Статистические распределения

Статистическое описание равновесных состояний

N – число частиц в системе (очень велико)

x – микропараметр, описывающий состояние частицы

1) Пусть x – дискретная величина

$$\text{Измерения} \longrightarrow \left.\begin{array}{ccc} x_1 & \text{—} & N_1 \\ x_2 & \text{—} & N_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots} \\ x_i & \text{—} & N_i \end{array}\right] \longrightarrow \quad N = \sum_i N_i$$

[1] $$\boxed{p(x_i) = \frac{N_i}{N}}$$ - **вероятность** того, что в ходе измерения получим величину *x, равную* x_i

$0 \le p(x_i) \le 1;$ $\quad \sum_i p(x_i) = 1$

[2] $$\boxed{\langle x \rangle = \frac{\sum N_i x_i}{N} = \sum_i p(x_i) \cdot x_i}$$ - среднее значение x

Статистическое описание равновесных состояний

2) Пусть x – непрерывная величина, $a \le x \le b$

[3] $$\boxed{dp = \frac{dN}{N}}$$ **-вероятность** того, что величина *x* *попадает в интервал значений (x; x+dx)*

[4] $$\boxed{f(x) = \frac{dp}{dx} = \frac{dN}{Ndx}}$$ *- плотность распределения вероятностей* (**функция распределения**)

$$\int_a^b f(x)dx = 1$$ *- условие нормировки функции распределения*

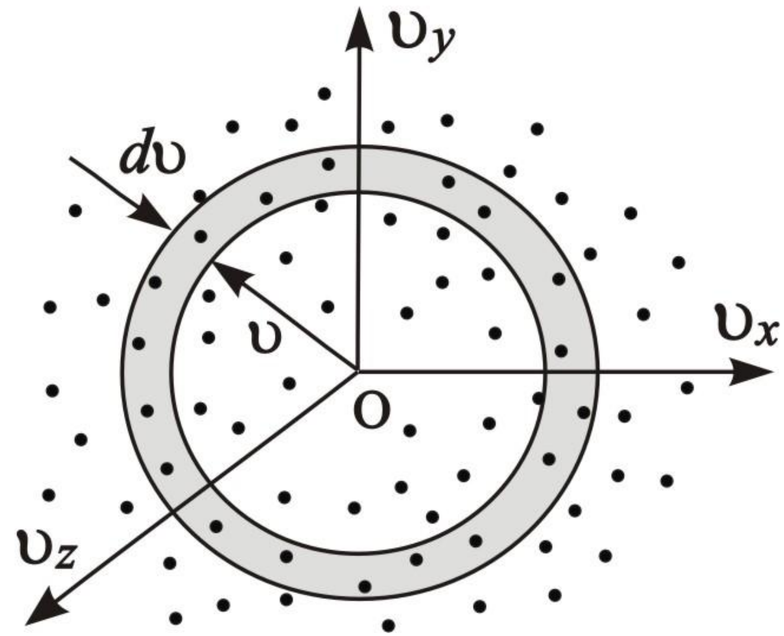
Зная f(x), можно рассчитать:

1) $$p(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$ [5]

2) $$\langle \varphi(x) \rangle = \int_a^b \varphi(x) f(x)dx$$ [6] $\longrightarrow$ $$\langle x \rangle = \int_a^b x f(x)dx$$ [7]

Распределение Максвелла

Рассмотрим закрытый сосуд с *N* одинаковыми молекулами газа в состоянии термодинамического равновесия при температуре *T* *(внешние силовых полей, действующие на газ, отсутствуют.*



- *В пространстве скоростей каждая молекула изображается точкой*
- *Положение точек непрерывно изменяется случайным образом*
- *Но в целом, распределение плотности изображающих точек в пространстве скоростей будет оставаться неизменным и симметричным*

Распределение Максвелла

Пусть dN – число изображающих точек в шаровом слое (υ; $\upsilon+d\upsilon$). Они соответствуют молекулам, имеющим величину скорости в данном интервале.

[3] $\longrightarrow$ $$\boxed{dp = \frac{dN}{N}}$$ [8]

- вероятность того, что случайно выбранная молекула газа обладает скоростью в интервале (υ; $\upsilon+d\upsilon$)

[4] $\longrightarrow$ $$\boxed{F(\upsilon) = \frac{dp}{d\upsilon} = \frac{dN}{N d\upsilon}}$$ [9]

- функция распределения молекул по скоростям

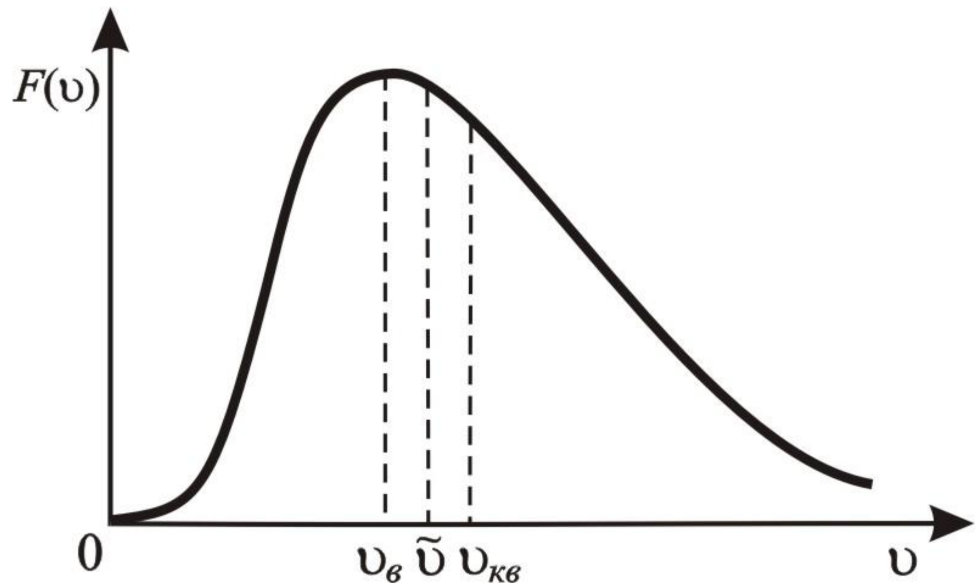
Распределение Максвелла

1859 г., Дж. Максвелл:

$$\boxed{F(\upsilon) = 4\pi\upsilon^2\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)} \qquad [10]$$

$$\int_0^\infty F(\upsilon)d\upsilon = 1$$

$$\frac{dF(\upsilon)}{d\upsilon} = 0 \longrightarrow$$



$$[11] \qquad \boxed{\upsilon_в = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}}$$

- наиболее вероятная скорость молекул

Распределение Максвелла

[7] $\rightarrow$ $$\breve{\upsilon} = \int_0^\infty \upsilon F(\upsilon)d\upsilon = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty \upsilon^3 \exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)d\upsilon$$

[12] $$\boxed{\breve{\upsilon} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}}$$

- средняя арифметическая скорость молекул

[6] $\rightarrow$

$$\left\langle \upsilon^2 \right\rangle = \int_0^\infty \upsilon^2 F(\upsilon)d\upsilon = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty \upsilon^4 \exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)d\upsilon = \frac{3kT}{m_0}$$

[13] $$\boxed{\upsilon_{\kappa в} = \sqrt{\left\langle \upsilon^2 \right\rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}}$$

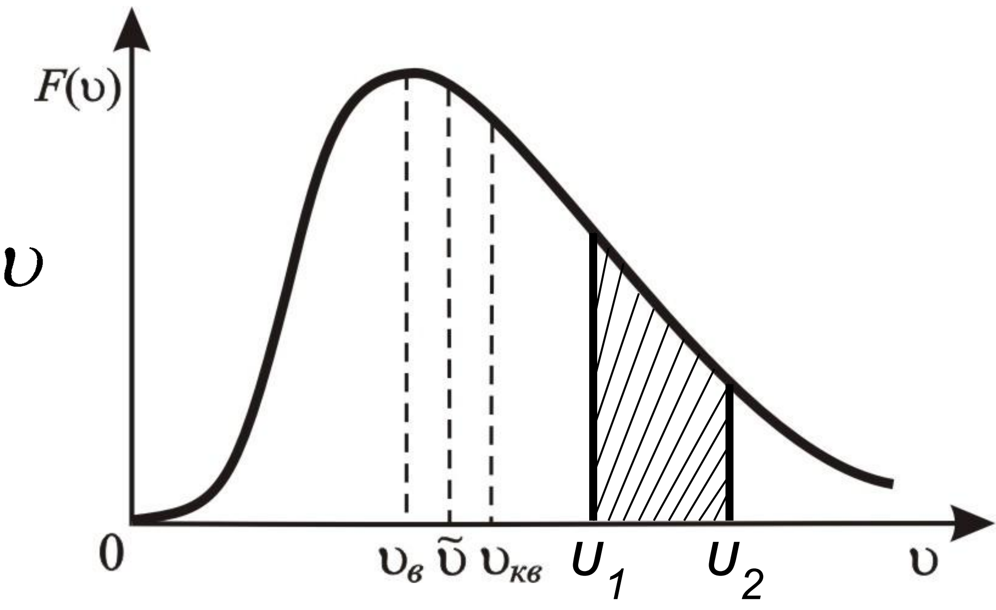
-среднеквадратичная скорость молекул

Распределение Максвелла

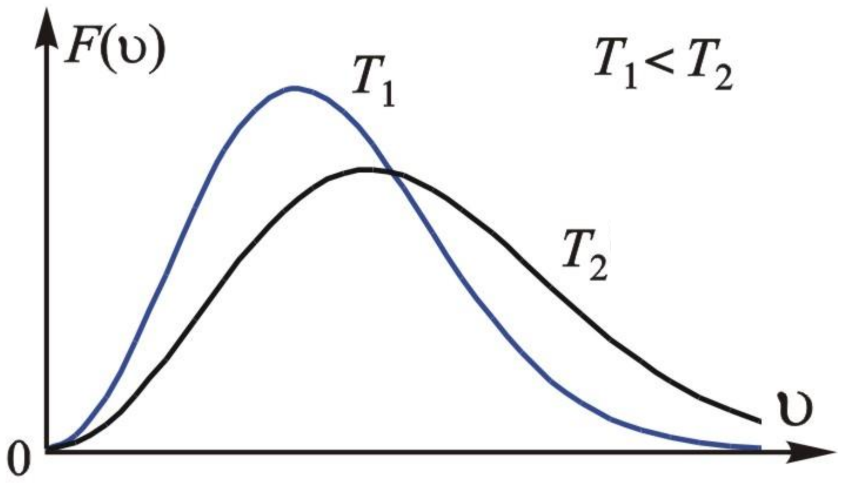
Зная F(υ), можно найти:

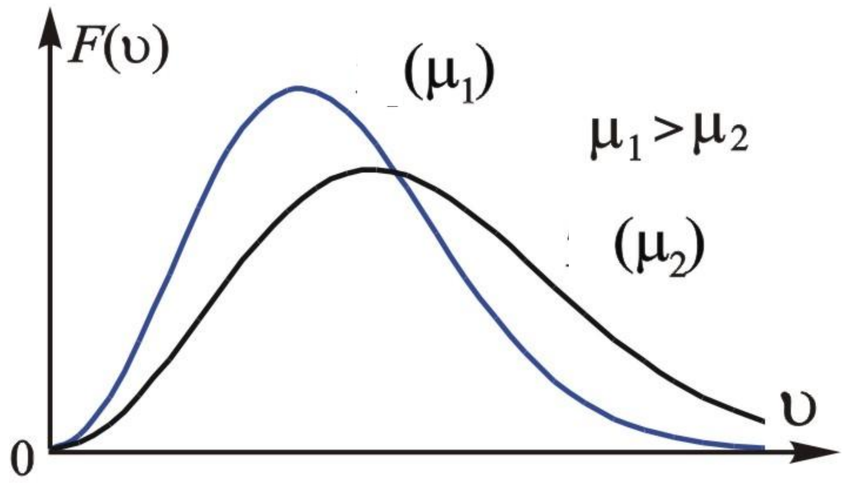
[9] → $$\Delta p = \frac{\Delta N}{N} = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} F(\upsilon)d\upsilon$$

(заштрихованная площадь)



Влияние температуры и массы молекул на вид графика





Распределение Больцмана

$$f(x,y,z)=\frac{dN}{NdV}$$ *- функция распределения частиц в пространстве*

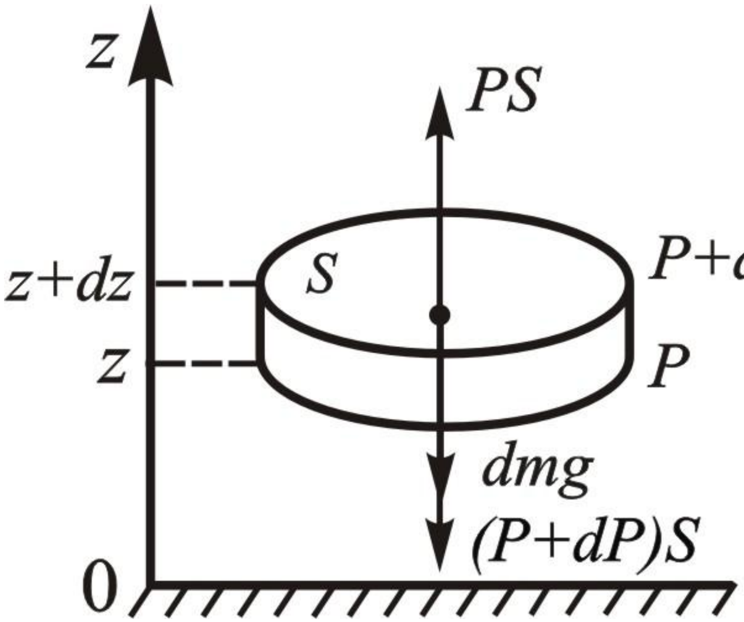
$$n=\frac{dN}{dV}\longrightarrow n(x,y,z)=Nf(x,y,z)$$

- функция распределения концентрации частиц в пространстве

Нет внешних силовых полей $\longrightarrow$ $n(x,y,z)=const$

Рассмотрим идеальный газ в однородном поле силы тяжести

Распределение Больцмана



$$dmg + (P + dP)S = PS$$

$$dP = -\frac{dm \cdot g}{S} = -\frac{\rho \cdot dV \cdot g}{S}$$

$$dP = -\rho g dz$$

$$P = nkT; \quad \rho = nm_0 \longrightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{m_0 g}{kT} dz$$

Барометрическая формула:

$$\boxed{P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{m_0 gz}{kT}\right)} \quad \boxed{P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{\mu gz}{RT}\right)} \quad [14]$$

Распределение Больцмана

[14] $\longrightarrow$ $$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 g z}{kT}\right)$$ *, т.к. n ~ P*

$$E_n = m_0 g z$$ *- потенциальная энергия молекулы в поле силы тяжести*

$$\boxed{n(x,y,z) = n_0 \exp\left(-\frac{E_n(x,y,z)}{kT}\right)} \qquad [15]$$

$E_n(x,y,z)$ *– потенциальная энергия частицы во внешнем силовом поле;*

n_0 – концентрация газа в точке, где $E_п$ (0,0,0) = 0.

Распределение Больцмана *позволяет рассчитывать пространственную концентрацию газа, находящегося в равновесном состоянии во внешнем силовом поле*