$$\frac{dy}{dx} = f(y, x) \quad (1) \quad y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

где

y - зависимая переменная,

x - независимая переменная,

$f(y,x)$ - функция производной = правая часть,

x_0 - начальное значение независимой переменной,

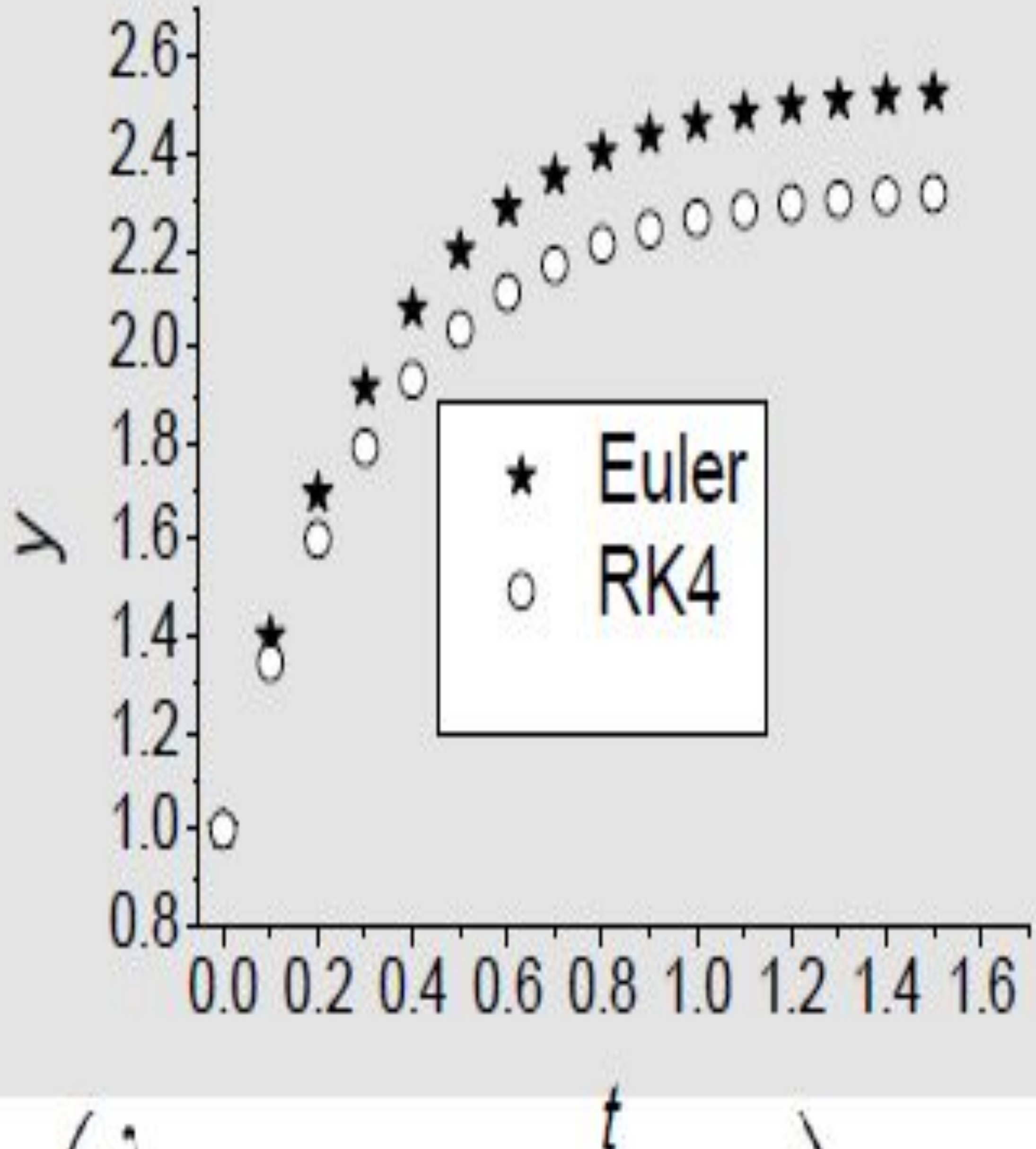
y_0 - начальное значение зависимой переменной.

$$\frac{dy}{dt} = \lambda e^{-\alpha t} y \quad (3) \quad y(t_0) = y_0 \quad (4)$$

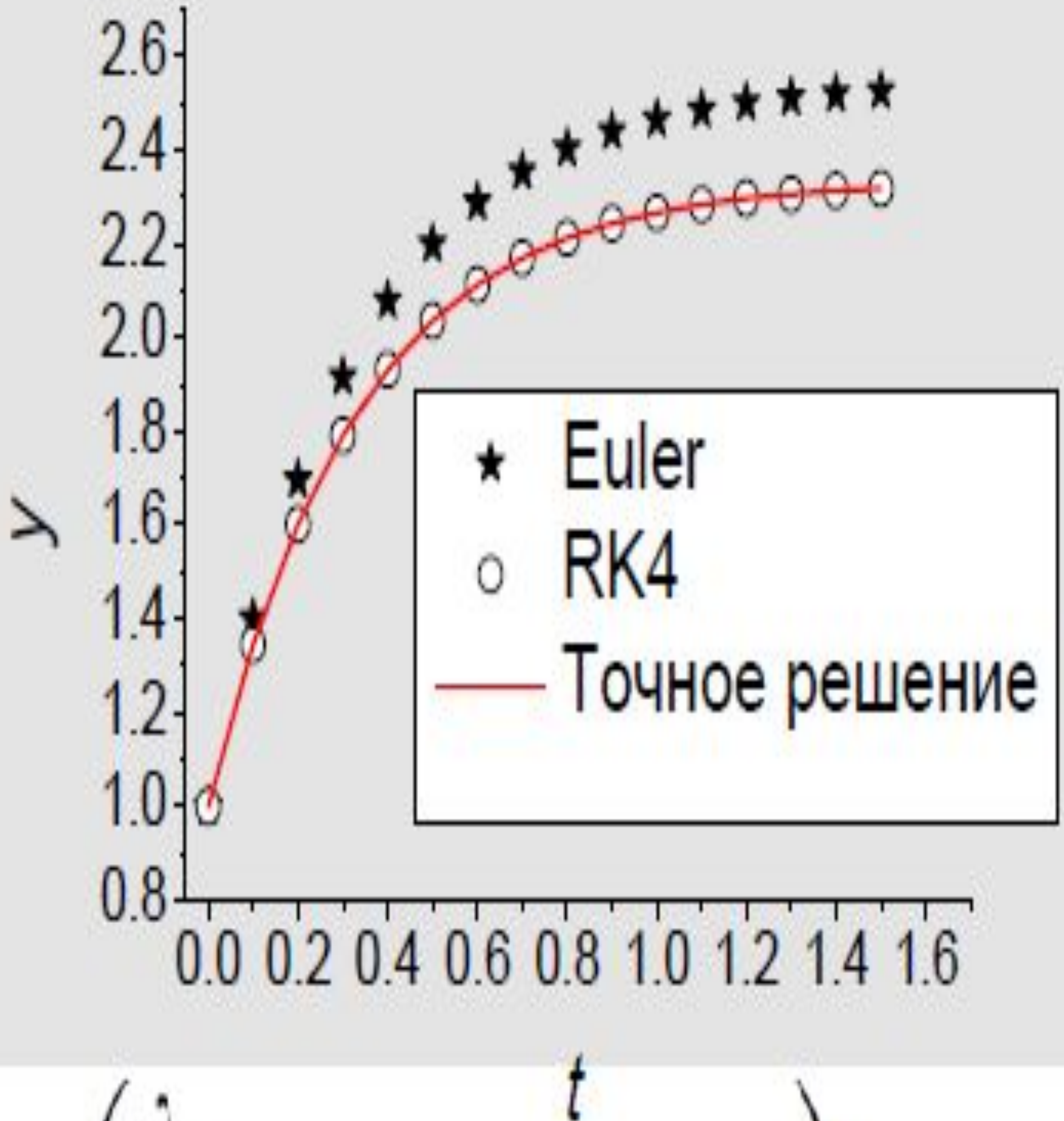
Уравнение (3) - дифференциальное уравнение

- первого порядка
- линейное
- в обыкновенных производных
- с зависящими от нез. переменной коэффициентами

$$y(t) = y_0 \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}(1 - \exp(-\alpha t))\right), \qquad y(0) = y_0$$



$$y(t) = y_0 \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}(1 - \exp(-\alpha t))\right), \qquad y(0) = y_0$$



$$y(t) = y_0 \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}(1 - \exp(-\alpha t))\right), \qquad y(0) = y_0$$

- Общий случай

$$\frac{d\vec{y}}{d\vec{x}} = \vec{F}(\vec{y}, \vec{x}, a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$$

$$\vec{y}(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$$

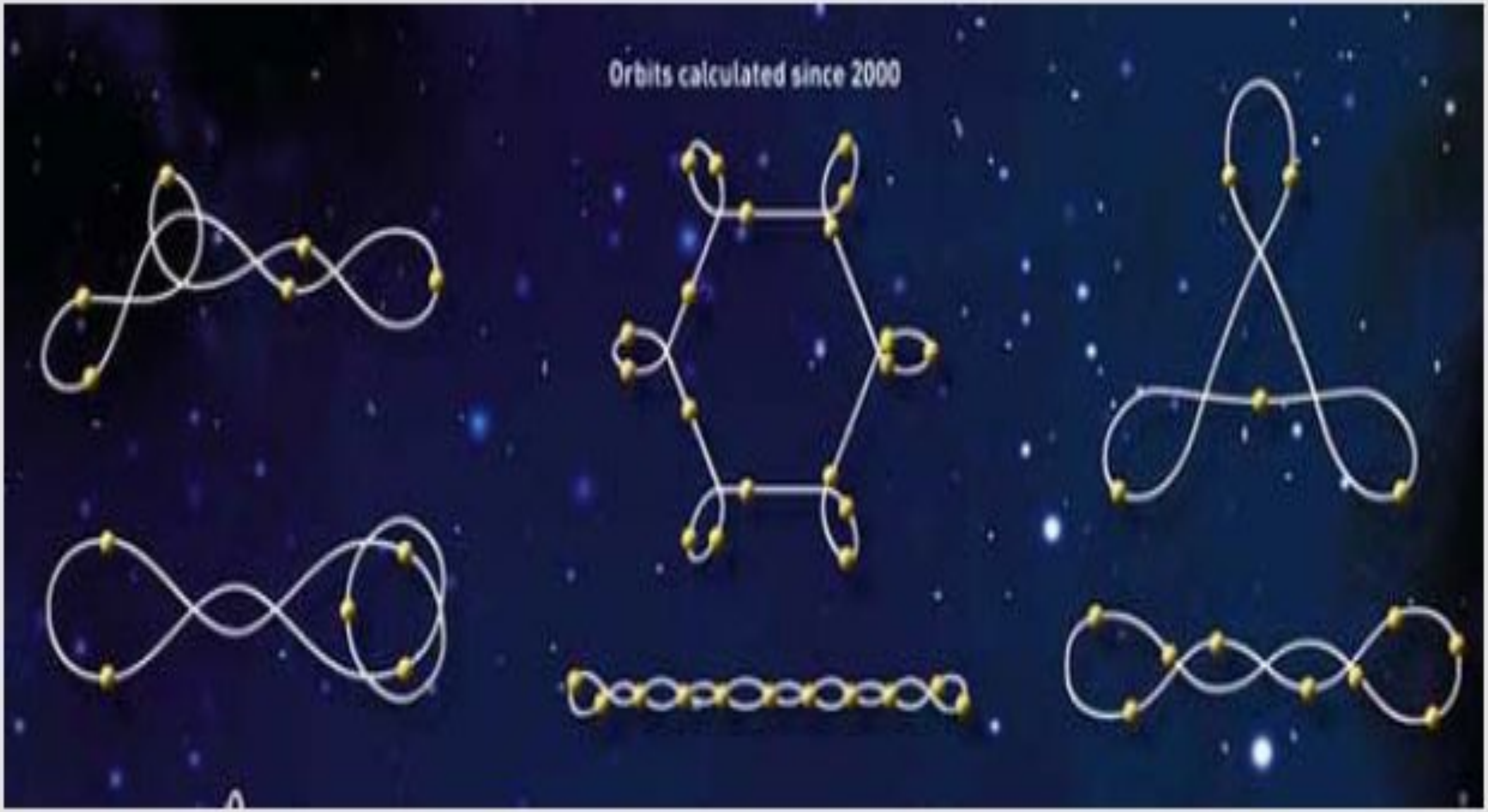
- Роль дифф. уравнений в физике (рост, убывание, стремление к равновесию,..., механика, молекулярная физика, квантовая механика, электродинамика, ...).

- Задача многих тел.

Уравнения Ньютона или Гамильтона.

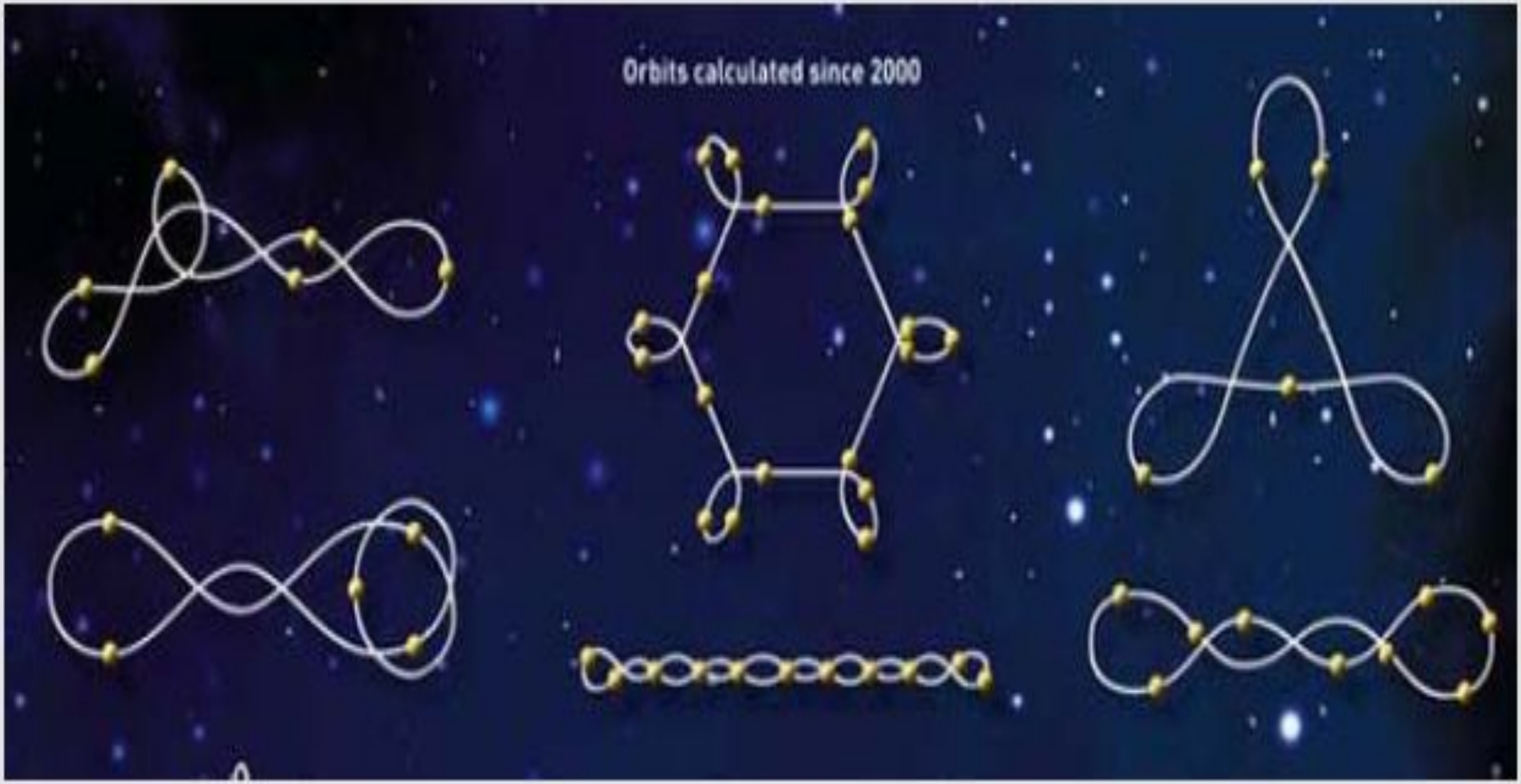
- Задача многих тел.

Уравнения Ньютона или Гамильтона (3 тела).



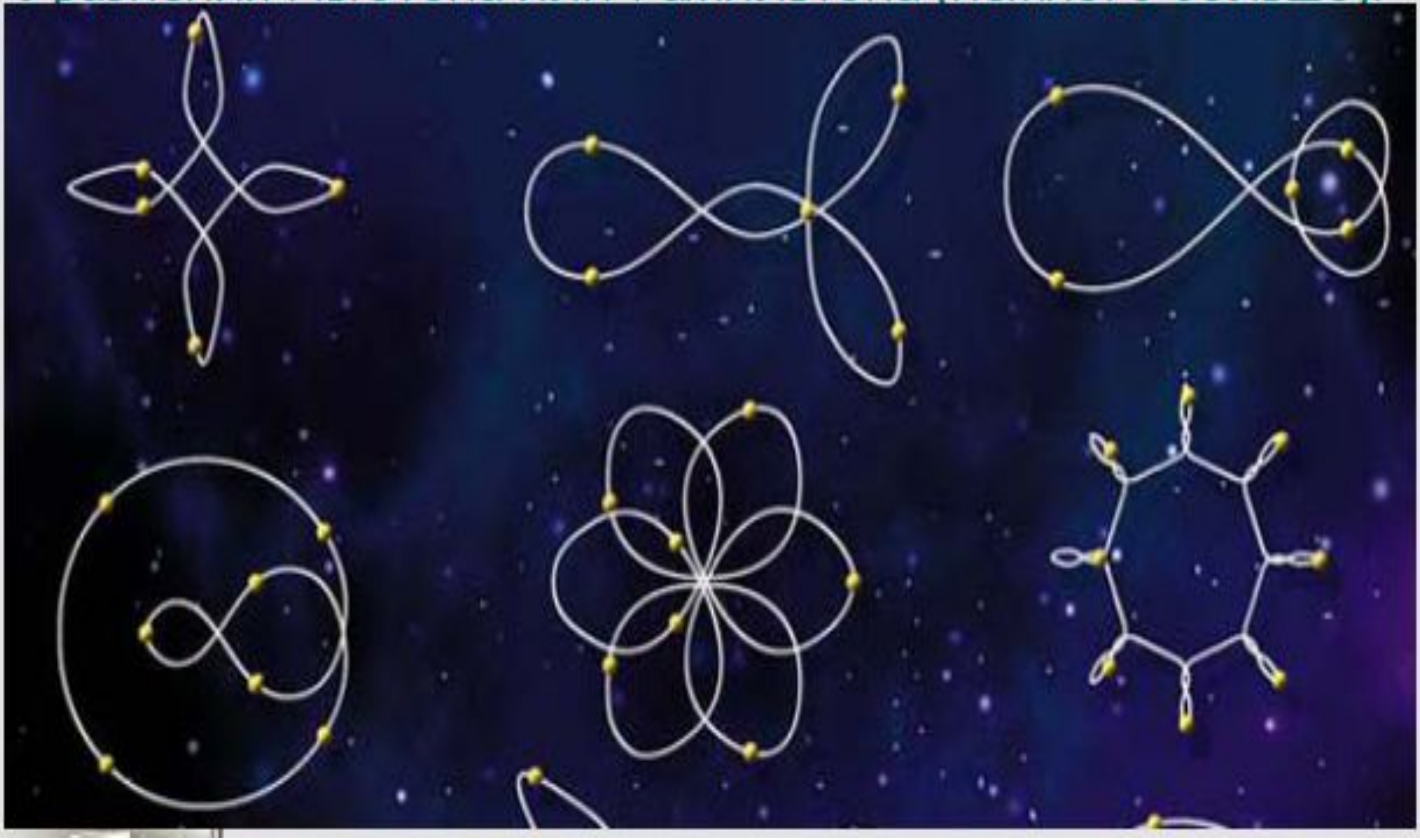
• Задача многих тел.

Уравнения Ньютона или Гамильтона (немного больше).



- Задача многих тел.

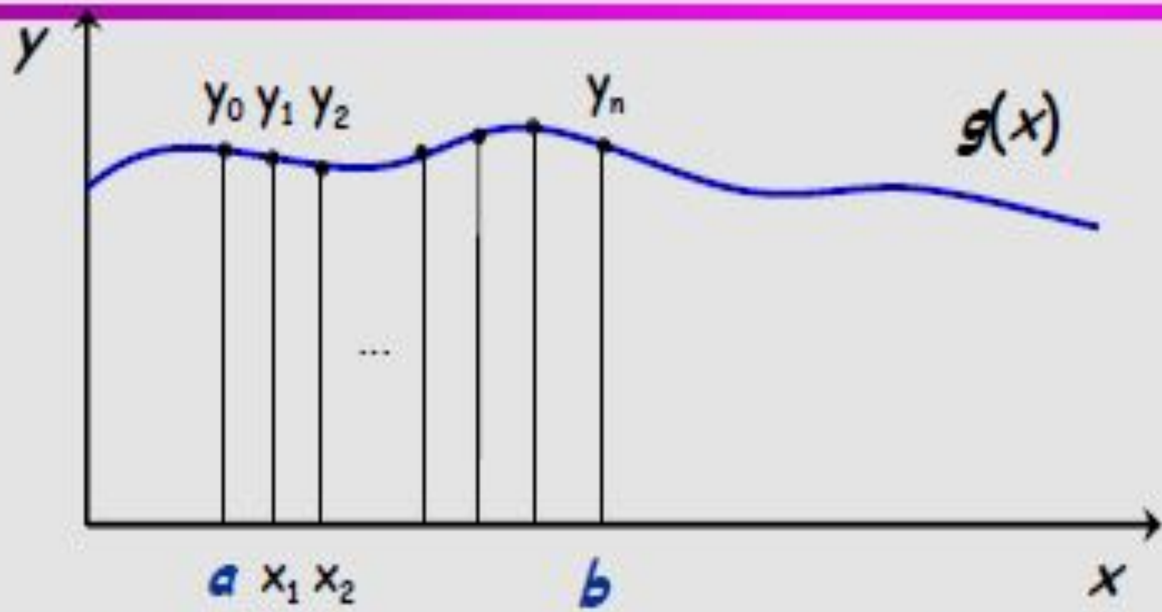
Уравнения Ньютона или Гамильтона (немного больше).



- Задача многих тел.

Уравнения Ньютона или Гамильтона (немного больше).

Сеточные функции



- Пусть задана непрерывная функция $g(x)$ на участке $[a, b]$.
- Введем дискретный набор точек x_i, сетку.
- Точки $\{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\}$ – узлы сетки
- Сетка с одинаковым расстоянием между произвольной парой соседних точек – равномерная сетка.
- $y_i = g(x_i)$ – сеточная функция, задаваемая в виде таблицы.

Разности

- Можно ввести аналог производной для сеточной функции

$$\boxed{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i} dx \quad \to \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i}$$ - правая разность

- Также задается

$$\boxed{\nabla y_i = y_i - y_{i-1}}$$ - левая разность

$$\boxed{\delta y_i = \frac{1}{2}(\Delta y_i + \nabla y_i) = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_{i-1})}$$ - центральная разность

- В общем случае

$$\boxed{\Delta^m y_i = \Delta(\Delta^{m-1} y_i)}$$

Разности

Полезные выражения

- **Производные второго порядка**

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \qquad \Delta\nabla y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} \qquad \Delta\nabla y_i = \Delta^2 y_{i-1}$$

- **Дифференцирование произведения**

$$\Delta(y_i v_i) = y_i \Delta v_i + v_{i+1}\Delta y_i = y_{i+1}\Delta v_i + v_i \Delta y_i$$

$$\nabla(y_i v_i) = y_i \nabla v_i + v_{i-1}\nabla y_i = y_{i-1}\nabla v_i + v_i \nabla y_i$$

- **Суммирование по частям**

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i \Delta v_i = -\sum_{i=1}^{N-1} v_i \Delta y_i + y_{N-1}v_N - y_0 v_1 = -\sum_{i=0}^{N} v_i \Delta y_i + y_N v_N - y_0 v_0$$

Разностные уравнения

- Линейное разностное уравнение m-го порядка

$$\boxed{a_0(i)y_i + a_1(i)y_{i+1} + a_2(i)y_{i+2} + \ldots + a_m(i)y_{i+m} = f(i)}$$

или

$$\boxed{\alpha_0(i)y_i + \alpha_1(i)\Delta y_i + \alpha_2(i)\Delta y_i^2 + \ldots + \alpha_m(i)\Delta y_i^m = f(i)}$$

- Например

$\boxed{a_0(i)y_i + a_1(i)y_{i+1} = f(i)}$ - уравнение первого порядка

Решение $\boxed{y_{i+1} = \varphi(i) + \beta(i)y_i}$

Разностные уравнения

Граничные условия

- Аналогично дифференциальным уравнениям чтобы найти частное решение требуется задать граничные условия.
  - уравнение первого порядка – один параметр
  - уравнение второго порядка – два параметра и т.д.

- Согласно заданным условиям уравнения второго порядка можно классифицировать как
  - Задача Коши. Заданы граничные условия в двух соседних точках.
  - Краевая задача. Заданные точки не являются соседними.

- Граничные условия могут быть первого, второго и третьего рода.

Уравнения первого порядка

Метод Эйлера

- Пусть задана система уравнений

$$\boxed{\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1(x), y_1(x), \dots y_1(x)), \quad i = 1, \dots, n, \quad a \le x \le b, \quad y_i(a) = \alpha_i}$$

(здесь y_i – разные функции)

- Решение будет искаться в виде

$$\boxed{y_i(x_{k+1}) = y_i(x_k) + h \cdot f_i(x_k, y_1(x_k), y_2(x_k), \dots y_n(x_k)),}$$

где *h* – шаг сетки

- Ошибка дискретизации ~*h*

Методы Рунге-Кутта

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \sum_{i=1}^{q} p_i k_i(h)$$

- общая формула, где

$$k_1(h) = h \cdot f(x; y);$$

$$k_2(h) = h \cdot f(x + \alpha_2 h; y + \beta_{21} k_1);$$

$$k_3(h) = h \cdot f(x + \alpha_3 h; y + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2);$$

....

$$k_n(h) = h \cdot f(x + \alpha_3 h; y + \beta_{n1} k_1 + \beta_{n2} k_2 + \beta_{n3} k_3 + \ldots);$$

$$\alpha_2 \ldots \alpha_q \quad p_1 \ldots p_q \quad \beta_{ij} \quad 0 < j < i \le q$$

- константы

Методы Рунге-Кутта

Выбор параметров

Введем функцию погрешности метода

$$\varphi_i(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 k_1(h) - p_2 k_2(h) - \ldots - p_i k_i(h);$$

Будем искать коэффициенты из условия чтобы

$$\varphi'(0) = \varphi''(0) = \ldots = \varphi^{(s)}(0) = 0, \quad \varphi^{(s+1)}(0) \neq 0$$

тогда

$$\varphi\ (h) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\varphi^{(s)}(0)}{s!} h^s + \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!} h^{s+1} = \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!} h^{s+1}$$

Уравнения первого порядка

Методы Рунге-Кутта

- **Метод Рунге-Кутта второго порядка (Метод Хьюна) $\varepsilon \sim h^2$**

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_k, y(x_k)) + f\left(x_{k+1}, y(x_k) + h\cdot f(x_k, y(x_k))\right)\right),$$

- **Метод Рунге-Кутта-Фельберга $\varepsilon \sim h^5$**

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{1}{9}k_0 + \frac{9}{20}k_2 + \frac{16}{45}k_3 + \frac{1}{12}k_4$$

$$k_0 = h\cdot f(x_i; y_i);$$

$$k_1 = h\cdot f\left(x_i + \frac{2}{9}h; y_i + \frac{2}{9}k_0\right);$$

$$k_2 = h\cdot f\left(x_i + \frac{1}{3}h; y_i + \frac{1}{12}k_0 + \frac{1}{4}k_1\right);$$

$$k_3 = h\cdot f\left(x_i + \frac{3}{4}h; y_i + \frac{69}{128}k_0 - \frac{143}{128}k_1 + \frac{135}{64}k_2\right);$$

$$k_4 = h\cdot f\left(x_i + h; y_i - \frac{17}{12}k_0 + \frac{27}{4}k_1 - \frac{27}{5}k_2 + \frac{16}{15}k_3\right);$$

Решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &y_1(x_0) = y_{01} \\ &y_2(x_0) = y_{02} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n(x_0) = y_{0n} \end{aligned}$$

$$\bar{y}' = \bar{F}(x, \bar{y})$$

$$\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$$

Здесь $\bar{y}(x) = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)^T$ - вектор столбец неизвестных функций, $\bar{F} = (f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n)^T$ - вектор функция правых частей.

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$z(x_0) = z_0$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$

$$z_{k+1} = z_k + \Delta z_k$$

$$\Delta y_k = \frac{1}{6}(K_1^k + 2K_2^k + 2K_3^k + K_4^k)$$

$$\Delta z_k = \frac{1}{6}(L_1^k + 2L_2^k + 2L_3^k + L_4^k)$$

$$K_1^k = hf(x_k, y_k, z_k)$$
$$L_1^k = hg(x_k, y_k, z_k)$$
$$K_2^k = hf(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_1^k, z_k + \frac{1}{2}L_1^k)$$
$$L_2^k = hg(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_1^k, z_k + \frac{1}{2}L_1^k)$$
$$K_3^k = hf(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_2^k, z_k + \frac{1}{2}L_2^k)$$
$$L_3^k = hg(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_2^k, z_k + \frac{1}{2}L_2^k)$$
$$K_4^k = hf(x_k + h, y_k + K_3^k, z_k + L_3^k)$$
$$L_4^k = hg(x_k + h, y_k + K_3^k, z_k + L_3^k)$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n-1)})$$

$$\begin{aligned}
&y(x_0) = y_0 \\
&y'(x_0) = y_{01} \\
&y''(x_0) = y_{02} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y^{(n-1)}(x_0) = y_{0(n-1)}
\end{aligned}$$

$y^{(m)} = \dfrac{d^m y}{dx^m}$ производная m порядка от решения, $m=1,2,\ldots,n$.

Введем новые переменные

$$z_1 = y'$$

$$z_2 = y''$$

....

$$z_{n-1} = y^{(n-1)}$$

$$
\begin{cases}
y' = z_1 \\
z_1' = z_2 \\
z_2' = z_3 \\
\cdots\cdots\cdots \\
z_{n-2}' = z_{n-1} \\
z_{n-1}' = f(x, y, z_1, \ldots, z_{n-1})
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
& y(x_0) = y_0 \\
& z_1(x_0) = y_{01} \\
& z_2(x_0) = y_{02} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& z_{n-1}(x_0) = y_{0(n-1)}
\end{aligned}
$$

Пусть необходимо решить задачу Коши для ОДУ второго порядка:

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$y(x_0) = y_0$$
$$y'(x_0) = y_{01}$$

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$z(x_0) = y_{01}$$

Многошаговые методы. Метод Адамса.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55 f_k - 59 f_{k-1} + 37 f_{k-2} - 9 f_{k-3}),$$

где f_k значение подынтегральной функции в узле x_k

Метод Адамса-Бэшфортса-Моултона

Этап предиктор

Аналогично методу Адамса по значениям в узлах $x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k$ рассчитывается “предварительное” значение решения в узле x_{k+1}.

$$\hat{y}_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55 f_k - 59 f_{k-1} + 37 f_{k-2} - 9 f_{k-3}),$$

С помощью полученного значения $\hat{y}_{k+1}$ рассчитывается “предварительное” значение функции $f_{k+1} = f(x_{k+1}, \hat{y}_{k+1})$ в новой точке.

Этап корректор

На корректирующем этапе по методу Адамса 4-го порядка по значениям в узлах $x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$ рассчитывается "окончательное" значение решения в узле x_{k+1}.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(9 f_{k+1} + 19 f_k - 5 f_{k-1} + f_{k-2}),$$