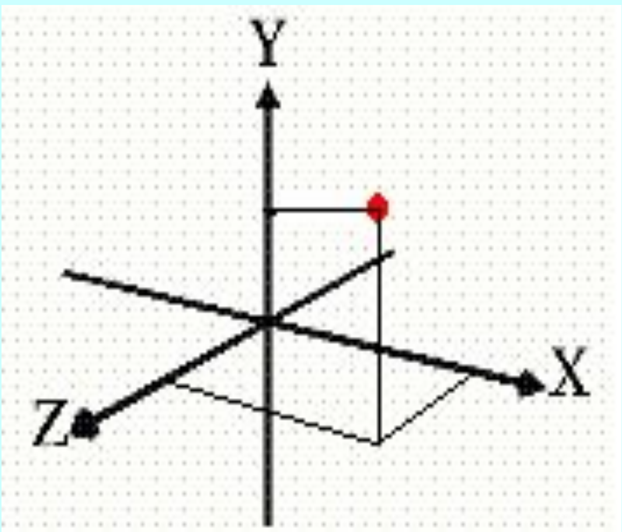
МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

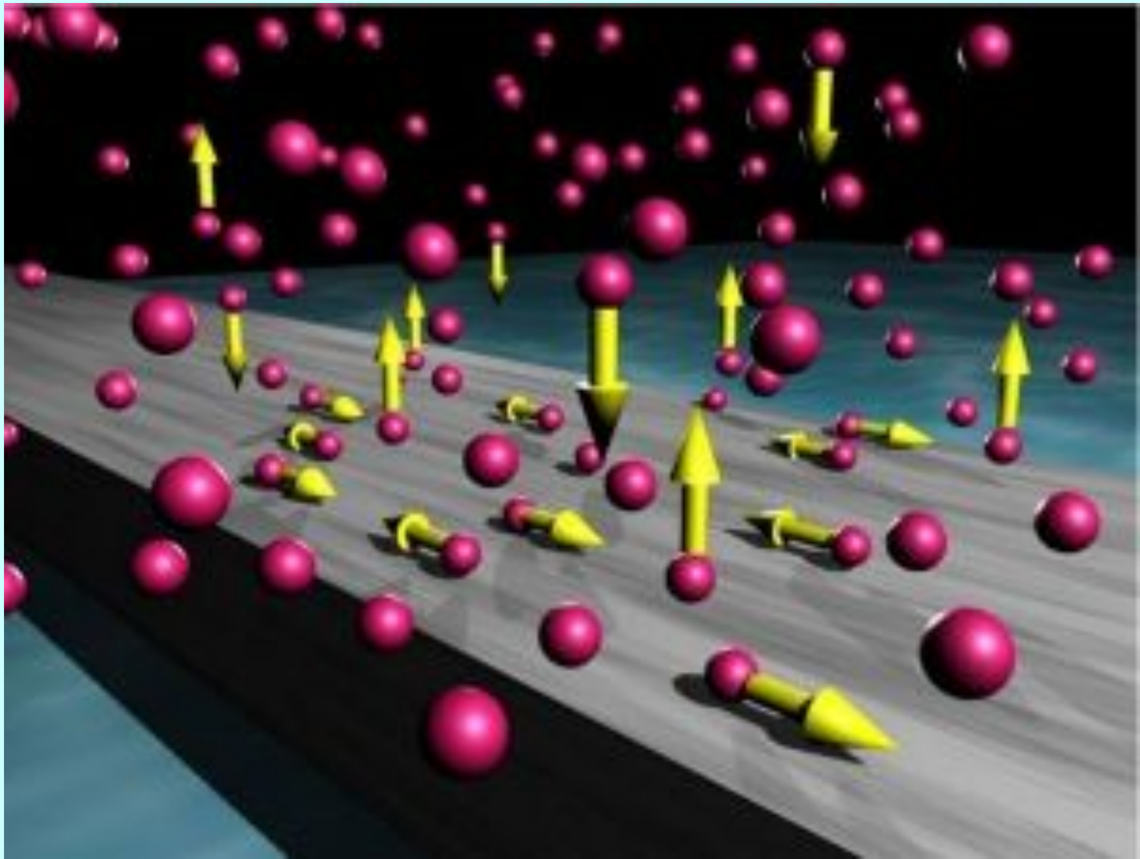
Пусть имеется пространство элементарных событий U, на нем построено поле событий и для каждого события A из этого поля определена вероятность P(A).

Каждому элементарному событию g_i из U сопоставим несколько чисел: ξ_{i1}, ξ_{i2}, ξ_{i3}, ... ξ_{ik} или вектор ξ_i. Потребуем, чтобы для любых x_j ($-\infty < x_j < +\infty$), $j = 1, 2 \ldots k$, множество A тех g_j, для которых $\xi_j < x_j$ ($j = 1, 2, \ldots k$) , принадлежало полю событий, т.е. для него определена вероятность $P\{ \xi_1 < x_1 , \ \xi_2 < x_2 , \ldots \ \xi_k < x_k \} = P(A) = F(x_1, x_2, \ \ldots x_k)$. Тогда ξ называется <u>многомерной случайной величиной</u>, или <u>случайным вектором</u>, а $F(x_1, x_2, \ \ldots x_k)$ ее <u>функцией распределения</u>.

Примеры:

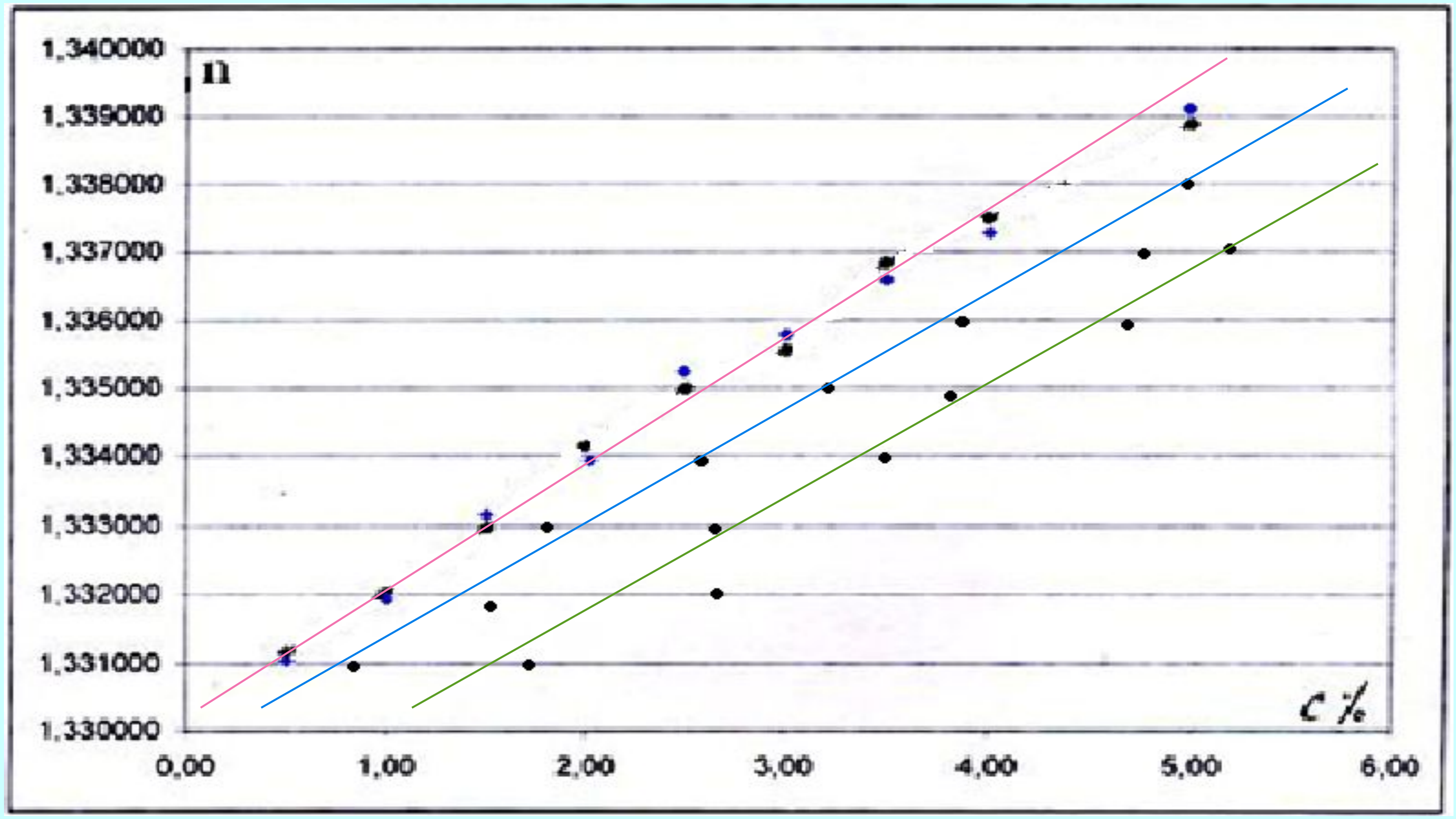
1 . Координаты молекулы, находящейся в сосуде с газом, (x,y,z) или компоненты ее скорости (Vx,Vy,Vz) - можно рассматривать как трехмерные случайные величины





2 . В задаче "о встрече" время прихода одного участника (x_1) и другого (x_2), если условия их прихода известны (скажем - любой момент в течение заданного часа), пару чисел x_1, x_2 можно рассматривать как двумерную случайную величину

3 . Результат эксперимента, состоящего в измерении показателя преломления раствора в зависимости от концентрации уксусной кислоты можно рассматривать как девятимерную случайную величину



Свойства многомерной функции распределения:

1 . $F(x_1, x_2, \dots x_{k-1}, -\infty) = 0$, т.е. если хоть один из аргументов принимает значение $-\infty$, то $F=0$.

2 . $F(x_1, x_2, \dots x_k)$ не убывающая функция любого аргумента

3. $F(x_1, x_2, \dots x_{k-1}, \infty) = F(x_1, x_2, \dots x_{k-1})$, т.е. если один из аргументов принимает значение ∞, то размерность случайной величины уменьшается на 1.

Многомерные случайные величины могут быть **непрерывными**, т.е. принимать любые значения в некоторой области к-мерного пространства (например, упомянутые выше компоненты скорости молекулы).

У них F(x_1, x_2, ... x_k) непрерывная функция всех аргументов. Для них определена к-мерная **плотность распределения** p(x_1, x_2, ... x_k), которая есть производная от функци распределения.

$$P(x) = \frac{d^k F(x_1, x_2, \dots, x_k)}{dx_1 dx_2 \dots dx_k}; \; F(x_1, x_2, \dots, x_k) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_k} p(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 \, dx_2 \dots dx_k \, ;$$

Вероятность того, что случайный вектор примет значение, лежащее в области V к-мерного пространства, равна интегралу по этой области от к-мерной плотности распределения. Интеграл по всем переменным от - ∞ до + ∞ от к-мерной плотности распределения равен 1.

Интеграл по одной переменной от - ∞ до + ∞ от к-мерной плотности распределения равен плотности распределения (к-1)-мерной случайной величины.

Например:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y,z)dz = p(x,y)$$

Многомерные случайные величины могут быть <u>дискретными</u>, т.е. каждая компонента случайного вектора может принимать только конечное или счетное множество определенных значений.

Например, рассмотрим эксперимент по бросанию одновременно двух костей, с каждым элементарным событием свяжем два числа (z_1, z_2), где z_1 - число очков на первой кости, z_2 - сумма очков на двух костях. Тогда (z_1, z_2) - двумерная случайная величина, поскольку известна вероятность p(x_i, x_k) пересечения событий, состоящих в том, что z_1 примет значение x_i, а z_2 - x_k . Для дискретных случайных величин закон распределения задается вероятностями всевозможных комбинаций их значений. Для двумерной величины при небольшом числе возможных значений это удобно представить в виде таблицы, где на пересечении столбца z_1 и строки z_2 стоит вероятность p(z_1, z_2)

Закон распределения двумерной величины z_1, z_2

$z_2 \backslash z_1$	1	2	3	4	5	6	$p(z_2)$
2	1/36	0	0	0	0	0	1/36
3	1/36	1/36	0	0	0	0	1/18
4	1/36	1/36	1/36	0	0	0	1/12
5	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	1/9
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	5/36
7	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
8	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	5/36
9	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/9
10	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/12
11	0	0	0	0	1/36	1/36	1/18
12	0	0	0	0	0	1/36	1/36
$p(z_1)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Просуммировав все значения $p(z_1, z_2)$ вдоль каждой строки, мы получим вероятности определенных значений z_2, т.е. закон распределения одномерной величины z_2. Аналогично, сумма по столбцам даст закон распределения одномерной величины z_1.

Сумма всех чисел в таблице должна быть равна 1.

Математическим ожиданием многомерной случайной величины называется вектор, компоненты которого являются математическим ожиданием каждой отдельной компоненты случайного вектора.

$$M(z_1, z_2, \dots z_k) = (Mz_1, Mz_2, \dots Mz_k).$$

Mz_i вычисляются как сумма или интеграл так же, как и для одномерных случайных величин.

<u>Дисперсия</u> многомерной случайной величины описывается <u>ковариационной матрицей</u>.

Это таблица чисел размерности К×К для К-мерной величины, у которой на диагонали стоят дисперсии соответствующих одномерных величин, вычисляемых обычным образом, а ij-тым элементом является b_{ij} - коэффициент ковариации i-той и j-той компоненты случайного вектора.

$$\widehat{D} = \begin{pmatrix} Dz_1 & b_{12} & b_{13} \dots & b_{1k} \\ b_{21} & Dz_2 & b_{23} \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots\dots & Dz_k \end{pmatrix}$$

<u>Коэффициент ковариации</u> **случайных величин z_i, z_j, обозначаемый иногда как $cov(z_i,z_j)$, есть математическое ожидание произведения отклонений каждой из этих величин от своего математического ожидания:**

$$\widehat{D} = \begin{pmatrix} Dz_1 & b_{12} & b_{13} \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & Dz_2 & b_{23} \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots\cdots & Dz_k \end{pmatrix}$$

Для вычисления коэффициента ковариации надо знать закон распределения двумерной случайной величины (z_i,z_j). Тогда для непрерывных величин:

$$\widehat{D} = \begin{pmatrix} Dz_1 & b_{12} & b_{13} \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & Dz_2 & b_{23} \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots\cdots & Dz_k \end{pmatrix}$$

для дискретных величин:

$$\widehat{D} = \begin{pmatrix} Dz_1 & b_{12} & b_{13} \; \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & Dz_2 & b_{23} \; \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots \; \cdots & Dz_k \end{pmatrix}$$

Здесь суммирование ведется по всем t значениям, которые принимает величина z_i и всем q значениям, которые принимает величина z_j .

Преобразовав , получим более удобную формулу для вычисления коэффициента ковариации

$$b_{ij} = \sum_t \sum_q [z_i^t z_j^q p(z_i^t z_j^q) - z_i^t Mz_j p(z_i^t z_j^q) - z_j^q Mz_i p(z_i^t z_j^q) + Mz_j Mz_i p(z_i^t z_j^q)]$$
$$= M(z_i z_j) - Mz_i \cdot Mz_j$$

Часто используется понятие: <u>коэффициент корреляции</u> r_{ij} - это коэффициент ковариации, деленный на корень из произведения дисперсий i-той и j-той компонент случайного вектора

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} Dz_1 & b_{12} & b_{13} \dots & b_{1k} \\ b_{21} & Dz_2 & b_{23} \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots\dots & Dz_k \end{pmatrix}$$

$$|r_{ij}| <= 1$$

доказательство:

$$D(x \pm y) = M[(x \pm y) - M(x \pm y)]^2 = M[(x - Mx) \pm (y - My)]^2 = Dx + Dy \pm 2M[(x - Mx)(y - My)]$$

$$D\left(\frac{x}{\sqrt{Dx}} \pm \frac{y}{\sqrt{Dy}}\right) = 1 + 1 \pm \frac{2M[(x - Mx)(y - My)]}{\sqrt{Dx} \cdot \sqrt{Dy}} = 2 \pm 2\, r_{xy} \geq 0$$

Компоненты многомерной случайной величины называются <u>независимыми</u>, если многомерная функция распределения, многомерная плотность распределения, вероятность определенного набора значений распадаются на произведение соответствующих одномерных функций или вероятностей

Случайные величины независимы, если независимы события A: $\xi_i<x_i$ B: $\xi_k<x_k$,
Для независимых событий $P(AB)=P(A)*P(B)$, т.е. $F(x_i,x_k)=F(x_i)*F(x_k)$. Соответственно:

$$p(x_1 x_2 \ldots x_k)=\frac{\partial[F(x_1)\cdot F(x_2)\ldots F(x_k)]}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_k}=p(x_1)p(x_2)\ldots p(x_k)$$

$$p(x_i,y_j,z_k)=p(x_i)p(y_j)p(z_k)$$

Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их матожиданий   всегда

$$M(x+y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)p(xy)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xp(xy)dxdy+$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yp(xy)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}yp(y)dy=Mx+My$$

Математическое ожидание произведения <u>независимых</u> случайных величин равно произведению их матожиданий

$$M(xy)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(xy)p(xy)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyp(x)p(y)dxdy=Mx\cdot My$$

Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

$$D(x\pm y)=M[(x\pm y)-M(x\pm y)]^2=M[(x-Mx)\pm(y-My)]^2=$$
$$Dx+Dy\pm 2M[(x-Mx)(y-My)]$$

<u>Коэффициенты ковариации и корреляции независимых</u> <u>случайных величин равны 0</u>, следовательно, ковариационная матрица - диагональна

Если r=0, то <u>не обязательно</u> случайные величины <u>независимы.</u>

Пусть есть 2 генератора, вырабатывающие числа z_1. z_2, равные 0 или 1 с вероятностями 1/2. Рассмотрим закон распределения двумерной величины x_1, x_2 , построенной по правилу: $x_1= z_1+ z_2$, $x_2= z_1- z_2$.

x_2 \ x_1	0	1	2	$p(x_2)$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
$p(x_1)$	1/4	1/2	1/4	1

$Mx_1=1$; $Mx_2=0$

$M(x_1x_2)=$
$-1/4+1/4=0$

$Cov(x_1x_2)=0$

$r_{12}=0$

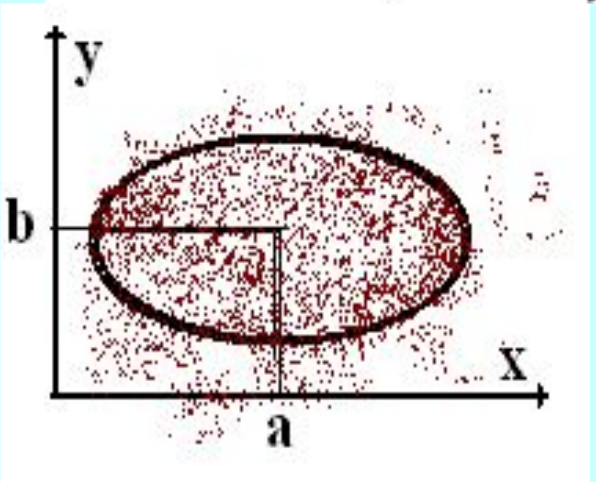
Они не независимы: $p(1,1)=1/4$; $p(1)p(1)=1/8$

Эллипсоид рассеяния- это область, в которой значения многомерной случайной величины лежат с наибольшей вероятностью.

$$(\vec{x}-\overrightarrow{Mx})^T \hat{D}^{-1} (\vec{x}-\overrightarrow{Mx}) = C$$

Пример: x, y независимы. Mx=a, My=b C=1

$$(x\text{-}a)(y\text{-}b)\begin{pmatrix} \frac{1}{Dx} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Dy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\text{-}a \\ y\text{-}b \end{pmatrix} = \frac{(x\text{-}a)^2}{Dx} + \frac{(y\text{-}b)^2}{Dy} = 1$$



В данном случае это эллипс с центром в точке a, b и осями $\sqrt{Dx}, \sqrt{Dy}$

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

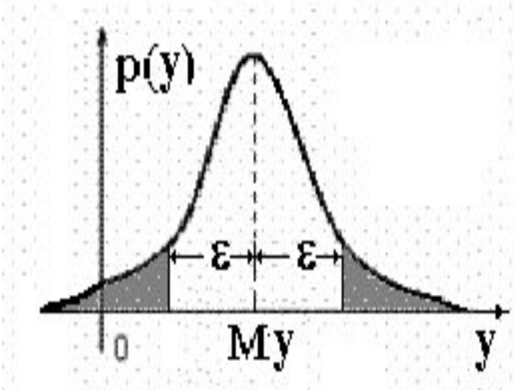
Сущность <u>закона больших чисел</u> состоит в том , что при большом числе независимых опытов частота появления какого-то события близка к его вероятности.

Этот известный факт следует из <u>теоремы Чебышева.</u>

Сначала докажем неравенство $$P_1(|y - My| \geq \varepsilon) \leq \frac{Dy}{\varepsilon^2}$$

$$P_1 = \int_{-\infty}^{My-\varepsilon} p(y)dy + \int_{My+\varepsilon}^{\infty} p(y)dy \leq$$

$$\int_{-\infty}^{My-\varepsilon} p(y)\frac{(y-My)^2}{\varepsilon^2}dy + \int_{My+\varepsilon}^{\infty} p(y)\frac{(y-My)^2}{\varepsilon^2}dy \leq$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} p(y)\frac{(y-My)^2}{\varepsilon^2}dy = \frac{Dy}{\varepsilon^2} \qquad P_1 \leq \frac{Dy}{\varepsilon^2}$$

$$P(|y - My| < \varepsilon) = 1 - P_1$$

Обозначим: $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = y \qquad My = Mx \qquad Dy = \frac{Dx}{n}$$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - Mx\right| < \varepsilon\right) = 1 - P_1 \geq 1 - \frac{Dx}{n\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - Mx\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Среднее арифметическое сходится к матожиданию по вероятности

Сходимость по вероятности отличается от обычной сходимости тем, что нельзя указать такого n, при котором разность станет наверняка меньше ε, хотя и ничтожно малая, но существует вероятность и большего отклонения.

При независимых испытаниях

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \to 1$$

при $n\to\infty$

При большом числе испытаний частота появления события мало отличается от его вероятности

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

Характеристические функции случайных величин.

Определение: $$f_x(t) = Me^{itx} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)dx$$

Если x и y независимы, то $$f_{x+y}(t) = Me^{it(x+y)} = M(e^{itx} \cdot e^{ity}) = f_x(t) \cdot f_t(t)$$

$$f_x(0) = 1$$

$$\left.\frac{df_x(t)}{dt}\right|_{t=0} = i\int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx} p(x)dx = iMx$$

$$\left.\frac{d\ln f_x(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{f}\frac{df}{dt} = iMx$$

$$\left.\frac{d^2\ln f_x(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f}\frac{df}{dt}\right) = -\frac{1}{f^2}\left(\frac{df}{dt}\right)^2 - \frac{1}{f}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{itx} p(x)dx =$$

$$f=1,\ df/dt=iMx \quad \Big| = (Mx)^2 - Mx^2 = -Dx$$

Если $x=\sigma z+a$, то $$f_x(t) = Me^{i\sigma zt+ita} = e^{ita} Me^{i(\sigma t)z} = e^{ita} f_z(\sigma t)$$

Характеристическая функция нормально распределенной величины

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

используем обозначение $x \sim N(a,\sigma^2)$

Положим: $z=\frac{(x-a)}{\sigma}$ $z \sim N(0,1)$

$$f_z(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itz+z^2/2}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itz+z^2/2\pm t^2/2}dz =$$

$$y=\frac{z-it}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-(z-it)^2}{2}}dz=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$$

$$f_x(t)=e^{ita}e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}} \qquad Mx=a \quad Dx=\sigma^2$$

Нормальное распределение -наиболее распространенное в природе распределение случайных величин. Математическим обоснованием этого факта служит <u>центральная предельная теорема:</u>

Сумма большого числа как угодно распределенных независимых случайных величин распределена асимптотически нормально, если только слагаемые вносят равномерно малый вклад в сумму.

Это значит, что чем больше независимых слагаемых в сумме, тем ближе закон ее распределения к нормальному. Вместо суммы часто рассматривают среднее арифметическое большого числа случайных величин, оно отличается от суммы только множителем (1/n) , поэтому его распределение также стремится к нормальному с ростом числа n суммируемых величин. Поскольку случайные величины, с которыми мы сталкиваемся, например, при измерениях, есть результат действия множества независимых факторов, понятно, почему измеряемые значения, как правило, распределены нормально.

Докажем для случая одинаково распределенных величин x_k. $Mx_к = a$; $Dx_k = \sigma^2$

Образуем $w_k = \dfrac{x_k - a}{\sigma}$ $Mw_к = 0$. $Dw_к = 1$

Построим характеристическую функцию $\eta = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{w_k}{\sqrt{n}}$

$$f_\eta(t) = (Me^{itw/\sqrt{n}})^n = \{M(1 + \frac{itw}{\sqrt{n}} - \frac{t^2 w^2}{2n} + \ldots\}^n$$

$$\lim_{n\to\infty} f_\eta(t) = (1 - \frac{t^2}{2n})^n = e^{-t^2/2} \qquad \eta \sim N(0,1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - a)}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \sum_{k=1}^{n} (x_k - a) \sim N(0, \sigma^2 n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \sim N(na, \sigma^2 n) \quad \Big| \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \sim N(a, \frac{\sigma^2}{n})$$

Применим к распределению Бернулли.

$x_k=\xi_k$ $M\xi=p$ $D\xi=pq$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k=\frac{m}{n}\sim N\left(p,\frac{pq}{n}\right)$$

$$\frac{\frac{m}{n}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\boxed{\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\sim N(0,1)}$$

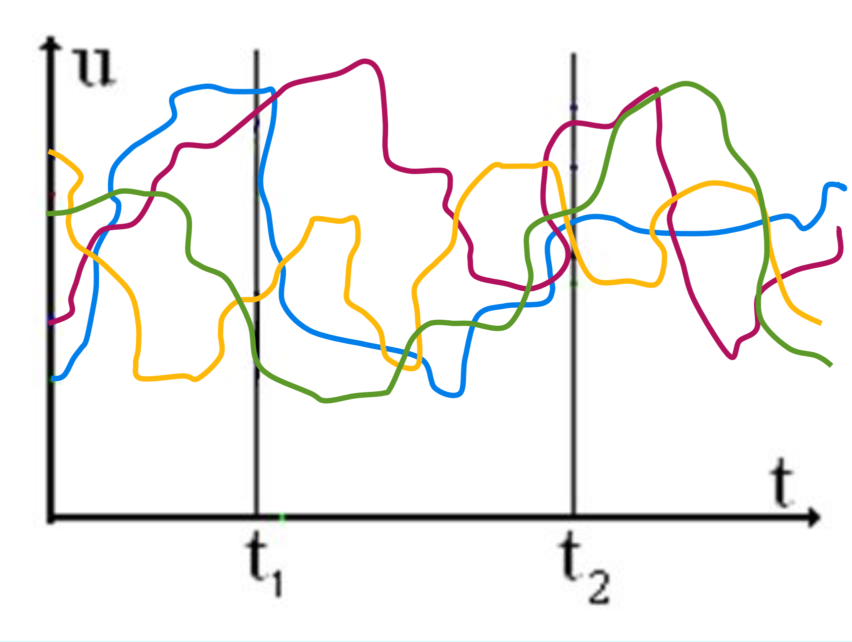
<u>теорема Муавра-Лапласа</u>

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\sim N(0,1)$$

Поскольку плотность нормального распределения с матожиданием 0 и дисперсией 1, а также значение интеграла от этой плотности в пределах от 0 до z как функция z табулированы , то легко найти вероятность попадания x, а значит и m, при известных n, p в любой интервал.

Понятие о случайной функции (случайном процессе)

Если элементарному событию сопоставляется не набор чисел (случайный вектор), а функция некоторого параметра t - f(t) и при каждом значении t определена функция распределения $F_t(x)=P\{f(t)<x\}$, то f(t) называется случайной функцией или случайным процессом.



Образно говоря - это "бесконечномерная случайная величина".

Если $F_t(x)$ не зависит от t , процесс называется стационарным. Числовые характеристики случайного процесса (математическое ожидание и дисперсия) при фиксированном t определяются так же, как и для обычной случайной величины , если известны плотность распределения $p_t(x)$ или $p_t(x_i)$ (если f принимает дискретный ряд значений). Для стационарного процесса эти характеристики от t не зависят.

Характеристики стационарного процесса можно определить усреднением по параметру

$$Mf = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \qquad Df = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)-Mf(t)]^2 dt$$

Если результаты вычисления числовых характеристик стационарного процесса путем усреднения по параметру и по ансамблю реализаций дают одинаковый результат, процесс называется эргодическим.

Аналогом ковариационной матрицы , которая характеризует связь между компонентами случайного вектора, для случайного процесса служит <u>автокорреляционная функция $\Gamma(\tau)$</u>, показывающая как быстро с изменением параметра могут меняться значения случайной функции.

$$\Gamma(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)-Mf(t)]^*[[f(t+\tau)-Mf(t+\tau)]dt$$

$\Gamma(0)=Df$

Связь спектра и автокорреляционной функции

Спектр- это Фурье образ f(t)

$$V(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Положим, что процесс стационарный и $Mf=0$

Спектр мощности сигнала f(t), т. е. квадрат модуля Фурье-образа f(t), $S(\omega)=V(\omega)^*V(\omega)$ пропорционален Фурье-образу функции корреляции $\Gamma(\tau)$.

$$\int \Gamma(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau = \iint f^*(t)f(t+\tau)\exp(-i\omega\tau - i\omega t + i\omega t)d\tau dt$$

Добавив в показатель экспоненты $\pm\, i\omega t$ и перейдя к переменным t и $t' = t + \tau$

$$\int \Gamma(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau = V^*(\omega)V(\omega) = S(\omega)$$

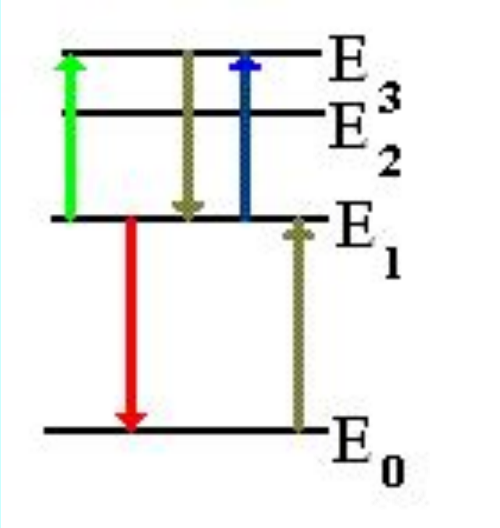
Отсюда $$\Gamma(\tau) = \int S(\omega)\exp(i\omega\tau)d\omega$$

$$Df = \Gamma(0) \sim S(\omega)\Delta\omega$$

Марковский процесс

Если процесс состоит из дискретного ряда значений $x_к$ и вероятность перехода в следующий момент времени из состояния xк в состояние $x_р$ не зависит от состояния предшествующего $x_к$, то процесс называется <u>марковский</u>

Наиболее яркий пример: процесс возбуждения и распада энергетических состояний атома в плазме. Находясь на определенном энергетическом уровне $E_к$ атом может перейти на какой-то другой уровень с вероятностью , которая не зависит от того , с какого уровня атом попал на Ек.



Другой пример: игра в кости. Вероятность выиграть не зависит от того, выиграл ты прошлый раз или проиграл

На этом раздел
«Теория вероятностей»
закончен.