Лекция 4.

- **МИНИМИЗАЦИЯ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ**

1.Понятие о минимизации ПФ

- При технической реализации переключательных функций, широко используемых в вычислительной технике, системах автоматического (автоматизированного) управления и контроля, возникает задача нахождения наиболее экономичного представления соответствующих переключательных функций.

1.Понятие о минимизации ПФ

- Ограничимся целью нахождения наиболее простого представления переключательной функции в смысле наименьшего числа входящих в нее символов (букв). Процесс получения такого представления будем называть минимизацией.
-

1.Понятие о минимизации ПФ

- Методы минимизации разрабатываются применительно к каждой отдельной функциональной полной системе элементных переключательных функций. Наиболее детально такие методы разработаны для систем из дизъюнкции, конъюнкции и инверсии.

Импликанта и имплицента

- **При минимизации переключательных функций существенную роль играют понятия импликанты, простой импликанты, имплиценты и простой имплиценты.**
- **Пусть f(x), g(x), p(x) – полностью определенные функции, причем под x понимается некоторый набор из n переменных (x1x2…xn).**
- **Функция f(x) определена на рабочих (единичных) наборах M1[f(x)] и множестве запрещенных (нулевых) наборов M0[f(x)].**
- **Функция g(x) определена на множестве рабочих (единичных) наборов M1[g(x)], а функция p(x) – на множестве запрещенных (нулевых) наборов M0[p(x)].**

Импликанта

- Переключательная функция g(x) называется импликантой переключательной функции f(x), если множество рабочих (единичных) наборов функции g(x) совпадает или является подмножеством множества рабочих наборов функции f(x), т.е. $M1[g(x)] \subseteq M1[f(x)]$, где $\subseteq$ – знак включения в множество, означающий, что всякий элемент левого множества является элементом правого множества. При этом говорят, что M1[f(x)] содержит M1[g(x)], т.е. в соответствии с определением импликации $g(x) \to f(x)$.

Имплицента

- Переключательная функция p(x) является импликацентой переключательной функции f(x), если множество запрещенных (нулевых) наборов функции p(x) совпадает или является подмножеством множества запрещенных (нулевых) наборов функции f(x), т.е. M0[p(x)]⊆ M0[f(x)].

Склеивание

- Из СДНФ можно получить другие импликанты путем всевозможных группировок ее членов (конституент) и многократного использования (по возможности) закона склеивания, пока не останется конъюнкций, отличающихся значениями одной переменной.

Простая импликанта

- Простой импликантой функции f(x) называется любая элементарная конъюнкция в g(x), являющаяся импликантой функции и обладающая тем свойством, что никакая ее собственная часть уже не является импликантой.

СкДНФ

- В булевой алгебре переключательных функций утверждается и доказывается: 1) дизъюнкция любого числа импликант переключательной функции также является импликантой этой функции;
- 2) любая переключательная функция равносильна дизъюнкции всех своих простых импликант, и такая форма ее представления называется сокращенной ДНФ (СкДНФ).

Исключение «лишних» простых импликант

- Иногда из сокращенной ДНФ можно убрать одну или несколько простых импликант, не нарушая количества необходимых рабочих наборов. Такие простые импликанты назовем лишними.
- Исключение лишних простых импликант из сокращенной ДНФ – второй этап минимизации.

Тупиковые ДНФ

- Сокращенная ДНФ переключательной функции называется тупиковой, если в ней отсутствуют лишние простые импликанты.
- Устранение лишних простых импликант из сокращенной ДНФ переключательной функции не является однозначным процессом, т.е. переключательная функция может иметь несколько тупиковых ДНФ.
- Тупиковые ДНФ, содержащие минимальное число букв, являются минимальными.

ОТДНФ

- Минимальных ДНФ тоже может быть несколько. Минимальная ДНФ функции, найденная путем построения и перебора всех тупиковых ДНФ и выбора из них самой минимальной, называется общей (абсолютной) тупиковой ДНФ.

ЧМДНФ

- Поиск минимальной ДНФ всегда связан с перебором решений. Существуют методы уменьшения перебора, но он всегда имеется. Как правило, ограничиваются нахождением одной или нескольких тупиковых ДНФ, из которых выбирают минимальную, – её называют частной минимальной ДНФ и считают близкой к общей (абсолютной).

Минимизация не полностью определенных ПФ

- При минимизации не полностью определенных переключательных функций особенностью является то, что необходимо найти такое ее доопределение за счет условных наборов, которое соответствует минимальной ДНФ, содержащей наименьшее число букв.

2.Метод Квайна - Мак -Класки

- Метод основан на попарном сравнении и склеивании при возможности всех конституент (членов СДНФ). Для этого каждая конституента сравнивается с последующими, что приводит к получению импликант. Полученные импликанты вновь подвергаются сравнению и при возможности склеиваются – и т.д. до тех пор, пока оставшиеся импликанты уже не будут поддаваться склеиванию. Это и есть простые импликанты, их дизъюнкция представляет собой сокращенную ДНФ.

2.Метод Квайна - Мак -Класки

- Для упорядочения целесообразно разбивать конституенты на группы по числу неинверсированных переменных.
- В этом случае каждая очередная конституента, начиная сверху, сравнивается только с конституентами группы, соседней снизу, с числом неинверсированных переменных на единицу больше.

2.Метод Квайна - Мак -Класки

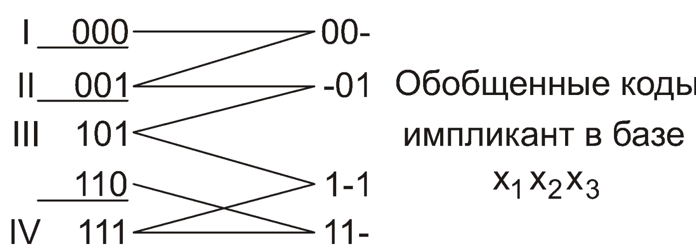
- Мак-Класки формализовал метод Квайна, с целью использования ЭВМ. Формализация заключается в записи конституент единицы (членов СДНФ) их двоичными номерами. Все номера разбиваются на непересекающиеся группы по числу единиц в двоичном номере. Склеивания производятся только между соседними группами. Ликвидируемый разряд обозначается знаком «–» («тире»). Дальнейшие группы из полученных импликант образуются с учетом однинакового расположения тире. Такое обозначение импликант называется обобщенными кодами

2.Метод Квайна - Мак -Класки

- Пусть задана функция

$$f(x_1x_2x_3) = x_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3$$

- Сгруппируем эти конституенты единицы по числу единиц:



2.Метод Квайна - Мак -Класки

- Дальнейшие склеивания невозможны. Нахождение минимальных ДНФ далее производится по импликантной таблице

$$K = (C \vee D)(B \vee C)(A \vee B)AD = (B \vee C)AD = BAD \vee CAD.$$

$$f_1 = x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2$$

$$f_2 = \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2$$

	Простые импликанты			Конституенты единиц				
	x_1	x_2	x_3	111	101	001	000	110
A	0	0	-			+	+	
B	-	0	1		+	+		
C	1	-	1	+	+			
D	1	1	-	+				+

Метод Блейка-Порецкого.

- **Метод Блейка-Порецкого**.
- Метод позволяет получать сокращенную ДНФ булевой функции по ее произвольной ДНФ, а не по СДНФ, как в методах Квайна и Квайна-Мак-Класки, используя закон обобщенного склеивания

3.Минимизация переключательных функций по картам Карно

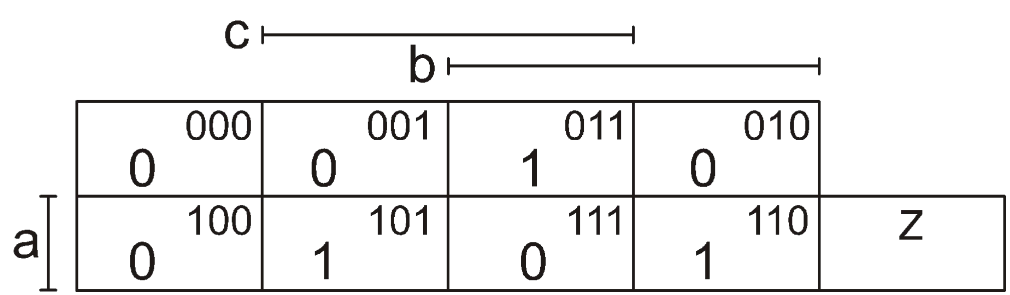
- При решении задач минимизации как полностью определенных, так и не полностью определенных переключательных функций, зависящих от небольшого числа переменных, широкое применение находят графические методы.

Минимизация переключательных функций по картам Карно

- Метод минимизации по картам Карно позволяет графически получать экономное покрытие переключательной функции правильными конфигурациями её единиц.
- Карта Карно – это таблица истинности специального вида, в которой переменные функции расположены не одномерным, а двумерным массивом (по горизонтали и вертикали), причем каждому набору переменных поставлена в соответствие одна клетка.

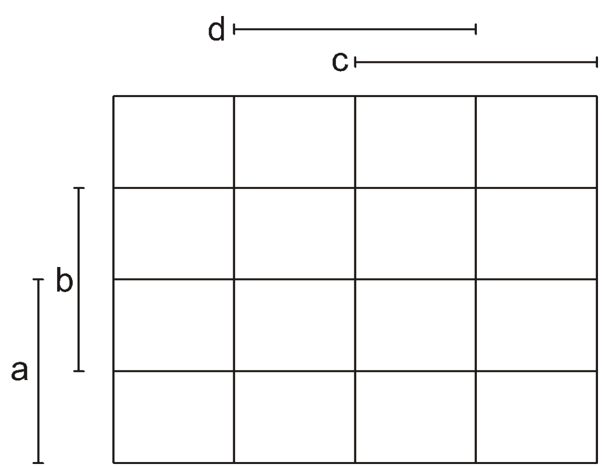
Минимизация переключательных функций по картам Карно

- Карта Карно для трёх переменных



Минимизация переключательных функций по картам Карно

- Карта Карно для четырёх переменных



Минимизация переключательных функций по картам Карно

- Минимизация переключательной функции по карте Карно в классе ДНФ заключается в покрытии ее единиц минимальным количеством максимальных правильных контуров. В эти контуры могут включаться и условные наборы. Контуры могут пересекаться, но не могут включаться друг в друга – иначе не получатся простые импликанты.

Минимизация переключательных функций по картам Карно

- Правильными контурами для карты 4-х переменных могут быть следующие:
- **одноклеточный** – одна клетка с единицей, окруженная нулями;
- **двухклеточный** – две соседние клетки, окруженные нулями;

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	~	0	0
11	0	1	0	0
10	0	0	0	0

а)

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	0	~	0	0

б)

Минимизация переключательных функций по картам Карно

- **четырехклеточный** – квадрат из четырех соседних клеток, окруженных нулями;

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	1
11	1	1	0	1
10	1	1	0	1

а)

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

б)

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

в)

Минимизация переключательных функций по картам Карно

- **восьмиклеточный** – куб из восьми соседних клеток, окруженных нулями;

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

а)

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

б)

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

в)

Минимизация переключательных функций по картам Карно

- По карте Карно удобна также минимизация в классе КНФ. В этом случае каждому контуру из нулей с возможным добавлением «тильд» соответствует имплицента – член КНФ, которая строится также из переменных, не меняющих своего значения в номере клеток «нулевого» контура, только, если переменная в номере клетки равна нулю, то в КНФ она будет без инверсии, а если равна единице – то в КНФ она будет с инверсией.