

# Лекция 4.

## ◆ МИНИМИЗАЦИЯ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ



# 1. Понятие о минимизации ПФ

- ◆ При технической реализации переключательных функций, широко используемых в вычислительной технике, системах автоматического (автоматизированного) управления и контроля, возникает **задача нахождения наиболее экономичного представления соответствующих переключательных функций.**

# 1. Понятие о минимизации ПФ

- ◆ Ограничимся целью нахождения наиболее простого представления переключательной функции в смысле наименьшего числа входящих в нее символов (букв).  
Процесс получения такого представления будем называть минимизацией.



# 1. Понятие о минимизации ПФ

- ◆ Методы минимизации разрабатываются применительно к каждой отдельной функциональной полной системе элементарных переключательных функций. Наиболее детально такие методы разработаны для систем из дизъюнкции, конъюнкции и инверсии.

# Импликанта и имплицента

- ◆ При минимизации переключательных функций существенную роль играют понятия импликанты, простой импликанты, имплиценты и простой имплиценты.
- ◆ Пусть  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $p(x)$  – полностью определенные функции, причем под  $x$  понимается некоторый набор из  $n$  переменных  $(x_1x_2\dots x_n)$ .
- ◆ Функция  $f(x)$  определена на рабочих (единичных) наборах  $M_1[f(x)]$  и множестве запрещенных (нулевых) наборов  $M_0[f(x)]$ .
- ◆ Функция  $g(x)$  определена на множестве рабочих (единичных) наборов  $M_1[g(x)]$ , а функция  $p(x)$  – на множестве запрещенных (нулевых) наборов  $M_0[p(x)]$ .

# Импликанта

- ◆ Переключательная функция  $g(x)$  называется импликантой переключательной функции  $f(x)$ , если множество рабочих (единичных) наборов функции  $g(x)$  совпадает или является подмножеством множества рабочих наборов функции  $f(x)$ , т.е.  $M1[g(x)] \subseteq M1[f(x)]$ , где  $\subseteq$  – знак включения в множество, означающий, что всякий элемент левого множества является элементом правого множества. При этом говорят, что  $M1[f(x)]$  содержит  $M1[g(x)]$ , т.е. в соответствии с определением импликации  $g(x) \rightarrow f(x)$ .

# Имплицента

- ◆ Переключательная функция  $p(x)$  является имплицентой переключательной функции  $f(x)$ , если множество запрещенных (нулевых) наборов функции  $p(x)$  совпадает или является подмножеством множества запрещенных (нулевых) наборов функции  $f(x)$ , т.е.  $M_0[p(x)] \subseteq M_0[f(x)]$ .

# Склеивание

- ◆ Из СДНФ можно получить другие импликанты путем всевозможных группировок ее членов (конституент) и многократного использования (по возможности) закона склеивания, пока не останется конъюнкций, отличающихся значениями одной переменной.

# Простая импликанта

- ◆ Простой импликантой функции  $f(x)$  называется любая элементарная конъюнкция в  $g(x)$ , являющаяся импликантой функции и обладающая тем свойством, что никакая ее собственная часть уже не является импликантой.

# СкДНФ

- ◆ В булевой алгебре переключательных функций утверждается и доказывается:
  - 1) дизъюнкция любого числа импликант переключательной функции также является импликантой этой функции;
  - 2) любая переключательная функция равносильна дизъюнкции всех своих простых импликант, и такая форма ее представления называется сокращенной ДНФ (СкДНФ).

# Исключение «лишних» простых импликант

- ◆ Иногда из сокращенной ДНФ можно убрать одну или несколько простых импликант, не нарушая количества необходимых рабочих наборов. Такие простые импликанты назовем лишними.
- ◆ Исключение лишних простых импликант из сокращенной ДНФ – второй этап минимизации.

# Тупиковые ДНФ

- ◆ Сокращенная ДНФ переключательной функции называется тупиковой, если в ней отсутствуют лишние простые импликанты.
- ◆ Устранение лишних простых импликант из сокращенной ДНФ переключательной функции не является однозначным процессом, т.е. переключательная функция может иметь несколько тупиковых ДНФ.
- ◆ Тупиковые ДНФ, содержащие минимальное число букв, являются минимальными.

# ОТДНФ

- ◆ Минимальных ДНФ тоже может быть несколько. Минимальная ДНФ функции, найденная путем построения и перебора всех тупиковых ДНФ и выбора из них самой минимальной, называется общей (абсолютной) тупиковой ДНФ.

# ЧМДНФ

- ◆ Поиск минимальной ДНФ всегда связан с перебором решений. Существуют методы уменьшения перебора, но он всегда имеется. Как правило, ограничиваются нахождением одной или нескольких тупиковых ДНФ, из которых выбирают минимальную, – её называют частной минимальной ДНФ и считают близкой к общей (абсолютной).

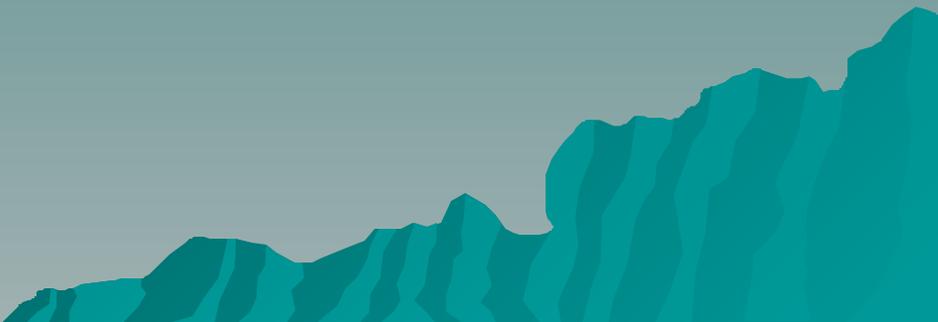
# Минимизация не полностью определенных ПФ

- ◆ При минимизации не полностью определенных переключательных функций особенностью является то, что необходимо найти такое ее доопределение за счет условных наборов, которое соответствует минимальной ДНФ, содержащей наименьшее число букв.

## 2.Метод Квайна - Мак -Класки

- ◆ Метод основан на попарном сравнении и склеивании при возможности всех конституент (членов СДНФ). Для этого каждая конституента сравнивается с последующими, что приводит к получению импликант. Полученные импликанты вновь подвергаются сравнению и при возможности склеиваются – и т.д. до тех пор, пока оставшиеся импликанты уже не будут поддаваться склеиванию. Это и есть простые импликанты, их дизъюнкция представляет собой сокращенную ДНФ.

## 2.Метод Квайна - Мак -Класки

- ◆ Для упорядочения целесообразно разбивать конституенты на группы по числу неинверсированных переменных.
  - ◆ В этом случае каждая очередная конституента, начиная сверху, сравнивается только с конституентами группы, соседней снизу, с числом неинверсированных переменных на единицу больше.
- 

## 2.Метод Квайна - Мак -Класки

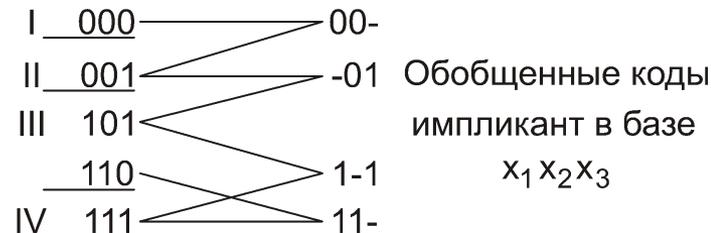
- ◆ Мак-Класки формализовал метод Квайна, с целью использования ЭВМ. Формализация заключается в записи конститuent единицы (членов СДНФ) их двоичными номерами. Все номера разбиваются на непересекающиеся группы по числу единиц в двоичном номере. Склеивания производятся только между соседними группами. Ликвидируемый разряд обозначается знаком «-» («тире»). Дальнейшие группы из полученных импликант образуются с учетом одинакового расположения тире. Такое обозначение импликант называется обобщенными кодами

# 2.Метод Квайна - Мак -Класки

- Пусть задана функция

$$f(x_1x_2x_3) = x_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$$

- Сгруппируем эти конституенты единицы по числу единиц:



# 2.Метод Квайна - Мак -Класки

- Дальнейшие склеивания невозможны. Нахождение минимальных ДНФ далее производится по импликантной таблице

$$K = (C \vee D)(B \vee C)(A \vee B)AD = (B \vee C)AD = BAD \vee CAD.$$

$$f_1 = x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2$$

$$f_2 = \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2$$

Простые импликанты			Конституенты единиц				
$x_1$	$x_2$	$x_3$	111	101	001	000	110
A	0	0	-		+	+	
B	-	0	1		+	+	
C	1	-	1	+	+		
D	1	1	-	+			+

# Метод Блейка-Порецкого.

- **Метод Блейка-Порецкого.**
- Метод позволяет получать сокращенную ДНФ булевой функции по ее произвольной ДНФ, а не по СДНФ, как в методах Квайна и Квайна-Мак-Класки, используя закон **обобщенного склеивания**

# 3. Минимизация переключательных функций по картам Карно

- При решении задач минимизации как полностью определенных, так и не полностью определенных переключательных функций, зависящих от небольшого числа переменных, широкое применение находят графические методы.

# Минимизация переключательных функций по картам Карно

- Метод минимизации по картам Карно позволяет графически получать экономное покрытие переключательной функции правильными конфигурациями её единиц.
- Карта Карно – это таблица истинности специального вида, в которой переменные функции расположены не одномерным, а двумерным массивом (по горизонтали и вертикали), причем каждому набору переменных поставлена в соответствие одна клетка.

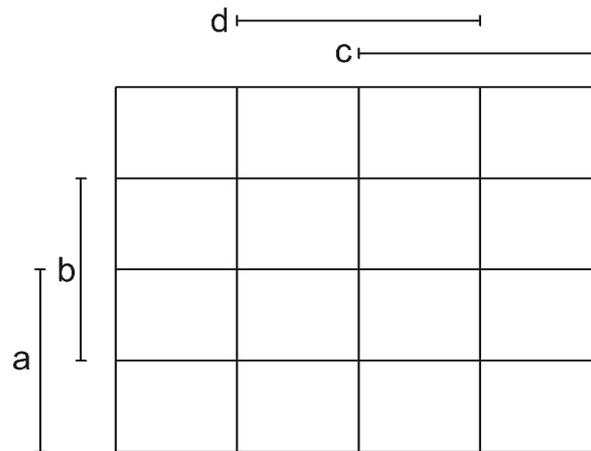
# Минимизация переключательных функций по картам Карно

- Карта Карно для трёх переменных

	c		b		
	000	001	011	010	
	0	0	1	0	
a	100	101	111	110	Z
	0	1	0	1	

# Минимизация переключательных функций по картам Карно

- Карта Карно для четырёх переменных



# Минимизация переключательных функций по картам Карно

- Минимизация переключательной функции по карте Карно в классе ДНФ заключается в покрытии ее единиц минимальным количеством максимальных правильных контуров. В эти контуры могут включаться и условные наборы. Контуры могут пересекаться, но не могут включаться друг в друга – иначе не получатся простые импликанты.

# Минимизация переключательных функций по картам Карно

- Правильными контурами для карты 4-х переменных могут быть следующие:
- **одноклеточный** – одна клетка с единицей, окруженная нулями;
- **двухклеточный** – две соседние клетки, окруженные нулями;

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	~	0	0
11	0	1	0	0
10	0	0	0	0

а)

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	0	~	0	0

б)

# Минимизация переключательных функций по картам Карно

- **четырёхклеточный** – квадрат из четырех соседних клеток, окруженных нулями;

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	1
11	1	1	0	1
10	1	1	0	1

а)

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

б)

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

в)

# Минимизация переключательных функций по картам Карно

- **ВОСЬМИКЛЕТОЧНЫЙ** – куб из восьми соседних клеток, окруженных нулями;

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

а)

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

б)

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

в)

# Минимизация переключательных функций по картам Карно

- По карте Карно удобна также минимизация в классе КНФ. В этом случае каждому контуру из нулей с возможным добавлением «тильда» соответствует имплицента – член КНФ, которая строится также из переменных, не меняющих своего значения в номере клеток «нулевого» контура, только, если переменная в номере клетки равна нулю, то в КНФ она будет без инверсии, а если равна единице – то в КНФ она будет с инверсией.