

# **КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

- **Путь и перемещение. Способы описания движения.**
- **Основные кинематические характеристики: скорость и ускорение.**
- **Описание криволинейного движения.**
- **Кинематика вращательного движения, угловая скорость и угловое ускорение.**
- **Связь угловых и линейных кинематических характеристик.**

# КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

**Цель кинематики** - написать *уравнение движения*, позволяющего определить положение тела в любой момент времени, не вдаваясь в причины движения.

**Система отсчета** - тело отсчета, связанную с ней систему координат и часы для отсчета времени.

**Материальная точка** - макроскопическое тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

**Степени свободы  $i$**  – число независимых координат, необходимых для однозначного определения положения тела в пространстве.

Для материальной точки  $i = 3$ .

# КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

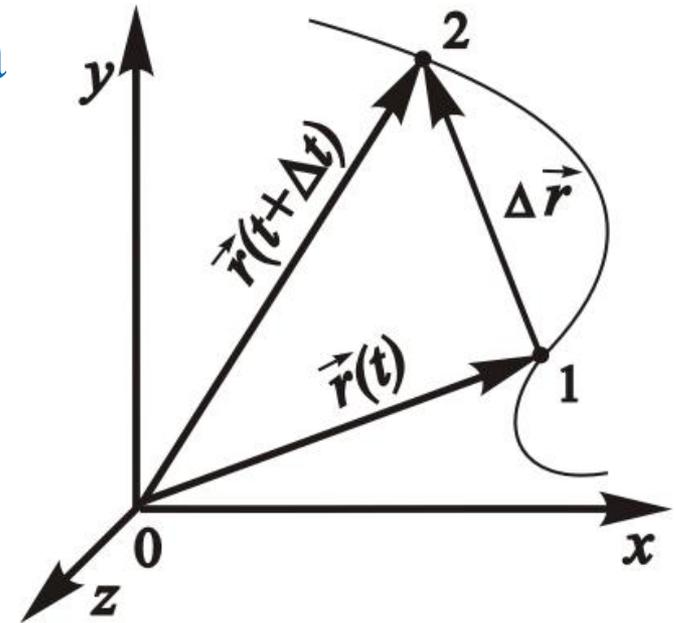
Способы задания положения тела в пространстве:

1) координатный:  $x(t), y(t), z(t)$

2) векторный, с помощью

радиус-вектора  $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$



При изменении положения точки из 1 в 2, совершенное за время  $\Delta t$  радиус-вектор получает приращение, называемое **перемещением**:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

**Путь**  $S$  – длина траектории;  $|\Delta \vec{r}| \neq S$

# КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Средняя скорость перемещения за время  $\Delta t$ :

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}} \right] \quad (1)$$

- зависит от выбора интервала времени;
- сонаправлена с  $\Delta \vec{r}$ .

Мгновенная скорость:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2)$$

Вектор скорости можно выразить через проекции на координатные оси:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (3)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (4)$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}. \quad (3')$$

# КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Среднее ускорение за время  $\Delta t$ :

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right] \quad (5)$$

- зависит от выбора интервала времени;
- сонаправлено с  $\Delta \vec{v}$

Мгновенное ускорение:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (6)$$

Вектор ускорения можно выразить через проекции на координатные оси:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (7)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (8)$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} \quad (7')$$

# ОПИСАНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

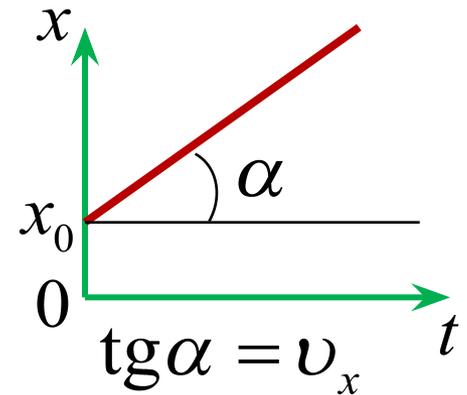
1) **Равномерное движение:**  $\overset{\forall}{v} = const$

$$(3) \implies dx = v_x dt \implies \int_{x_0}^x dx = v_x \int_0^t dt \implies$$

$$x = x_0 + v_x t \quad (9) - \text{уравнение движения.}$$

где  $x_0$  – начальная координата точки;

$v_x$  – проекция вектора скорости на ось  $x$ .



2) **Равноускоренное движение:**  $\overset{\forall}{a} = const$

$$(7) \implies dv_x = a_x dt \implies \int_{v_0}^v dv_x = a_x \int_0^t dt \implies$$

$$v_x = v_{ox} + a_x t \quad (10) - \text{зависимость скорости от времени.}$$

# ОПИСАНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

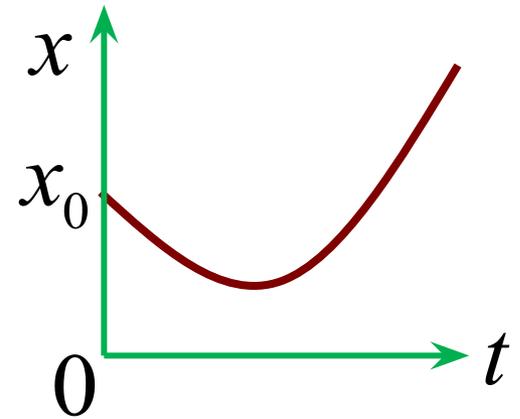
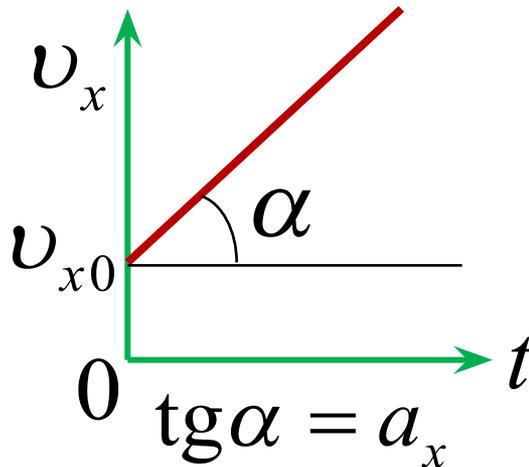
$$(3) \rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_{ox} + a_x t) dt \rightarrow x = x_0 + v_{ox} t + \frac{a_x t^2}{2} \quad (11)$$

(10) И (11)  $\rightarrow$  пройденный путь:

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (12)$$

$a > 0$  – тело ускоряется;  
 $a < 0$  – тело замедляется.

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad (13)$$

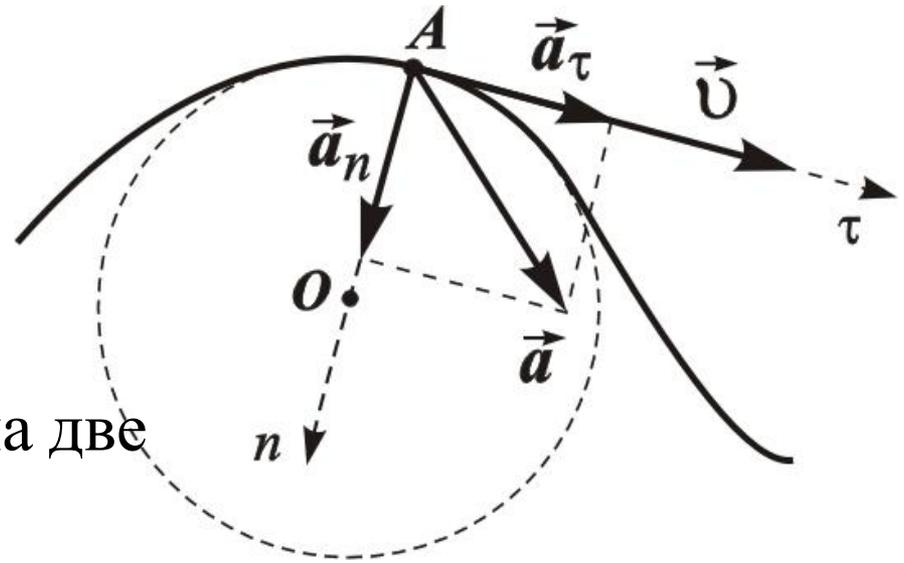


# ОПИСАНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

Криволинейное движение – движение с ускорением.

Движение можно представить как движение по дугам окружностей различного радиуса. Вектор скорости направлен по касательной, вектор ускорения внутрь траектории.

Для точки А: R – радиус кривизны траектории;  
т. О – центр кривизны.



Разобьём вектор ускорения на две составляющие:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \quad (14)$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad (15)$$

# ОПИСАНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

$\boxtimes$   
 $a_\tau$  – **тангенциальное ускорение** – характеризует изменение скорости по величине:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \quad (16)$$

- $\boxtimes$   $a_\tau \uparrow \uparrow v$  - движение ускоренное;
- $\boxtimes$   $a_\tau \uparrow \downarrow v$  - движение замедленное;
- $\boxtimes$   $a_\tau = 0$  - скорость постоянна.

$\boxtimes$   
 $a_n$  – **нормальное ускорение** – характеризует изменение скорости только по направлению.

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (17)$$

- Если тело движется по кривой траектории с постоянной по величине скоростью, то в каждой точке ускорение направлено к центру кривизны траектории;
- При движении по прямой  $a_n = 0$ .

# КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Абсолютно твердое тело** – это тело, деформацией которого при его движении в условиях данной задачи можно пренебречь.

Два основных типа движения тел:

- Поступательное
- Вращательное

Линейные кинематические характеристики (скорость  $v$  и ускорение  $a$ ) для различных точек вращающегося тела отличаются друг от друга 

**Для описания вращательного движения тела используют угловые величины: угловую скорость и угловое ускорение.**

# КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрим тело, вращающееся вокруг неподвижной оси.

$NN'$  – ось вращения;

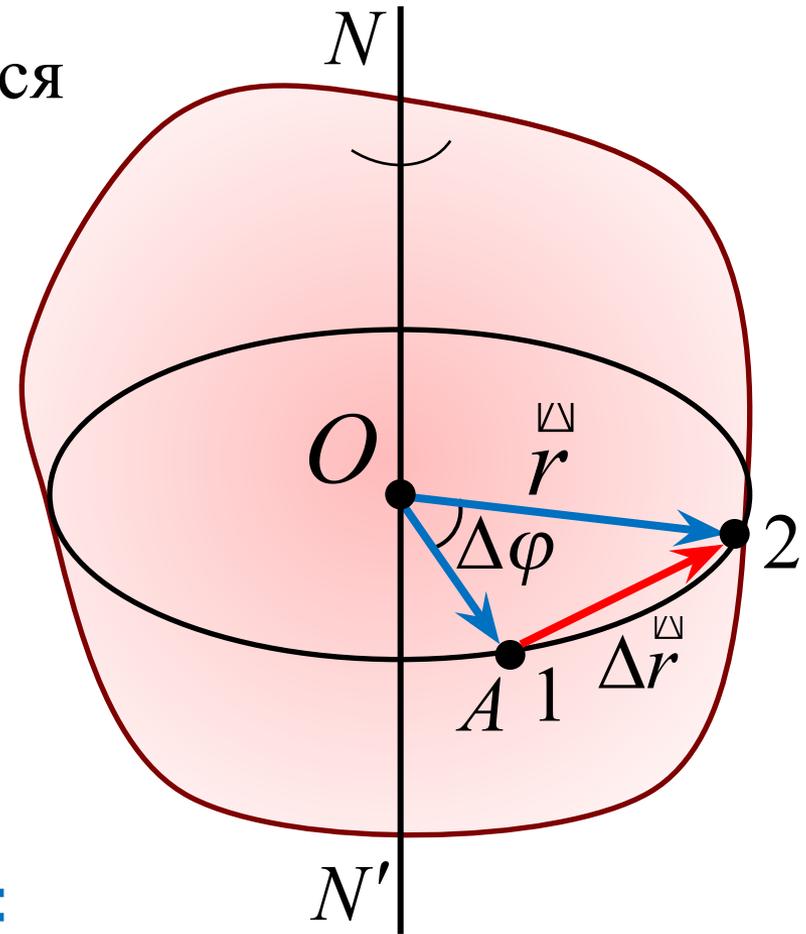
$\Delta\phi$  - угол поворота точки  $A$  за время  $\Delta t$ .

Средняя угловая скорость:

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad (18) \quad \left[ \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$$

Мгновенная угловая скорость:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} \quad (19)$$



# КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВОРДОГО ТЕЛА

Равномерное вращение  $\omega = \text{const}$ .

Период вращения  $T$  –

время одного полного оборота:

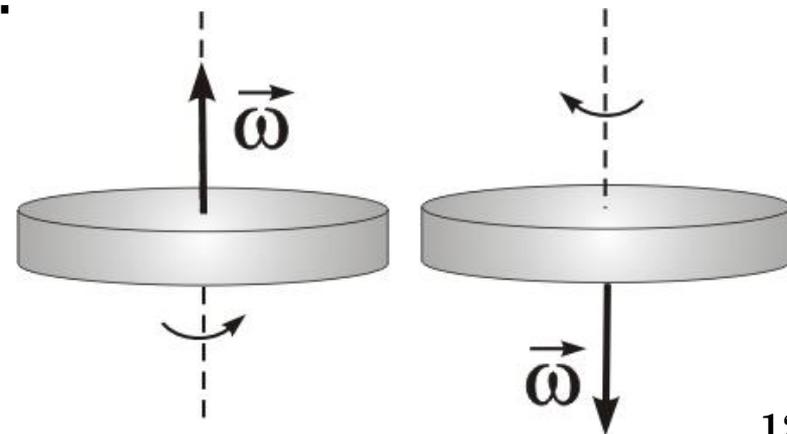
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (20)$$

Частота  $\nu$  – число оборотов, совершаемых в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (21) \quad [\text{Гц}]$$

Введем вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$ , который определяет направление вращения:

- $\vec{\omega} \parallel$  оси вращения;
- направление определяется правилом правой руки.



# КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Угловое ускорение: 
$$\overset{\boxtimes}{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \overset{\boxtimes}{\omega}}{\Delta t} = \frac{d \overset{\boxtimes}{\omega}}{dt} \quad (22) \quad \left[ \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right]$$

- $\overset{\boxtimes}{\varepsilon} \uparrow \uparrow \overset{\boxtimes}{\omega}$  - ускоренное вращение
- $\overset{\boxtimes}{\varepsilon} \uparrow \downarrow \overset{\boxtimes}{\omega}$  - замедленное вращение

При **равноускоренном** вращении  $\overset{\boxtimes}{\varepsilon} = \text{const}$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \quad (23)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad (24)$$

- $\varepsilon > 0$  - ускоренное вращение
- $\varepsilon < 0$  - замедленное вращение

# СВЯЗЬ УГЛОВЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

**Угловые** характеристики  $\omega$  и  $\varepsilon$  одинаковы для всех точек вращающегося тела.

**Линейные** характеристики  $v$ ,  $a$ ,  $a_n$ ,  $a_\tau$  для разных точек различны и зависят от расстояния до оси вращения  $r$ .

$$v = \omega \cdot r \quad (25)$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r \quad (26)$$

$$a_n = \omega^2 r \quad (27)$$


$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$