УПРУГИЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ

Упругие деформации

$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_0; \quad u_i = x_i - x_i^0$$

Тензор деформаций

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k^0} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i^0}\frac{\partial u_l}{\partial x_k^0}\right)$$

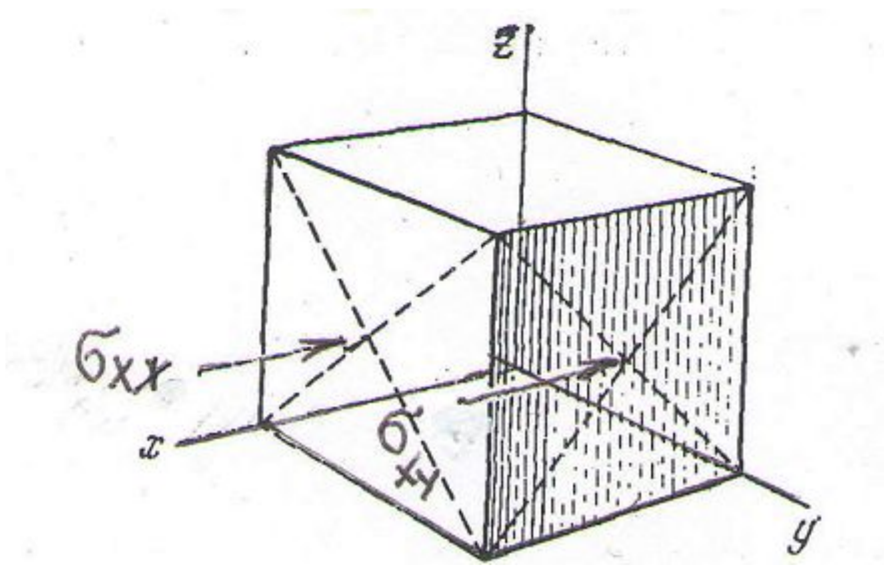
Расширение

$$\delta = \frac{V - V_0}{V_0} \approx \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = div\,\vec{u}$$

УПРУГИЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ

Тензор напряжений

$$(\sigma_{ik}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$



Компоненты напряжений

УПРУГИЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ

Уравнения движения упругой среды

$$\rho \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \rho \vec{q} + \vec{f};$$

$$\rho \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \rho q_i + f_i$$

.

Закон Гука

$$\sigma_{ik} = C_{iklm}\gamma_{lm}, \quad где\ C_{iklm} = \left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial \gamma_{lm}}\right)_{\gamma_{lm}=0}$$

УПРУГИЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ

Плотность упругой энергии

$$\Phi = \frac{1}{2}\sigma_{ik}\gamma_{ik}$$

Плотность упругой энергии в кубических кристаллах

$$\Phi = \frac{1}{2}C_{11}(\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \gamma_{33}^2) + \frac{1}{2}C_{44}(\gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2 + \gamma_{12}^2) +$$

$$+ C_{12}(\gamma_{22}\gamma_{33} + \gamma_{33}\gamma_{11} + \gamma_{11}\gamma_{22})$$

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В КРИСТАЛЛАХ

Законы распространения упругих волн

$$\rho \ddot{u}_i = C_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l}$$

Вектор смещения плоской монохроматической волны

.

$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$, где $\vec{u}_0$ - векторная амплитуда,

$e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$ - фазовый множитель

Форма волны определяется поверхностью равных фаз

$$\varphi = \vec{k}\vec{r} - \omega t = c = const$$

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В КРИСТАЛЛАХ

Упругие волны в кубических кристаллах

1. Уравнение движения для смещения u_1 в направлении оси x

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=C_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+C_{44}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right)+(C_{12}+C_{44})\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3}\right)$$

2. Уравнение движения для смещения u_2 в направлении оси y

$$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=C_{11}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+C_{44}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}\right)+(C_{12}+C_{44})\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\partial x_3}\right)$$

3. Уравнение движения для смещения u_3 в направлении оси z

$$\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}=C_{11}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+C_{44}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}\right)+(C_{12}+C_{44})\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3\partial x_2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3}\right)$$

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

1. Волны в направлении [100]:

$$u_1 = u_{01} e^{i(kx_1 - \omega t)}$$

$$u_2 = u_{02} e^{i(kx_1 - \omega t)}$$

$$u_3 = u_{03} e^{i(kx_1 - \omega t)}$$

2. Волны в направлении [110]:

$$u_3 = u_{03} e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$$

$$u_1 = u_{01} e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$$

$$u_2 = u_{02} e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$$

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

Волны в направлении [110]

Из уравнений движений для смещений u_1 и u_2, получим

$$\omega^2 \rho u_1 = (C_{11}k_x^2 + C_{44}k_y^2)u_1 + (C_{12} + C_{44})k_x k_y u_2,$$

$$\omega^2 \rho u_2 = (C_{11}k_y^2 + C_{44}k_x^2)u_2 + (C_{12} + C_{44})k_x k_y u_1.$$

Условие существования нетривиального решения

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 \rho + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{44})k^2 & \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44})k^2 \\ \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44})k^2 & -\omega^2 \rho + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{44})k^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega^2 \rho = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12} + 2C_{44})k^2, \quad \omega^2 \rho = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})k^2.$$

Первый корень соответствует продольной волне, второй – поперечной.