Тригонометрическая интерполяция

$$T(x) = \sum_k \left(a_k \cos(\alpha_k x) + b_k \sin(\alpha_k x)\right),$$

где $\alpha_k = \dfrac{2\pi k}{L}$ - частота k-ой гармоники, L - период, a_k, b_k - коэффициенты разложения.

Рассмотрим таблично заданную на периоде L функцию $y_i(x_i)$ с равномерным распределением узлов ($x_i = x_0 + ih$, $h = L/n$, $i = 0,n$).

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_i	y_0	y_1	$\dots$	y_n

Тогда, если n - четно ($n = 2m$), существует единственный интерполяционный тригонометрический полином $T_m(x)$ степени $m = n/2$, удовлетворяющий условиям $T_m(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$:

$$T_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{L}(x - x_0)\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{L}(x - x_0)\right).$$

$$a_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i ,$$

$$a_k = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \cos(2\pi k \frac{i}{n}), \quad b_k = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \sin(2\pi k \frac{i}{n}), \quad k = \overline{1, m-1},$$

$$a_m = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \cos(i\pi).$$

Метод наименьших квадратов

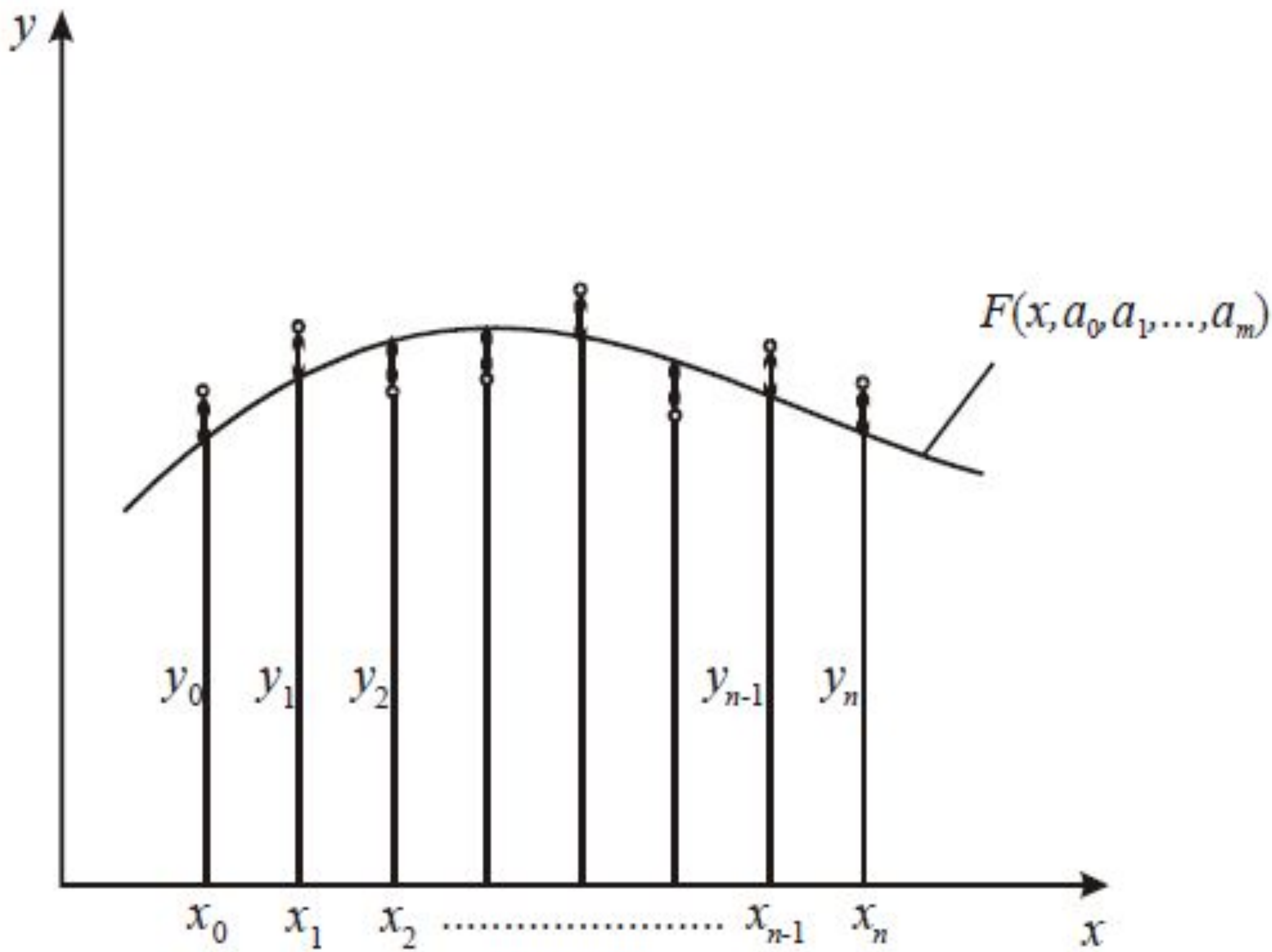
Пусть дана экспериментальная таблица

x_i	x_0	x_1	…	x_n
y_i	y_0	y_1	…	y_n

Поставим ей в соответствие функцию вида

$$F(x, a_0, a_1, \ldots, a_m) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x),$$

где $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1, m}$ - базисные функции, a_j - коэффициенты, подлежащие определению. В частности, если в качестве базисных функций использовать степенные $\varphi_j(x) = x^j$, задача сводится к поиску полинома степени m ($m << n$), приближающего исходную таблицу: $F(x, a_0, a_1, \ldots, a_m) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$.


y
$F(x, a_0, a_1, \ldots, a_m)$
y_0
y_1
y_2
y_{n-1}
y_n
x_0
x_1
x_2
x_{n-1}
x_n
x

В точечном методе наименьших квадратов строится функционал

$$S(a_0,a_1,\ldots,a_m)=\sum_{i=0}^{n}[F(x_i,a_0,a_1,\ldots,a_m)-y_i]^2 ,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0}=2\sum\limits_{i=0}^{n}\left[F(x_i,a_0,a_1,\ldots,a_m)-y_i\right]\varphi_0(x_i)=0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1}=2\sum\limits_{i=0}^{n}\left[F(x_i,a_0,a_1,\ldots,a_m)-y_i\right]\varphi_1(x_i)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_m}=2\sum\limits_{i=0}^{n}\left[F(x_i,a_0,a_1,\ldots,a_m)-y_i\right]\varphi_m(x_i)=0. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение следующие объекты:

- матрицу Ф размерности $(n+1)\times(m+1)$, содержащую значения базисных функций в узлах таблицы $\varphi_j(x_i)$, $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_m(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_0(x_n) & \dots & \varphi_0(x_n) \end{pmatrix}$,

- вектор наблюдения y размерности $n+1$, содержащий табличные значения y_i, $y=(y_0, y_1, ..., y_n)^T$,

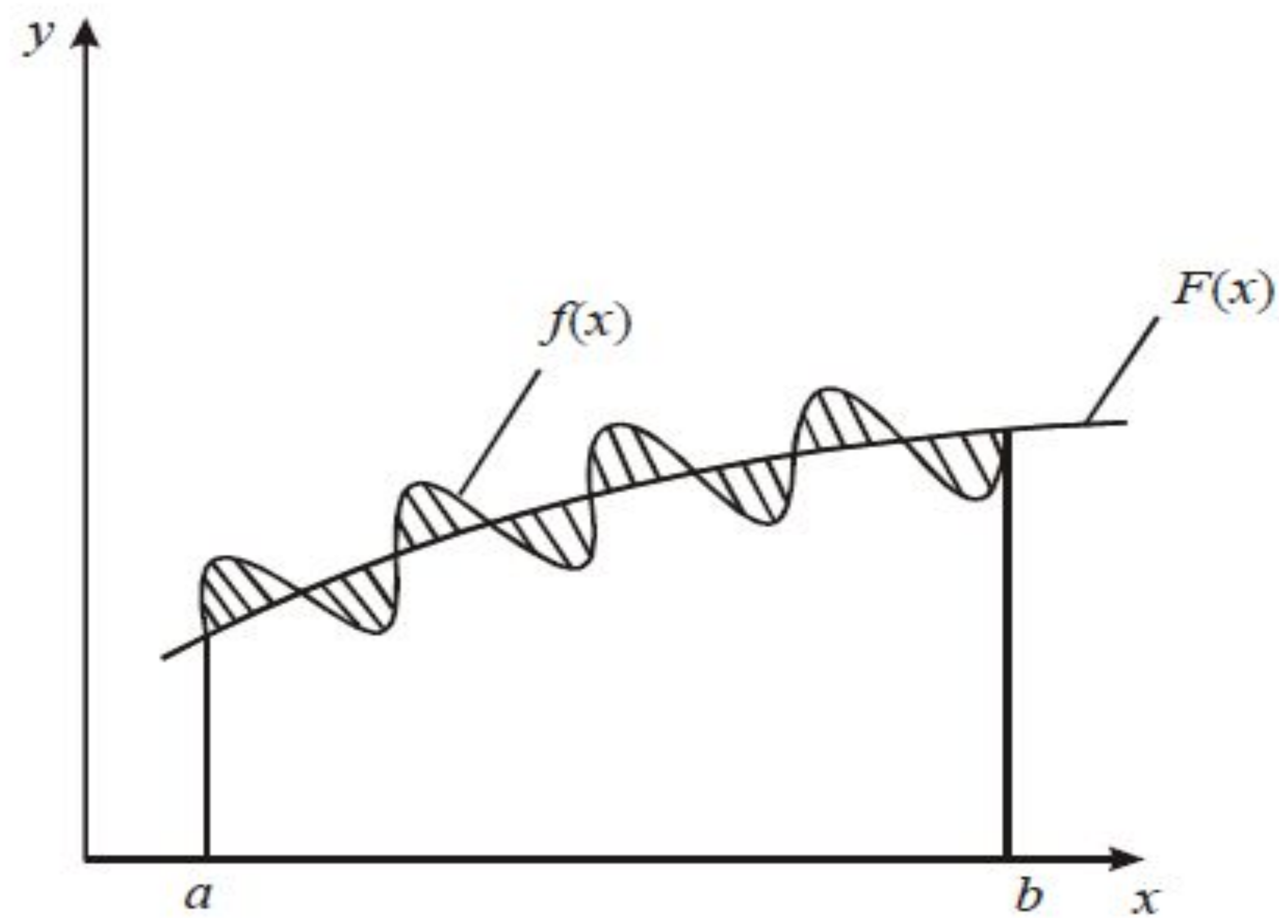
- искомый вектор коэффициентов a размерности $m+1$, $a=(a_0, a_1, ..., a_m)^T$.

$$\Lambda a = \beta ,$$

где $\Lambda = \Phi^T \Phi$, $\beta = \Phi^T y$.

Качество такого приближения может быть оценено, например, величиной среднеквадратичного отклонения $\delta = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (F(x_i) - y_i)^2 \right)^{1/2}$.

В интегральном методе наименьших квадратов рассматривается интегрируемая с квадратом функция $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, которая трудна для исследования (например, трудно вычислить производные).



$$F(x, a_0, a_1, ..., a_m) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + ... + a_m\varphi_m(x),$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_m$ находят из условия минимизации следующего квадратичного функционала:

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \int_a^b [F(x, a_0, a_1, \ldots, a_m) - f(x)]^2\, dx.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\displaystyle\int_a^b [F(x, a_0, \dots, a_m) - f(x)]\varphi_0(x)dx = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\displaystyle\int_a^b [F(x, a_0, \dots, a_m) - f(x)]\varphi_1(x)dx = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_m} = 2\displaystyle\int_a^b [F(x, a_0, \dots, a_m) - f(x)]\varphi_m(x)dx = 0, \end{cases}$$

Таким образом, задача сводится к решению следующей СЛАУ:

$\Lambda a = \beta$,

где Λ- матрица размерности $m+1 \times m+1$, элементами которой являются скалярные произведения базисных функций (скалярное произведение интегрируемых на отрезке $[a,b]$ функций $p(x)$ и $q(x)$ определяется как $(p,q)=\int_a^b p(x)q(x)dx$),

$$\Lambda = \begin{pmatrix} (\varphi_0(x),\varphi_0(x)) & (\varphi_1(x),\varphi_0(x)) & \dots & (\varphi_m(x),\varphi_0(x)) \\ (\varphi_0(x),\varphi_1(x)) & (\varphi_1(x),\varphi_1(x)) & \dots & (\varphi_m(x),\varphi_1(x)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0(x),\varphi_m(x)) & (\varphi_1(x),\varphi_m(x)) & \dots & (\varphi_m(x),\varphi_m(x)) \end{pmatrix},$$

β - вектор размерности $m+1$ с элементами $\beta_j = \int_a^b f(x)\varphi_j(x)dx$, $\overline{j=1,m}$,

a - вектор искомых коэффициентов размерности $m+1$, $a=(a_0,a_1,...,a_m)^T$.

Численное дифференцирование

Пусть в некоторой точке x^* требуется вычислить производные первого, второго и т.д. порядков от дискретно заданной функции (3.1):

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_n

При этом возможны два случая: а) точка $x^* \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{1,n}$ и б) точка $x^* = x_i$, $i = \overline{0,n}$, т.е. совпадает с одним из узлов заданной таблицы.

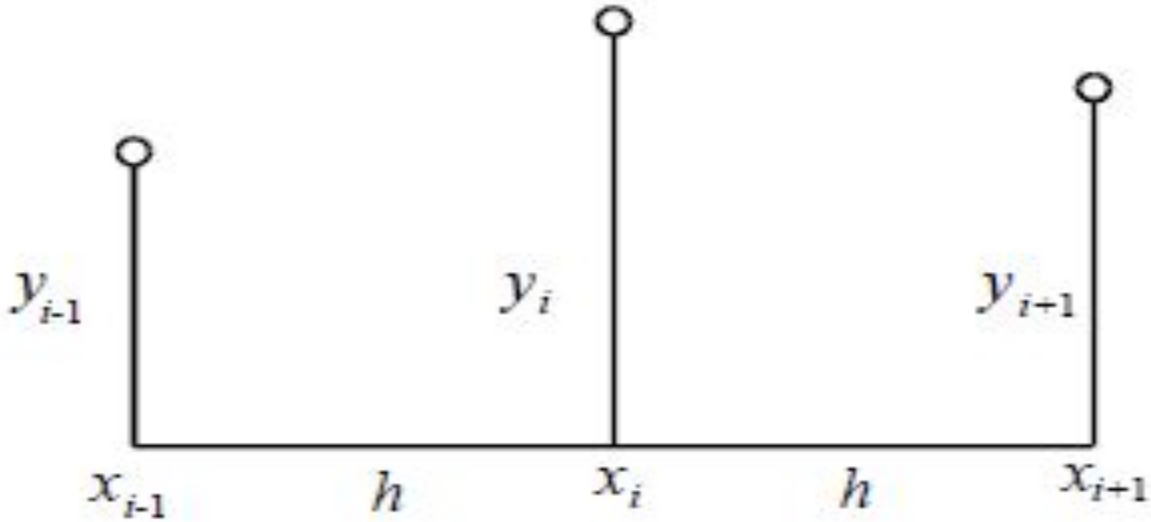
Тогда *в первом случае* заданная таблица сглаживается какой-либо функцией $\varphi(x)$, являющейся глобальным (локальным) интерполяционным полиномом, или полиномом, полученным по МНК с некоторой погрешностью $R_n(x)$, в результате чего имеют место следующие равенства

$$y(x) = \varphi(x) + R_n(x), \quad y(x^*) = \varphi(x^*) + R_n(x^*);$$

$$y'(x) = \varphi'(x) + R_n'(x), \quad y'(x^*) = \varphi'(x^*) + R_n'(x^*);$$

$$y''(x) = \varphi''(x) + R_n''(x), \quad y''(x^*) = \varphi''(x^*) + R_n''(x^*)$$

Во *втором случае* $(x^* = x_i, \ \ i = \overline{0,n})$ используется аппарат разложения функций в ряд Тейлора, для чего функция в точке x^* должна иметь достаточное число производных. С этой целью предполагается, что заданная таблица (3.1) является сеточной функцией для некоторой функции $y(x)$, имеющей в точке x^* производные до четвертого порядка включительно, т.е. что $y_i = y(x_i)$.



$$\bar{y}_i' = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + O(h) = \frac{\Delta \bar{y}_i}{h} + O(h),$$

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h) = \frac{\Delta y_i}{h} + O(h).$$

$$\mathring{y}'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2) = \frac{\Delta \mathring{y}_i}{2h} + O(h^2),$$

где $\Delta \mathring{y}_i = y_{i+1} - y_{i-1}$ - центральная разность первого порядка.

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2) = \frac{\Delta^2 y_i}{h^2} + O(h^2).$$