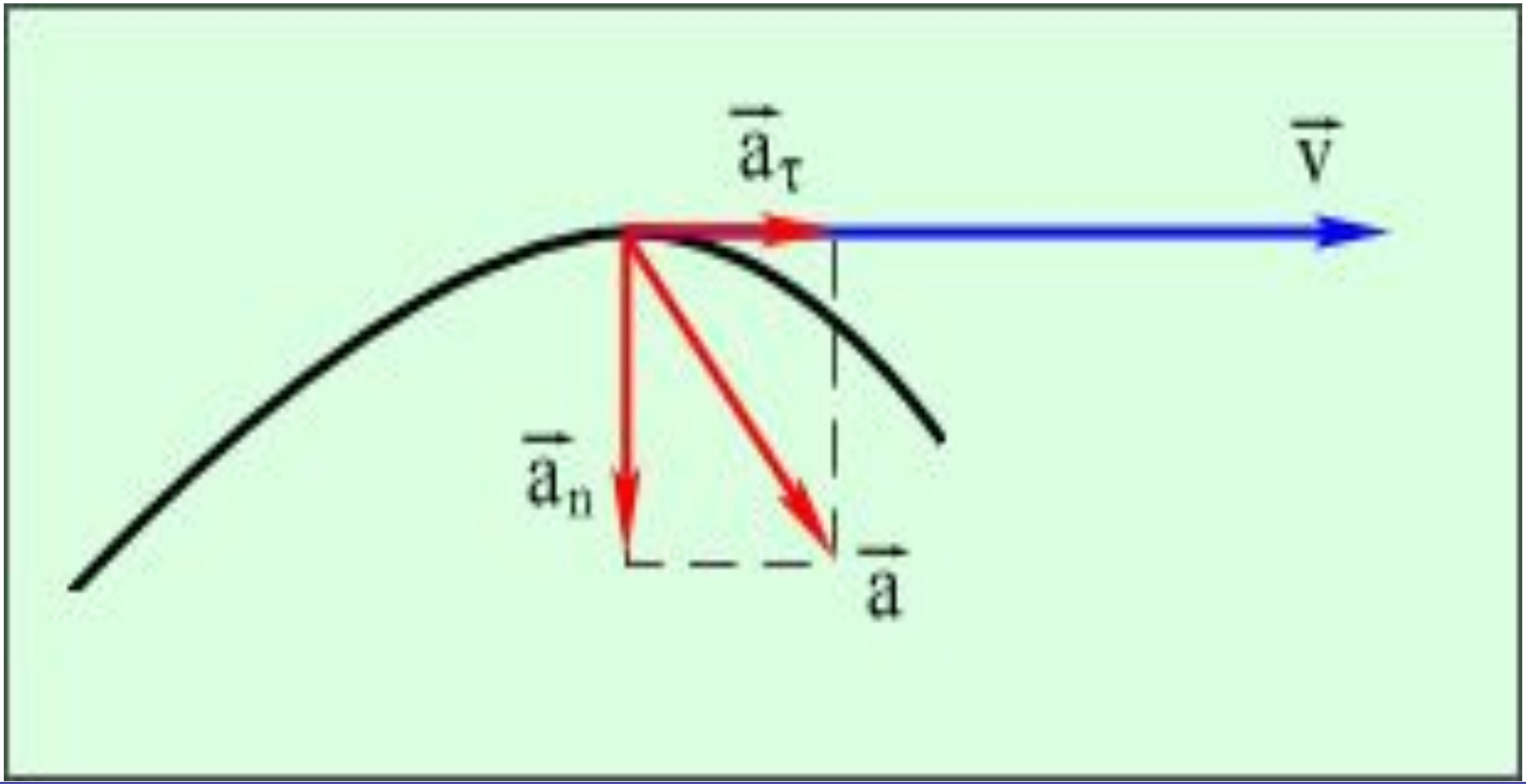
Модуль полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^{2} + a_{n}^{2}}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^{2} + \left(\frac{v^{2}}{R}\right)^{2}}$$

Движение – равноускоренное, если модуль тангенциального ускорения положителен.

При этом тангенциальное ускорение направлено по вектору скорости.



Частные случаи движений

1. $a_\tau = 0$, $a_n = 0$ - это равномерное прямолинейное движение;

2. $a_\tau = const$, $a_n = 0$ - равнопеременное прямолинейное движение;

3. $a_\tau = 0$, $a_n = const$ - равномерное движение по окружности;

4. $a_\tau = 0$, $a_n = f(t)$ - равномерное криволинейное движение;

5. $a_\tau = f(t)$, $a_n = f(t)$ - неравномерное криволинейное движение.

1.4. Кинематика вращательного движения твердого тела

Любое движение абсолютно твердого тела может быть сведено к сумме двух движений – поступательного и вращательного.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, перемещается параллельно самой себе.

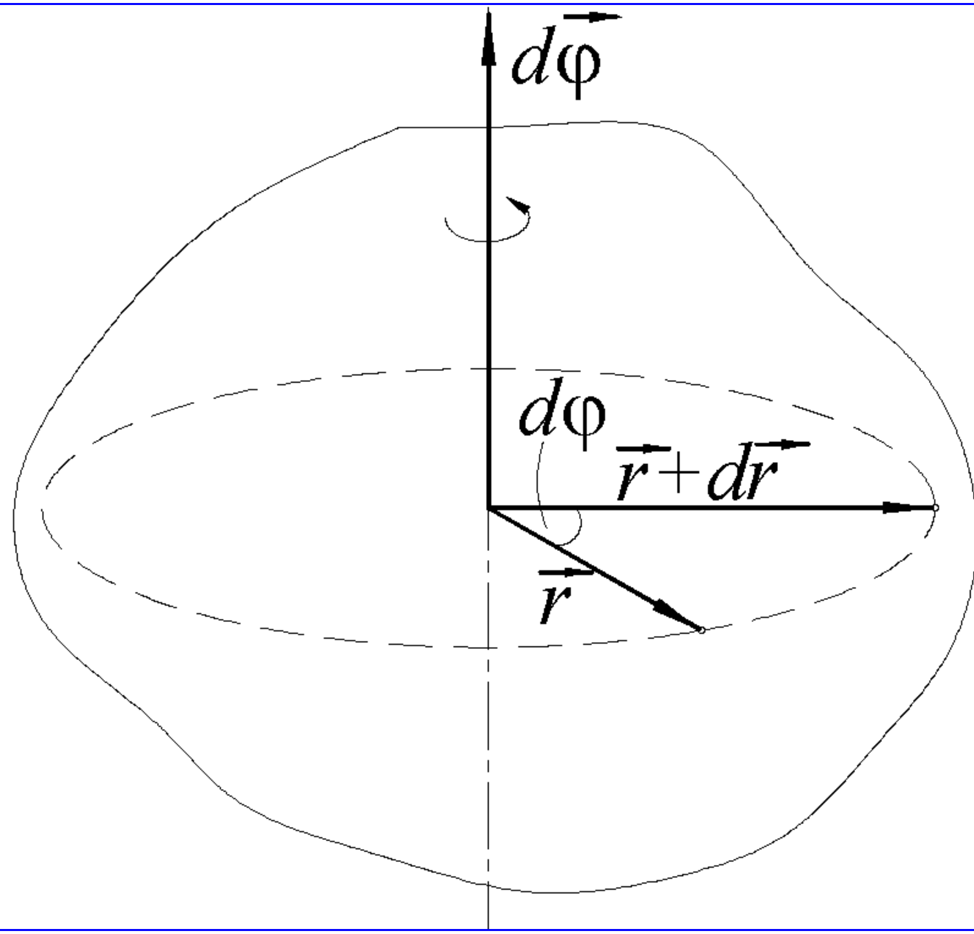
При поступательном движении все точки тела движутся одинаково, поэтому движение тела можно охарактеризовать движением одной точки(например, движением центра масс тела).

При вращательном движении различные точки твёрдого тела движутся по-разному.

Вращательное движение нельзя охарактеризовать движением определённой точки.

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной неподвижной прямой, называемой осью вращения.

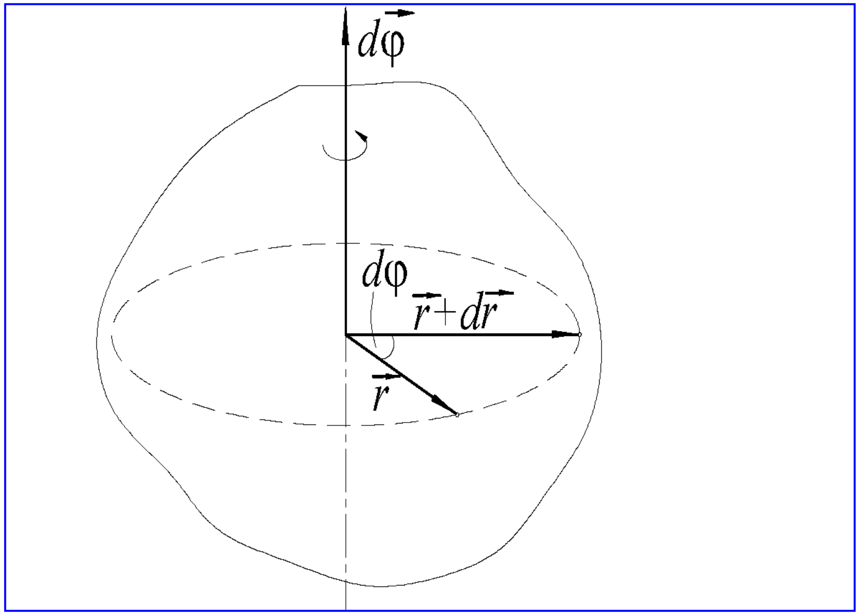
При вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси радиус-векторы, проведенные из центров соответствующих окружностей к точкам тела за время dt поворачиваются на один и тот же угол dϕ.



$d\vec{\varphi}$
$d\varphi$
$\vec{r}+d\vec{r}$
$\vec{r}$

Угловое перемещение

Угловое перемещение твердого тела – вектор, численно равный углу поворота тела dφ и направленный вдоль оси вращения так, что если смотреть с его конца, то вращение тела кажется происходящим против часовой стрелки (правило буравчика).



Быстроту изменения углового перемещения с течением времени характеризует угловая скорость.

Средняя угловая скорость твердого тела численно равна угловому перемещению, совершаемому телом за единицу времени.

$$\langle \vec{\omega} \rangle = \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t}$$

Мгновенная угловая скорость равна пределу, к которому стремится средняя угловая скорость при неограниченном убывании промежутка времени до нуля.

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

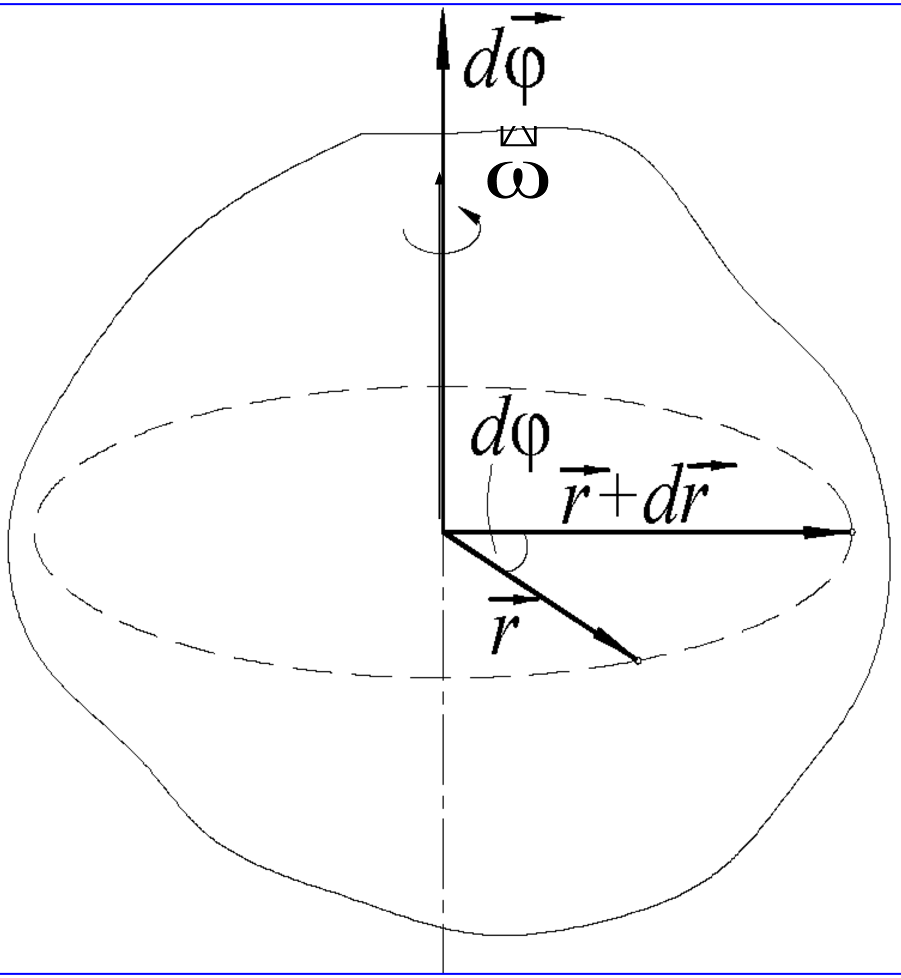
Мгновенная угловая скорость равна первой производной от углового перемещения по времени.

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

Угловая скорость измеряется в рад/с.

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ совпадает по направлению с вектором углового перемещения $d\vec{\varphi}$ (т.е. определяется по правилу буравчика).

Направление векторов



Быстроту изменения угловой скорости с течением времени характеризует угловое ускорение.

Среднее угловое ускорение твердого тела равно изменению угловой скорости за единицу времени.

$$\langle \vec{\varepsilon} \rangle = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}$$

Мгновенное угловое ускорение равно пределу, к которому стремится среднее угловое ускорение при неограниченном убывании промежутка времени до нуля.

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

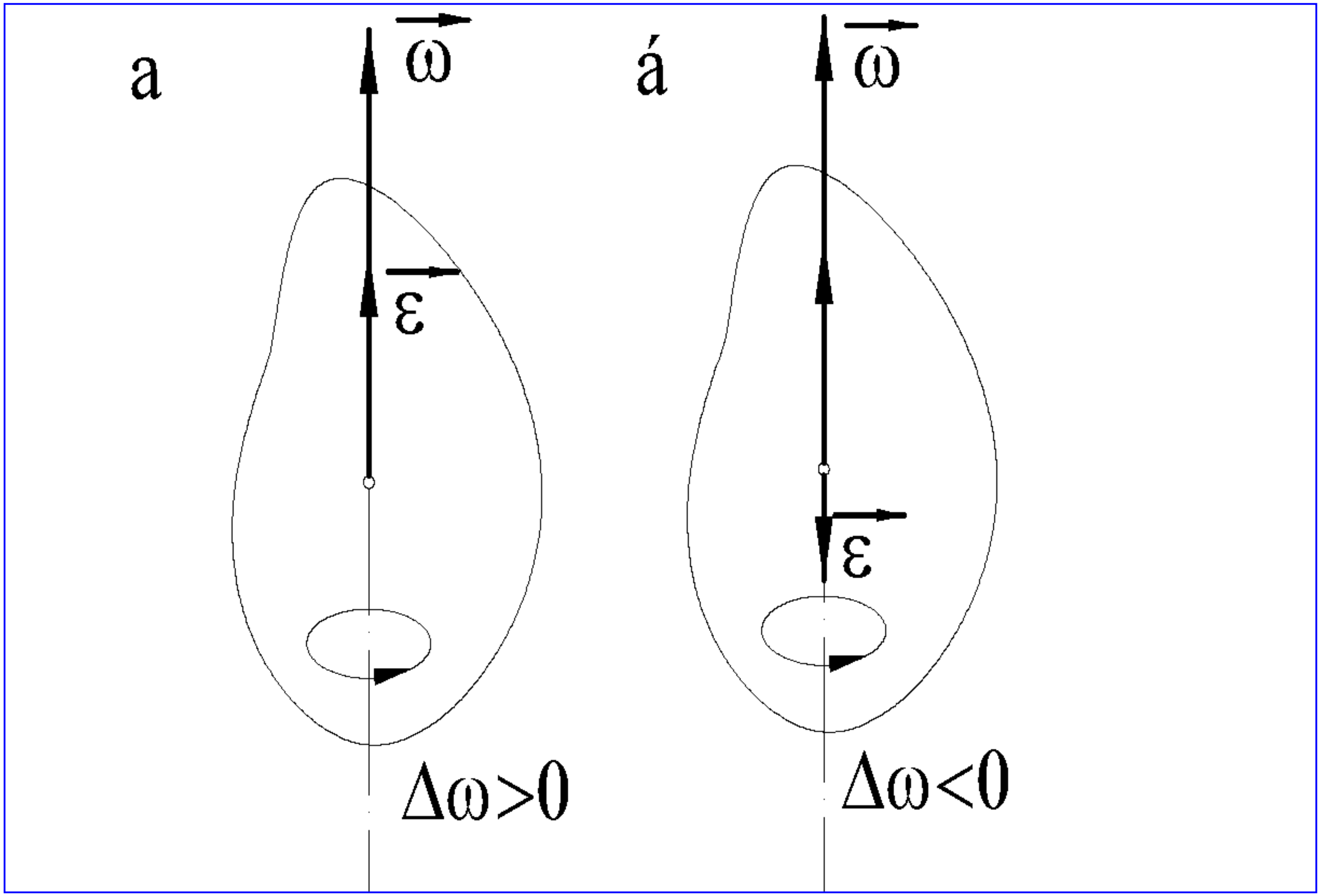
Мгновенное угловое ускорение равно первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от углового перемещения по времени.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

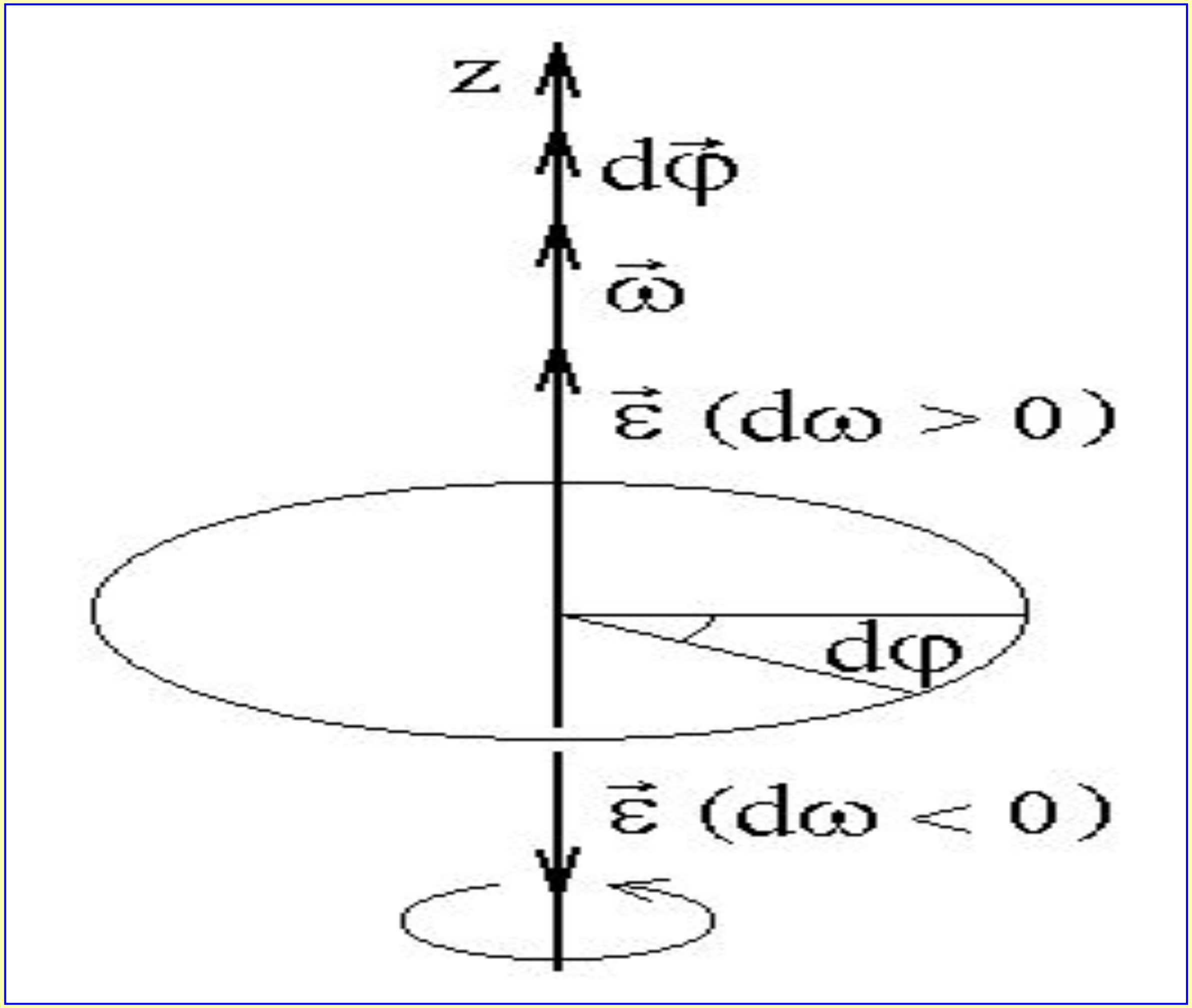
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Угловое ускорение измеряется в рад/с^2.

Направление угловых векторов.



Направления угловых векторов



Вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен вдоль оси вращения в ту же сторону, что и $d\vec{\omega}$ при ускоренном вращении ($\vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$), при замедленном - $\vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$

Модули векторов $d\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ равны соответственно

$$\left|d\vec{\varphi}\right| = d\varphi$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

Обратная задача кинематики при вращательном движении

При вращательном движении обратная задача кинематики выполняется при следующих формулах:

$$\boxed{d\varphi = \omega \cdot dt} \longrightarrow \boxed{\varphi = \int \omega \cdot dt + \varphi_0}$$

$$\boxed{d\omega = \varepsilon \cdot dt} \longrightarrow \boxed{\omega = \int \varepsilon \cdot dt + \omega_0}$$

При равномерном вращении:

$$\varepsilon = 0, \qquad \omega = \mathrm{const}, \qquad \phi = \omega t.$$

При равнопеременном вращении:

$$\varepsilon = \mathrm{const},$$

$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t} \qquad \boxed{\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}}$$

Период и частота вращения

Для характеристики равномерного вращательного движения используются следующие величины.

Период вращения T – время одного оборота тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

Частота вращения ν – количество оборотов, совершаемых телом за единицу времени.

$$T = \frac{1}{\nu}$$

Угловая скорость может быть выражена следующим образом:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

1.5. Взаимосвязь угловых и линейных величин

Кроме угловых величин: углового перемещения, угловой скорости и углового ускорения движение каждой точки вращающегося твердого тела характеризуют линейные величины:

линейное перемещение $d\vec{r}$,

линейный путь dS,

линейная скорость $\vec{v}$,

тангенциальное $\vec{a}_{\tau}$,

нормальное $\vec{a}_{n}$ и

полное $\vec{a}$ линейные ускорения.

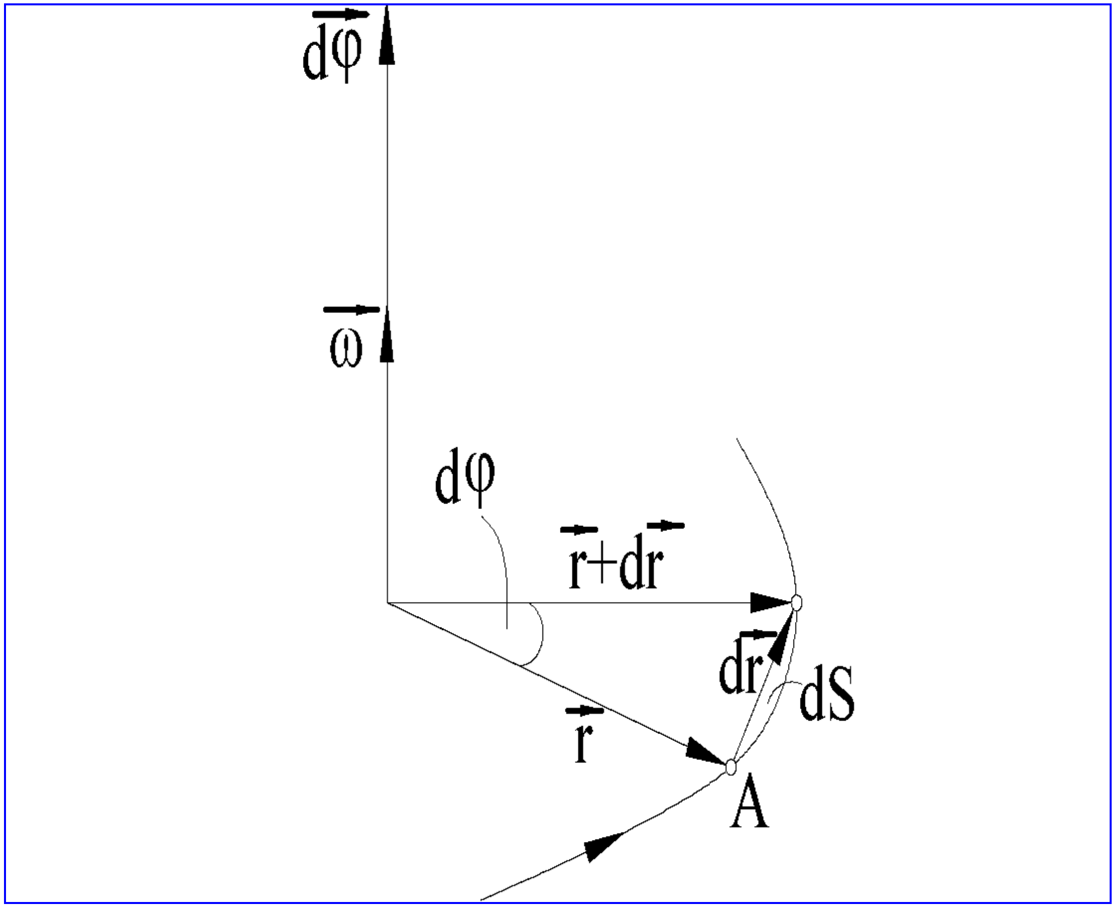
Пусть за время dt произвольная точка твердого тела A переместится на $d\vec{r}$, пройдя путь dS. При этом радиус - вектор точки повернется на угол $d\varphi$.

Тогда

$$\boxed{dS = d\varphi \cdot r}$$

В векторном виде:

$$\boxed{d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}}$$

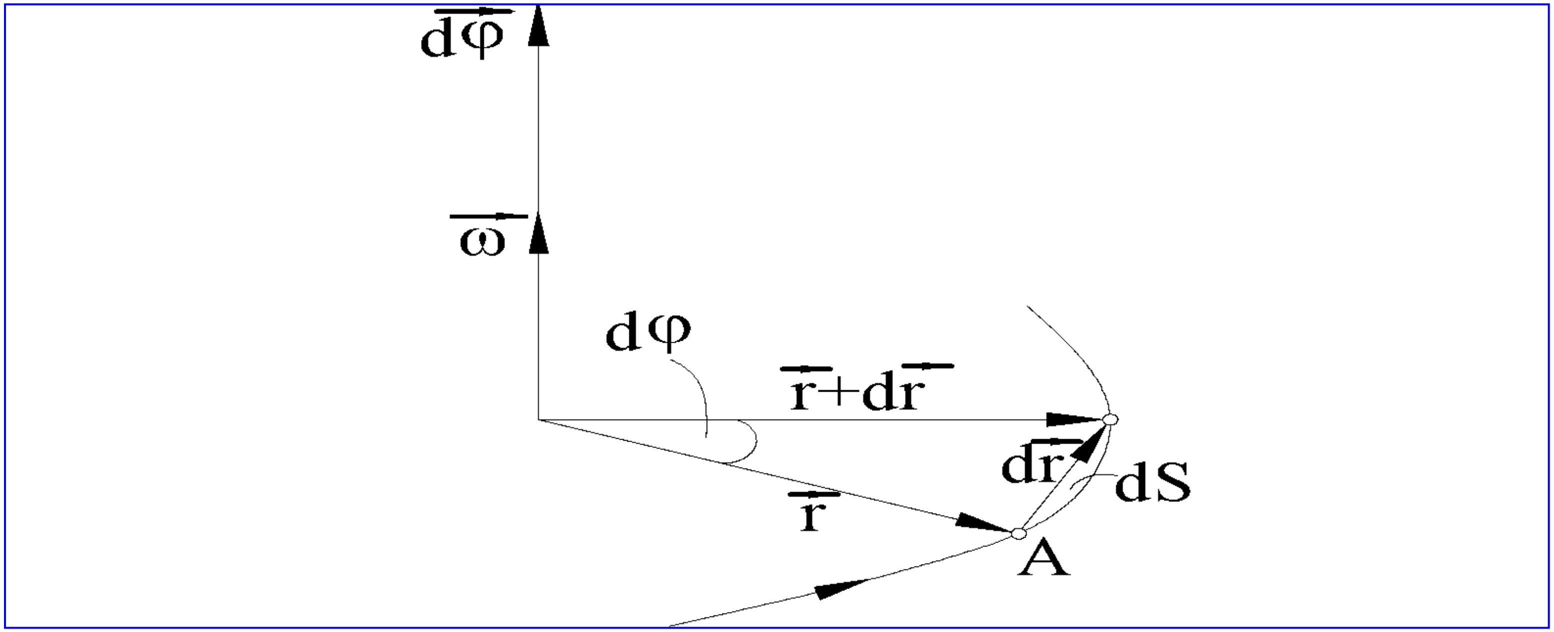


Направление $d\vec{r}$ перпендикулярно к $\vec{r}$ и к $d\vec{\varphi}$.

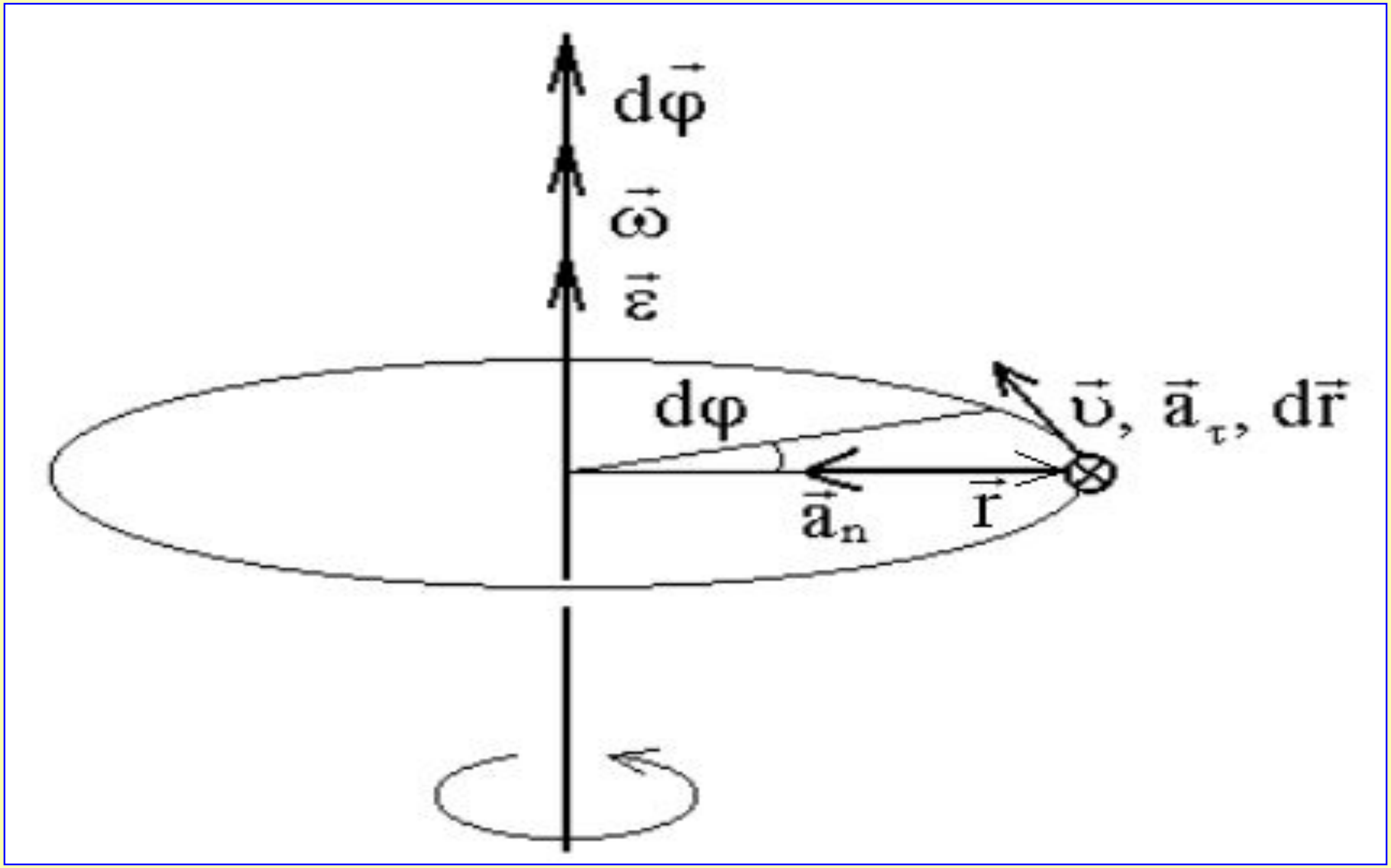
Если смотреть с конца $d\vec{r}$, то поворот от $d\vec{\varphi}$ к $\vec{r}$ происходит против часовой стрелки.

Модуль вектора $d\vec{r}$ равен

$$\boxed{\left| d\vec{r} \right| = dS = d\varphi \cdot r}$$



Направления векторов



Вектор элементарного перемещения: $d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$

Разделим это соотношение на dt: $$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}$$

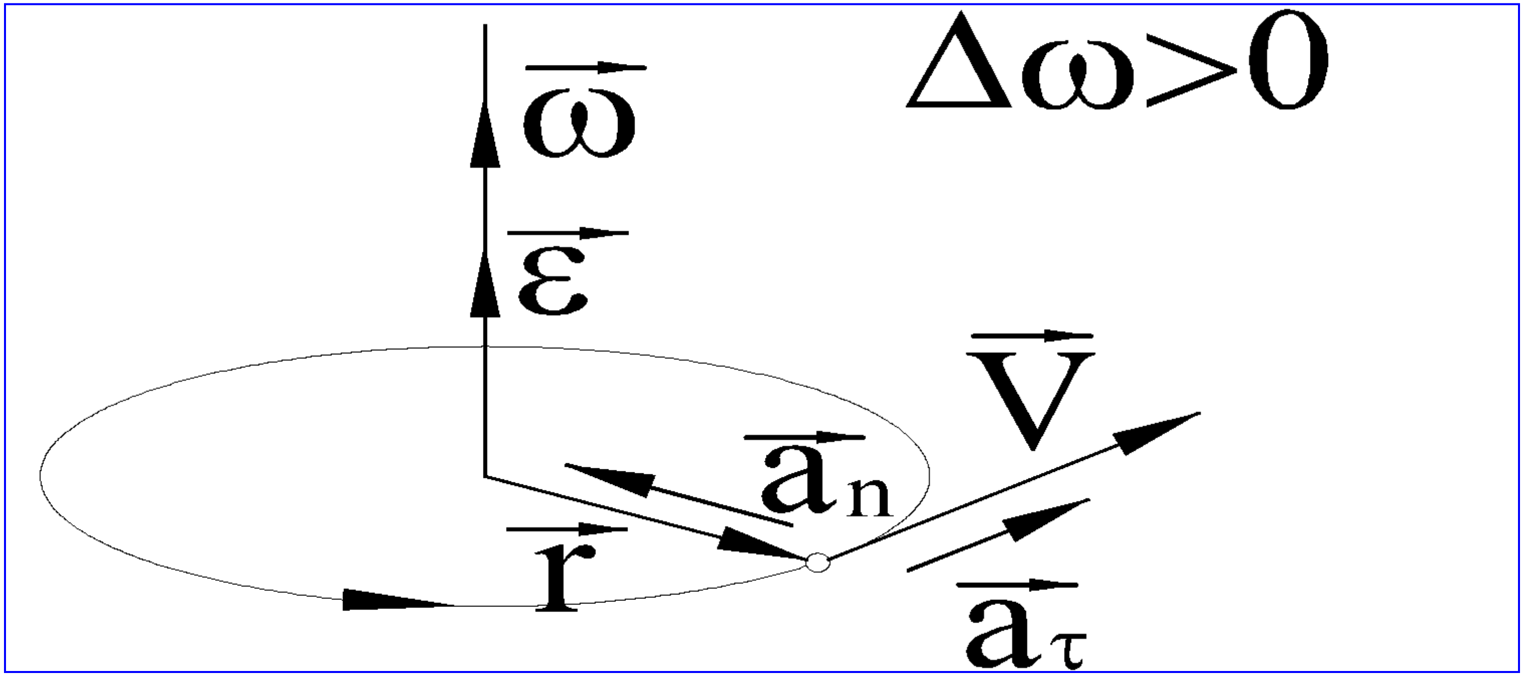
Учтём, что $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ $\dfrac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega}$

Получим

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Линейная скорость данной точки твёрдого тела равна векторному произведению угловой скорости на радиус - вектор точки.

Если смотреть с конца вектора $\vec{v}$, то поворот от $\vec{\omega}$ к $\vec{r}$ происходит против часовой стрелки.



Формула, связывающая между собой модули мгновенных линейной и угловой скоростей:

$$V = \omega \cdot r \cdot \sin 90° = \omega r$$

Продифференцируем выражения для v по времени:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

Учтём, что $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ – линейное ускорение, $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ - линейная скорость.

Получим

$$\vec{a} = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{v})$$

и сравним

$$\vec{a} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_{n}$$

Первый вектор в правой части - тангенциальное ускорение.

Он характеризует изменение модуля линейной скорости.

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

Тангенциальное ускорение направлено по касательной к окружности.

Модуль тангенциального ускорения равен:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r \cdot \sin 90° = \varepsilon \cdot r$$

Второй вектор в правой части равенства – нормальное ускорение.

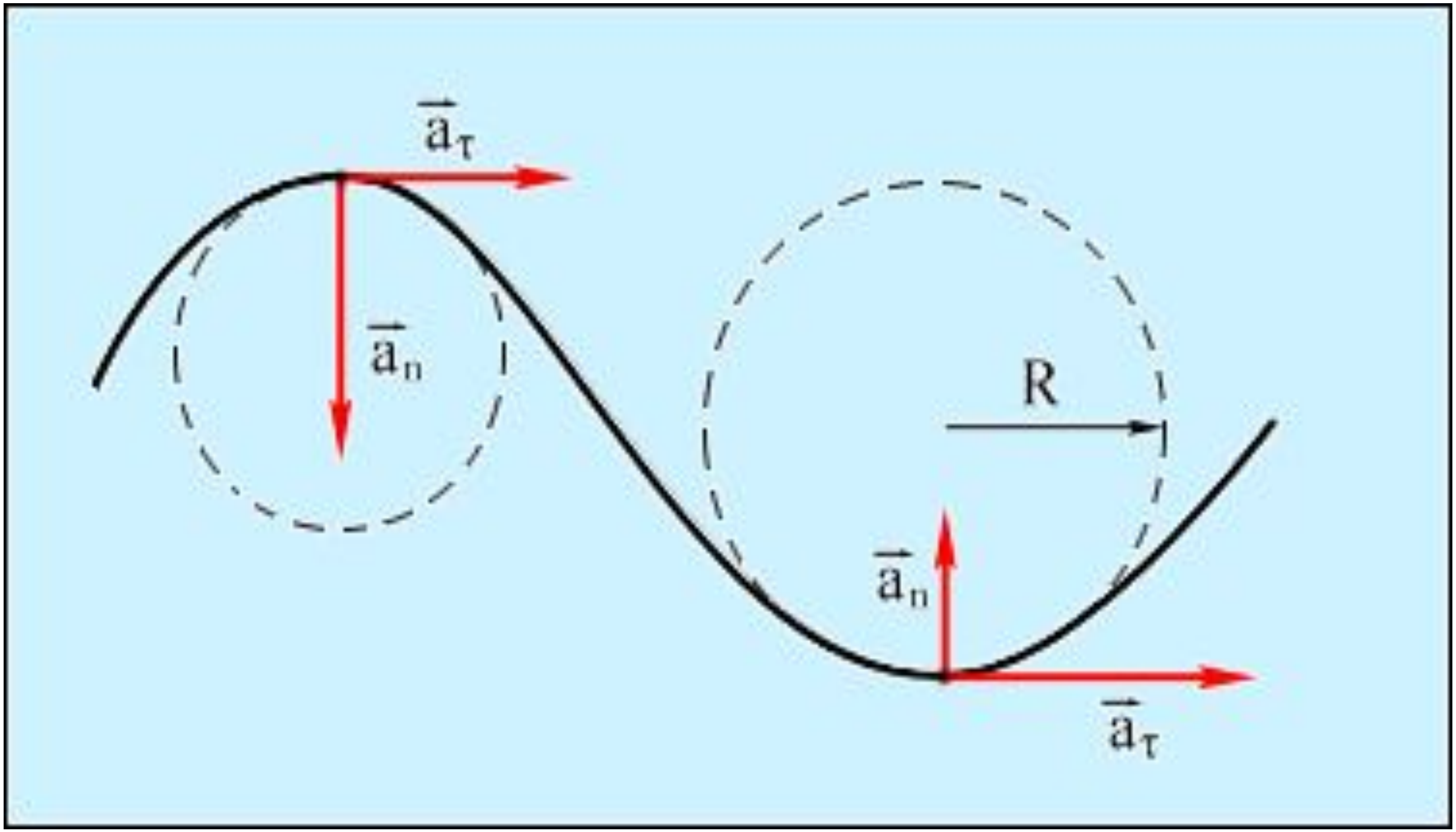
$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Оно направлено к центру окружности.

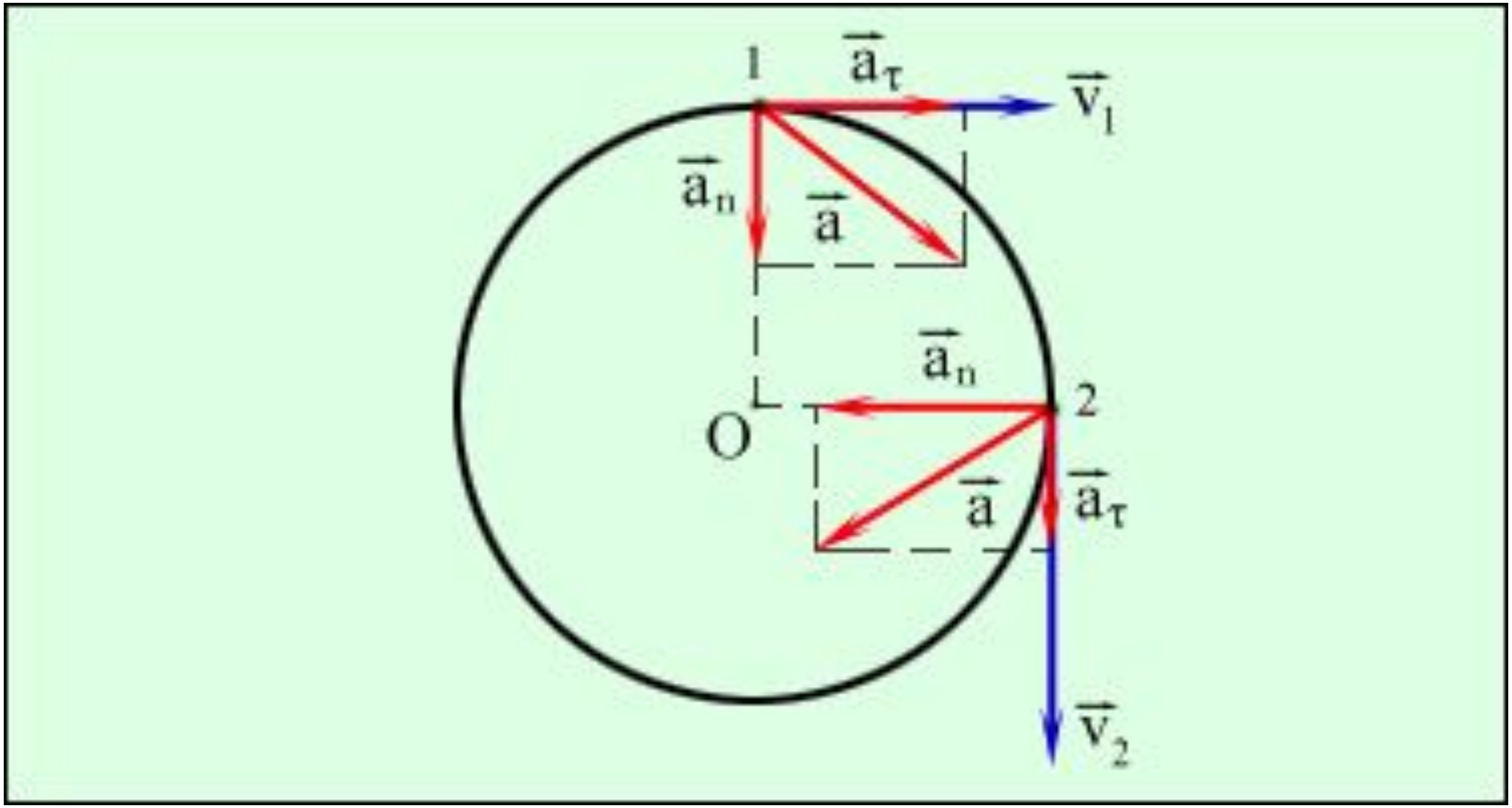
Оно характеризует изменение направления линейной скорости.

Модуль нормального ускорения равен

$$a_n = \omega \cdot v \cdot \sin 90° = \omega \cdot v = V^2/r$$



$\vec{a}_\tau$
$\vec{a}_n$
R
$\vec{a}_n$
$\vec{a}_\tau$



1
$\vec{a}_\tau$
$\vec{v}_1$
$\vec{a}_n$
$\vec{a}$
$\vec{a}_n$
2
O
$\vec{a}$
$\vec{a}_\tau$
$\vec{v}_2$

Сравнительная таблица формул

Движение	Поступательное	Вращательное
Равномерное	$S = Vt$ $V = const$ $a = 0$	$\phi = \omega t$ $\omega = const$ $\varepsilon = 0$
Равнопеременное	$S = V_0 t \pm at^2/2$ $V = V_0 \pm at$ $a = const$	$\phi = \omega_0 t \pm \varepsilon t^2/2$ $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$ $\varepsilon = const$

Сравнительная таблица формул

Движение	Поступательное неравномерное	Вращательное
	$S = f(t)$	$\phi = f(t)$
	$\langle V \rangle = (S_2 - S_1)/(t_2 - t_1)$	$\langle \omega \rangle = (\phi_2 - \phi_1)/(t_2 - t_1)$
	$V = dS/dt$	$\omega = d\phi/dt$
	$\langle a \rangle = (V_2 - V_1)/(t_2 - t_1)$	$\langle \varepsilon \rangle = (\omega_2 - \omega_1)/(t_2 - t_1)$
	$a = dV/dt$	
	$a_\tau = dV/dt$	$a_\tau = \varepsilon \cdot r$
	$a_n = V^2/r$	$a_n = \omega^2 r$
		$T = 1/n = 2\pi/\omega$
		$\omega = 2\pi n$