

## Двумерное преобразование Фурье. Фильтрация изображений в частотной области

### Дискретное двумерное преобразование Фурье

Дискретное двумерное ПФ изображения  $S = s_{ik}$  размером  $N \times N$ :

$$f_{uv} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} s_{ik} \exp \left\{ -\frac{2\pi j}{N} ui + vk \right\},$$

где  $j = \sqrt{-1}$ ;  $f_{uv}$  - спектральные коэффициенты преобразования;  
 $u, v = 0, 1, \dots, N-1$  - номер функции и номер отсчета соответственно.

Двумерное дискретное *обратное* ПФ :

$$s_{ik} = \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} f_{uv} \exp \left\{ \frac{2\pi j}{N} ui + vk \right\}.$$

Фурье-спектр,

фаза

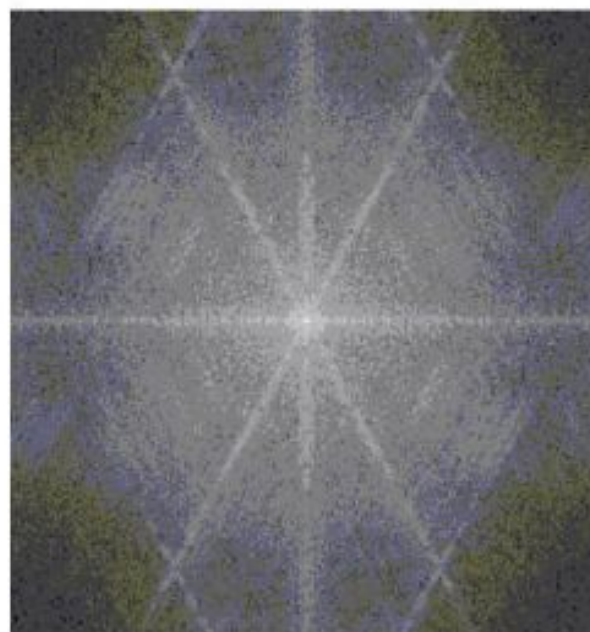
энергетический спектр:

$$|f_{uv}| = [R_{uv}^2 + I_{uv}^2]^{1/2}, \quad \phi_{uv} = \arctg \left[ \frac{I_{uv}}{R_{uv}} \right], \quad P = p_{uv} = |f_{uv}|^2 = R_{uv}^2 + I_{uv}^2,$$

где  $R(u,v)$  и  $I(u,v)$  действительная и мнимая части  $f_{uv}$  соответственно.



а)



б)

*Двумерное преобразование можно выполнить в виде последовательных одномерных преобразований по строкам и столбцам матрицы изображения.*

Базисными функциями преобразования - экспоненты с комплексными показателями:

$$\exp\left\{-\frac{2\pi j}{N} ui + vk\right\} = \cos\left\{\frac{2\pi}{N} ui + vk\right\} - j \sin\left\{\frac{2\pi}{N} ui + vk\right\}$$

$$\exp\left\{\frac{2\pi j}{N} ui + vk\right\} = \cos\left\{\frac{2\pi}{N} ui + vk\right\} + j \sin\left\{\frac{2\pi}{N} ui + vk\right\}$$

*Спектральная составляющая в начале координат частотной плоскости равна увеличенному в  $N$  раз среднему (по исходной плоскости) значению яркости изображения.*

$$f_{00} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} S_{ik}$$

Подставив в равенство прямого преобразования Фурье  $u = u + mN$  и  $v = v + nN$ , где  $m$  и  $n$  – постоянные, получим

$$f_{u+mN, v+nN} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} s_{ik} \exp \left\{ -\frac{2\pi j}{N} (ui + vk) \right\} \exp -2\pi j (mi + nk)$$

При любых целочисленных значениях второй экспоненциальный множитель равенства **превращается в единицу**. Таким образом, при  $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$f_{u+mN, v+nN} = f_{u,v} - \text{свойство периодичности}$$

что свидетельствует о периодичности частотной плоскости.

Двумерный спектр Фурье изображения является по существу представлением двумерного поля в виде ряда Фурье.

*Для того чтобы такое представление было справедливым, исходное изображение также должно обладать периодической структурой т. е. иметь рисунок, повторяющийся по вертикали и горизонтали. Таким образом, правый край изображения примыкает к левому, а верхний край – к нижнему.*

Из-за разрывов значений яркости в этих местах в спектре изображения возникают дополнительные составляющие, лежащие на координатных осях частотной плоскости. Эти составляющие не связаны со значениями яркости внутренних точек изображения, но они необходимы для воспроизведения его резких границ.

Если массив отсчетов изображения описывает поле яркости, то числа будут *действительными и положительными*. Однако спектр Фурье этого изображения в общем случае имеет *комплексные, значения*.

Поскольку спектр содержит  $2N^2$  компонент, представляющих действительную и мнимую части или фазу и модуль спектральных составляющих для каждой частоты, может показаться, что преобразование Фурье увеличивает размерность изображения. Это, однако, не так, поскольку *спектр обладает симметрией относительно комплексного сопряжения* (аналогично спектру одномерных сигналов). Из-за наличия комплексно-сопряженной симметрии *почти половина спектральных составляющих оказывается избыточной*, т. е. их можно сформировать из остальных составляющих.

Поскольку динамический диапазон составляющих спектра достаточно широк, то спектры необходимо подвергнуть сжатию. Сжатие динамического диапазона можно осуществить путем ограничения больших спектральных составляющих или логарифмическим преобразованием всех составляющих спектра согласно соотношению:

$$d_{uv} = \log \left[ a + b |f_{uv}| \right]$$

где  $a$  и  $b$  – масштабные постоянные.

Двумерный дискретный Фурье-спектр путем простой перестановки коэффициентов можно изменить так, чтобы начало координат оказалось в центре массива или отсчеты изображения предварительно умножить на коэффициенты вида  $(-1)^{i+k}$ .

**Два существенных недостатка ПФ:** вычисления приходится производить с комплексными числами; ряды сходятся медленно - обусловлено скачками изображения, возникающими на линиях перехода от левого края изображения к правому и от верхнего к нижнему. Эти разрывы приводят к появлению в спектре больших составляющих с высокими пространственными частотами.

Каждый элемент фурье-образа  $f_{u,v}$  содержит все отсчеты функции  $s_{ik}$ , умноженные на значения экспоненциальных членов - за исключением тривиальных случаев, *невозможно установить прямое соответствие между характерными деталями изображения и его Фурье образа.*

Однако некоторые общие утверждения могут быть сделаны:

поскольку частота прямо связана со скоростью изменения сигнала, то интуитивно ясно, что частоты в фурье-преобразовании связаны с вариацией яркости на изображении. Низкие частоты, отвечающие точкам вблизи начала координат фурье-преобразования, соответствуют медленно меняющимся компонентам изображения – крупным объектам (на изображении комнаты,

например, они могут соответствовать плавным изменениям яркости стен и пола).

более высокие частоты начинают соответствовать все более и более быстрым изменениям яркости, которые суть границы объектов и другие детали изображения, характеризуемые резкими изменениями яркости

### ***Фильтрация изображений в частотной области***

Процедура фильтрации в частотной области состоит из следующих шагов:

1. Исходное изображение умножается на  $(-1)^{i+k}$ , чтобы его фурье-преобразование оказалось центрированным;
2. Вычисляется прямое ДПФ  $f_{u,v}$  изображения, полученного после первого шага;
3. Функция  $f_{u,v}$  умножается на функцию *фильтра*  $h_{u,v}$ ;
4. Вычисляется обратное ДПФ от результата шага 3;
5. Выделяется вещественная часть результата шага 4;
6. Результат шага 5 умножается на  $(-1)^{i+k}$ .

Пусть  $s_{i,k}$  обозначает входное изображение после шага 1, и пусть  $f_{u,v}$  есть его Фурье-образ. Тогда Фурье-образ выходного изображения определяется выражением

$$g_{u,v} = h_{u,v} f_{u,v}$$

Умножение  $h$  и  $f$  осуществляется **поэлементно** - первый элемент  $h$  умножается на первый элемент  $f$ , второй элемент  $h$  — на второй элемент  $f$ , и т.д.

В общем случае компоненты фильтра  $h$  являются комплексными величинами. В случае, если **компоненты фильтра содержат только действительные величины**, то действительная, и мнимая части функции  $f$  умножаются на одну и ту же **действительную функцию фильтра**  $h$ . Такие фильтры называются фильтрами **нулевого фазового сдвига** - эти фильтры не меняют фазу Фурье-преобразования.

Фильтрованное изображение получается вычислением ОДПФ от Фурье-образа  $g_{u,v}$ .

Искомое изображение получается **выделением действительной части (мнимой частью пренебрегают) из последнего результата и умножения на  $(-1)^{i+k}$** , чтобы скомпенсировать эффект от умножения входного изображения на ту же величину.





Основные этапы фильтрации изображений в частотной области

Примером фильтрации изображений - обращение в нуль среднего значения на изображении. Среднее значение задается величиной  $f_{00}$  - постоянной составляющей. *Если  $f_{00}$  и выполнить обратное преобразование, то среднее значение полученного изображения будет равно нулю.*

Функция фильтра- *фильтр-пробка*:

$$h_{uv} = \begin{cases} 0, & \text{при } (u, v) = (M/2, N/2); \\ 1, & \text{в другом случае.} \end{cases}$$

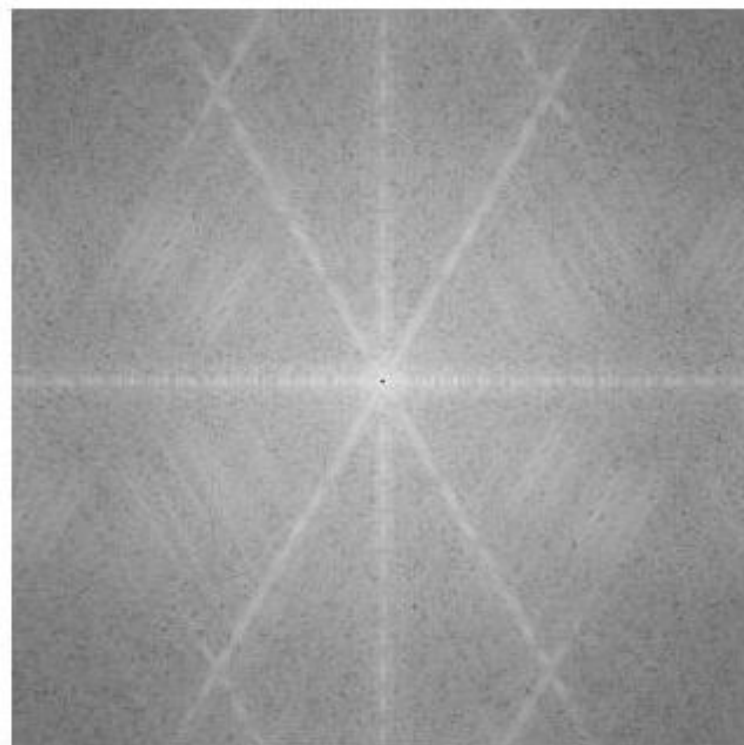
Результат обработки: падение общей яркости; побочный результат, состоящий в выделении контуров.

В действительности среднее значение яркости *выводимого на экран* изображения не может равняться нулю, поскольку для этого некоторые элементы изображения должны быть отрицательными, а монитор не может оперировать с отрицательными величинами.

Представление изображения: наименьшее отрицательное значение соответствует нулю, или черному цвету, а остальные значения увеличиваются.



*а*



*б*

Результат фильтрации изображения,  
с помощью фильтра-пробки (а), и спектр обработанного изображения (б)

*Низкие частоты Фурье-преобразования отвечают за возникновение превалирующих значений яркости на гладких участках изображения, в то время как высокие частоты ответственны за такие детали, как контуры и шум.*

После применения низкочастотной фильтрации, изображение, по сравнению с исходным, содержит меньше резких деталей, поскольку высокие частоты подавлены.

После применения высокочастотной фильтрации, на изображении уменьшаются изменения яркости в пределах больших гладких областей и выделяются переходные зоны быстрого изменения яркости (т.е. контуры). Такое изображение выглядит более резким.

# Сжатие изображений

## **Требования к алгоритмам компрессии**

Высокая степень компрессии.

Высокое качество изображений

Высокая скорость компрессии.

Высокая скорость декомпрессии

Возможность показать огрубленное изображение

Устойчивость к ошибкам

Учет специфики изображения

Редактируемость

## **Основы спектральных методов сжатия**

- в процессе преобразования ряд спектральных коэффициентов (трансформант) становится настолько малым по величине, что их можно отбросить без заметного ухудшения качества восстанавливаемых изображений;
- в процессе преобразования осуществляется декорреляция данных, обеспечивающая повышение эффективности статистического кодирования;
- различное нелинейное квантование коэффициентов преобразования позволяет существенно сократить объем передаваемой информации без заметного ухудшения качества передаваемого изображения при его восстановлении.

Сущность спектральных методов эффективного кодирования изображений заключается в том, что кодируется и передается не само изображение, а значения трансформант, получающихся при ортогональном преобразовании этого изображения. ]

## Дискретное косинусное преобразование

Прямое ДКП двумерного фрагмента изображения размером  $N \times N$  в матричной форме запишется как

$$C_{k_1, k_2} = \Phi_{k_1, n_1} S_{n_1, n_2} \Phi_{k_2, n_2}^T,$$
$$k_1, n_1, k_2, n_2 \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

где  $C_{k_1, k_2}$  – матрица спектральных коэффициентов ДКП размером  $N \times N$ ;  
 $S_{n_1, n_2}$  – сигнальная матрица размером  $N \times N$ ;  
 $\Phi_{k_1, n_1}$  – матрица ДКП размером  $N \times N$ :

$$\Phi_{k_1, n_1} = \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \left[ \frac{2n_1 + 1}{2N} \cdot k_1 \pi \right] \end{bmatrix}, k_1 \in \{1, 2, \dots, N-1\}, n_1 \in \{0, 1, \dots, N-1\};$$

$\Phi_{k_2, n_2}$  – матрица ДКП размером  $N \times N$ :

$$\Phi_{k_2, n_2} = \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \left[ \frac{2n_2 + 1}{2N} \cdot k_2 \pi \right] \end{bmatrix}, k_2 \in \{1, 2, \dots, N-1\}, n_2 \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

Ядро ДКП для  $N = 4$  можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (\varphi_{k,n})_4 &= \sqrt{\frac{2}{4}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left[\frac{2n+1}{2 \cdot 4} \cdot k\pi\right] \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\frac{\pi}{8} & \cos\frac{3\pi}{8} & \cos\frac{5\pi}{8} & \cos\frac{7\pi}{8} \\ \cos\frac{2\pi}{8} & \cos\frac{6\pi}{8} & \cos\frac{10\pi}{8} & \cos\frac{14\pi}{8} \\ \cos\frac{3\pi}{8} & \cos\frac{9\pi}{8} & \cos\frac{15\pi}{8} & \cos\frac{21\pi}{8} \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\frac{\pi}{8} & \cos\frac{3\pi}{8} & -\cos\frac{3\pi}{8} & -\cos\frac{\pi}{8} \\ \cos\frac{2\pi}{8} & -\cos\frac{2\pi}{8} & -\cos\frac{2\pi}{8} & -\cos\frac{2\pi}{8} \\ \cos\frac{3\pi}{8} & -\cos\frac{\pi}{8} & -\cos\frac{\pi}{8} & -\cos\frac{3\pi}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,653 & 0,271 & -0,271 & -0,653 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,271 & -0,653 & 0,653 & -0,271 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$



Аналогичным образом можно вычислить ядро ДКП для  $N = 8$ :

$$(\varphi_{k,n})_8 = \begin{bmatrix} 0,354 & 0,354 & 0,354 & 0,354 & 0,354 & 0,354 & 0,354 & 0,354 \\ 0,490 & 0,416 & 0,278 & 0,098 & -0,098 & -0,278 & -0,416 & -0,490 \\ 0,462 & 0,191 & -0,191 & -0,462 & -0,462 & -0,191 & 0,191 & 0,462 \\ 0,416 & -0,098 & -0,490 & -0,278 & 0,278 & 0,490 & 0,098 & -0,416 \\ 0,354 & -0,354 & -0,354 & -0,354 & -0,354 & -0,354 & -0,354 & -0,354 \\ 0,278 & -0,490 & 0,098 & 0,416 & -0,416 & -0,098 & 0,490 & -0,278 \\ 0,191 & -0,462 & 0,462 & -0,191 & -0,191 & 0,462 & -0,462 & 0,191 \\ 0,098 & -0,278 & 0,416 & -0,490 & 0,490 & -0,416 & 0,278 & -0,098 \end{bmatrix}.$$

## . Основные шаги стандарта сжатия JPEG

JPEG – Joint Photographers Experts Group – сжатие с потерей информации.

Рассмотрим работу алгоритма сжатия JPEG при кодировании полутонового изображения, представленного набором минимальных элементов изображений (пикселей) с числом градаций яркости в 256 уровней [3].

1. Работа алгоритма сжатия JPEG начинается с *разбиения изображения на квадратные блоки* размером  $8 \times 8 = 64$  пиксела.

2. Второй этап сжатия – применение ко всем блокам *дискретного косинусного преобразования*.

В результате применения к блоку изображения размером  $8 \times 8$  пикселей дискретного косинусного преобразования (путем умножения матрицы пикселей на матрицу коэффициентов) получим двумерный спектр, также имеющий размер  $8 \times 8$  отсчетов.

Таким образом, 64 числа, представляющие отсчеты изображения, превратятся в 64 числа, представляющие отсчеты его ДКП-спектра.

## Пример ДКП для блока изображения

Элементы цифрового изображения							
139	144	149	153	155	155	155	155
144	151	153	156	159	156	156	156
150	155	160	163	158	156	156	156
159	161	161	160	160	159	159	159
159	160	161	162	162	155	155	155
161	161	161	161	160	157	157	157
161	162	161	163	162	157	157	157
162	162	161	161	163	158	158	15
Результат ДКП							
235,6	-1	-12,1	-5,2	2,1	-1,7	-2,7	1,3
-22,6	-17,5	-6,2	-3,2	-2,9	-0,1	0,4	-1,2
-10,9	-9,3	-1,6	1,5	0,2	-0,9	-0,6	-0,1
-7,1	-1,9	0,2	1,5	0,9	-0,1	0	0,3
-0,6	-0,8	1,5	1,6	-0,1	-0,7	0,6	1,3
1,8	-0,2	1,6	-0,3	-0,8	1,5	1	-1
-1,3	-0,4	-0,3	-1,5	-0,5	1,7	1,1	-0,8
-2,6	1,6	-3,8	-1,8	1,9	1,2	-0,6	-0,4

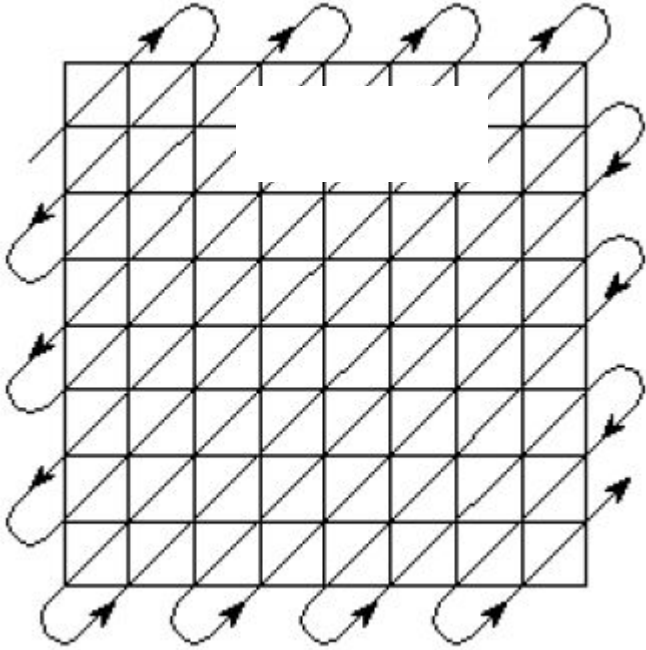
3. Следующим этапом работы алгоритма JPEG является *квантование*

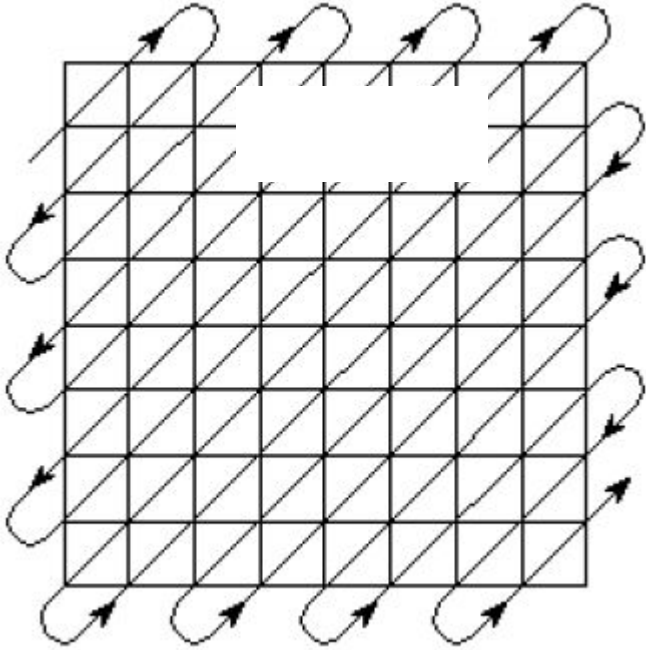
Квантование заключается в делении каждого коэффициента ДКП на некоторое число в соответствии с матрицей квантования. Эта матрица может быть фиксированной либо, для более качественного и эффективного сжатия, получена в результате анализа характера исходной картинки. Чем больше числа, на которые происходит деление, тем больше в результате деления будет нулевых значений, а значит, сильнее сжатие и заметнее потери.

Ранее полученный результат ДКП							
235,6	-1	-12,1	-5,2	2,1	-1,7	-2,7	1,3
-22,6	-17,5	-6,2	-3,2	-2,9	-0,1	0,4	-1,2
-10,9	-9,3	-1,6	1,5	0,2	-0,9	-0,6	-0,1
-7,1	-1,9	0,2	1,5	0,9	-0,1	0	0,3
-0,6	-0,8	1,5	1,6	-0,1	-0,7	0,6	1,3
1,8	-0,2	1,6	-0,3	-0,8	1,5	1	-1
-1,3	-0,4	-0,3	-1,5	-0,5	1,7	1,1	-0,8
-2,6	1,6	-3,8	-1,8	1,9	1,2	-0,6	-0,4



4. Следующим этапом работы алгоритма JPEG является *преобразование  $8 \times 8$  матрицы ДКП-спектра в линейную последовательность*.

Делается это таким образом, чтобы сгруппировать по возможности вместе все большие значения и все нулевые значения спектра. Для этого нужно прочесть элементы матрицы коэффициентов ДКП в порядке, изображенном  , то есть зигзагообразно – из левого верхнего угла к правому нижнему. Эта процедура называется *зигзаг-сканированием*.



6. Последним этапом работы алгоритма JPEG является *кодирование* полученной последовательности алгоритмом Хаффмена.

В результате получается новая последовательность, размер которой существенно меньше размера массива исходных данных.

Последние два этапа кодирования обычно называют вторичным сжатием, и именно здесь происходит неразрушающее статистическое кодирование, и с учетом характерной структуры данных – существенное уменьшение их объема.

Декодирование данных сжатых согласно алгоритму JPEG производится точно так же, как и кодирование, но все операции следуют в обратном порядке.

После неразрушающей распаковки методом Хаффмена и расстановки линейной последовательности в блоки размером  $8 \times 8$  чисел *спектральные компоненты* деквантуются с помощью сохраненных при кодировании таблиц квантования. Для этого распакованные 64 значения ДКП умножаются на соответствующие числа из таблицы.

После этого каждый блок подвергается обратному косинусному преобразованию, процедура которого совпадает с прямым и различается только знаками в матрице преобразования.

Квантованные данные

15	0	-1	0	0	0	0	0
-2	-1	0	0	0	0	0	0
-1	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Деквантованные данные

240	0	-10	0	0	0	0	0
-24	-12	0	0	0	0	0	0
-14	-13	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0



Результат обратного ДКП

144	146	149	152	154	156	156	156
148	150	152	154	156	156	156	156
155	156	157	158	158	157	156	155
160	161	161	162	161	159	157	155
163	163	164	163	162	160	158	156
163	164	164	164	162	160	158	157
160	161	162	162	162	161	159	158
158	159	161	161	162	161	159	158

Для сравнения – исходные данные

139	144	149	153	155	155	155	155
144	151	153	156	159	156	156	156
150	155	160	163	158	156	156	156
159	161	161	160	160	159	159	159
159	160	161	162	162	155	155	155
161	161	161	161	160	157	157	157
161	162	161	163	162	157	157	157
162	162	161	161	163	158	158	15







- К достоинствам алгоритма сжатия JPEG относят
- возможность задания в широких пределах (от 2 до 200) степени сжатия;
  - возможность работы с изображениями любой разрядности;
  - симметричность процедур сжатия – распаковки.

К недостаткам можно отнести наличие ореола на резких переходах цветов – эффект Гиббса, а также распадение изображения на отдельные квадратики  $8 \times 8$  при высокой степени сжатия.