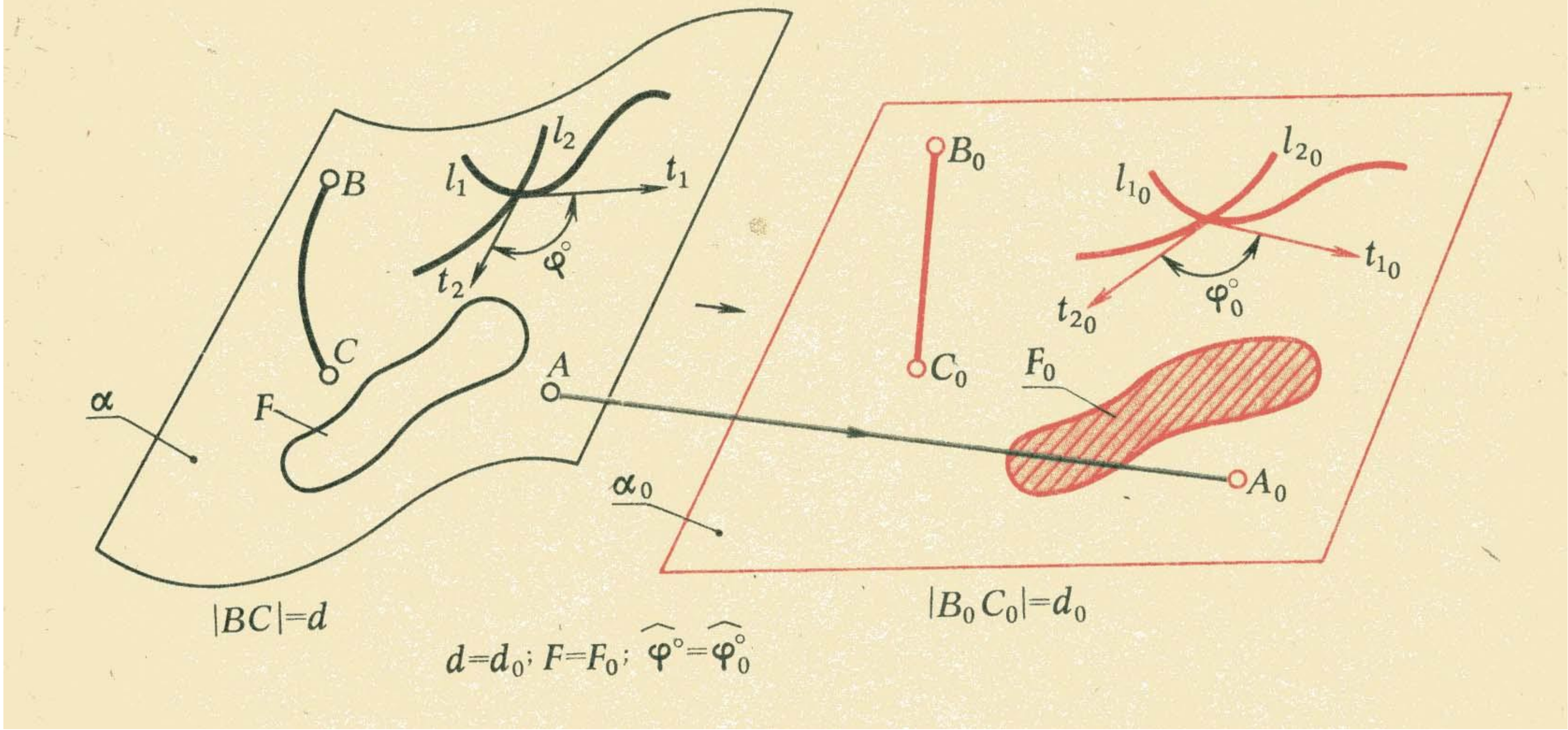
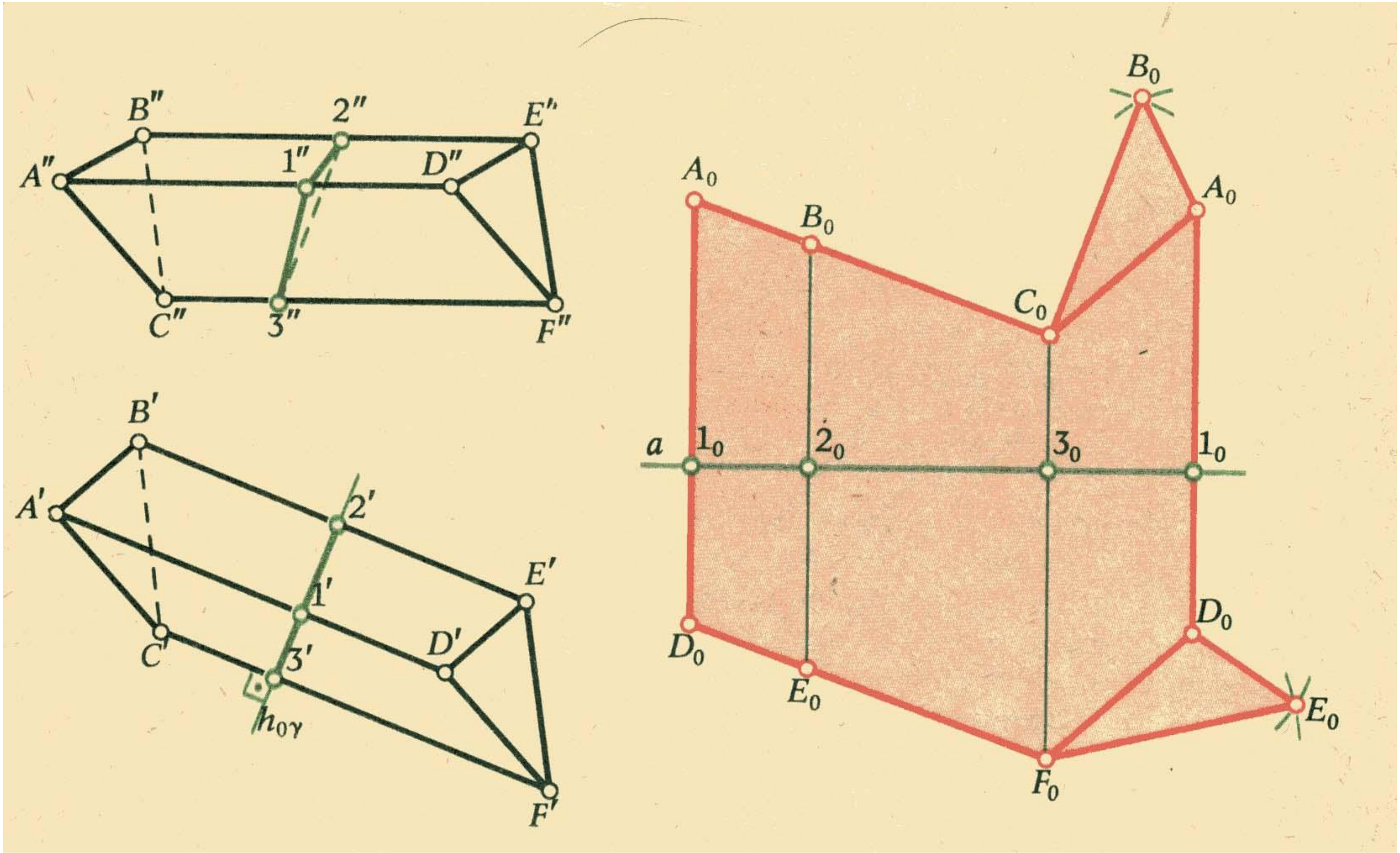
Развертка поверхностей. Основные свойства развертки.

(Равенство:
расстояний межу точками, углов между линиями,
площадей фигур)

1. Длины двух соответствующих линий поверхности и ее развертки равны меду собой.
2. Угол между линиями на поверхности равен углу между соответствующими им линиями на развертке.
3. Замкнутая линия на поверхности и соответствующая ей линия на развертке ограничивают одинаковую площадь.
4. Прямой на поверхности соответствует также прямая на развертке (обратное утверждение не имеет смысла).
5. Параллельным прямым на поверхности соответствуют также параллельные прямые на развертке.
6. Если линии, принадлежащей поверхности и соединяющие две точки поверхности, соответствует прямая на развертке, то эта линия является геодезической.



Способ нормального сечения



Способ раскатки

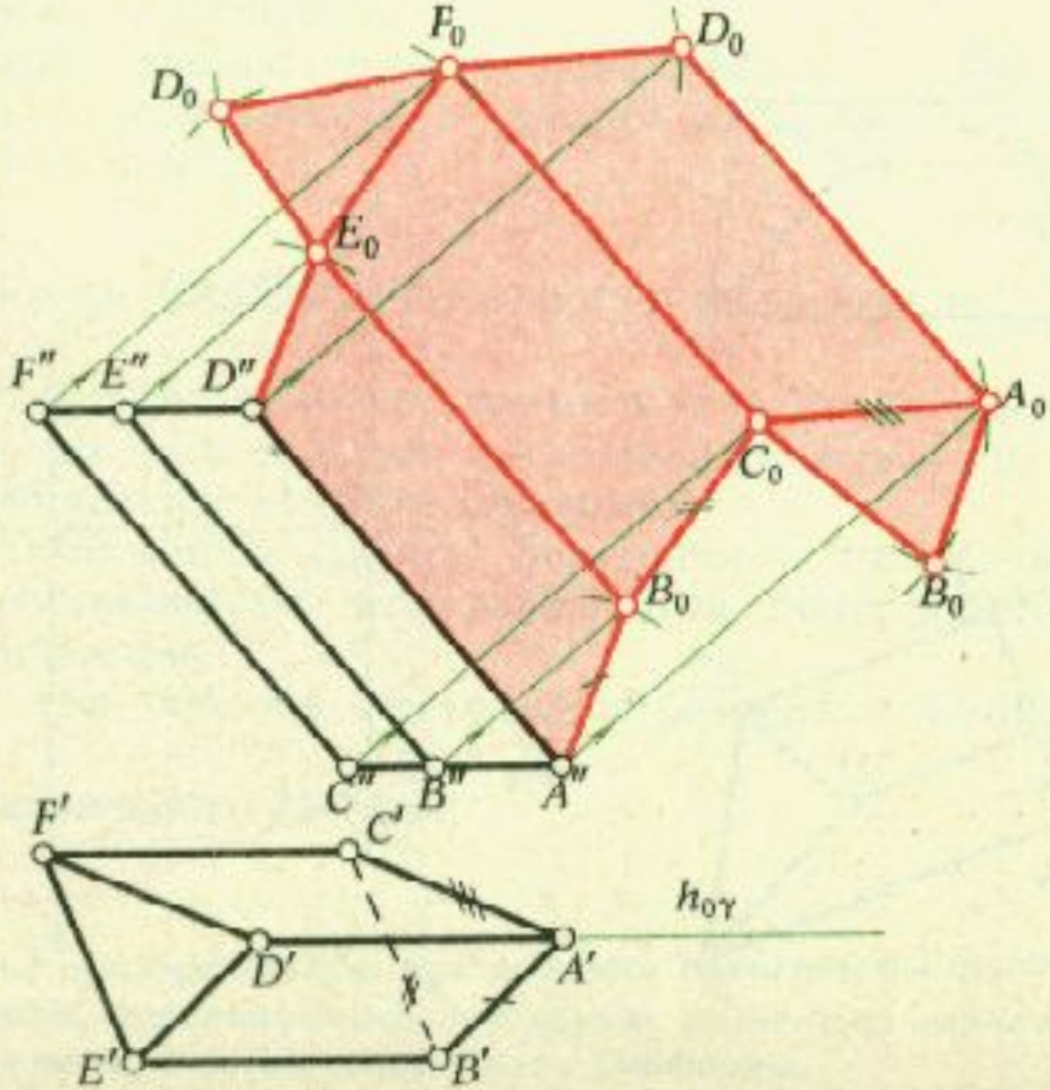
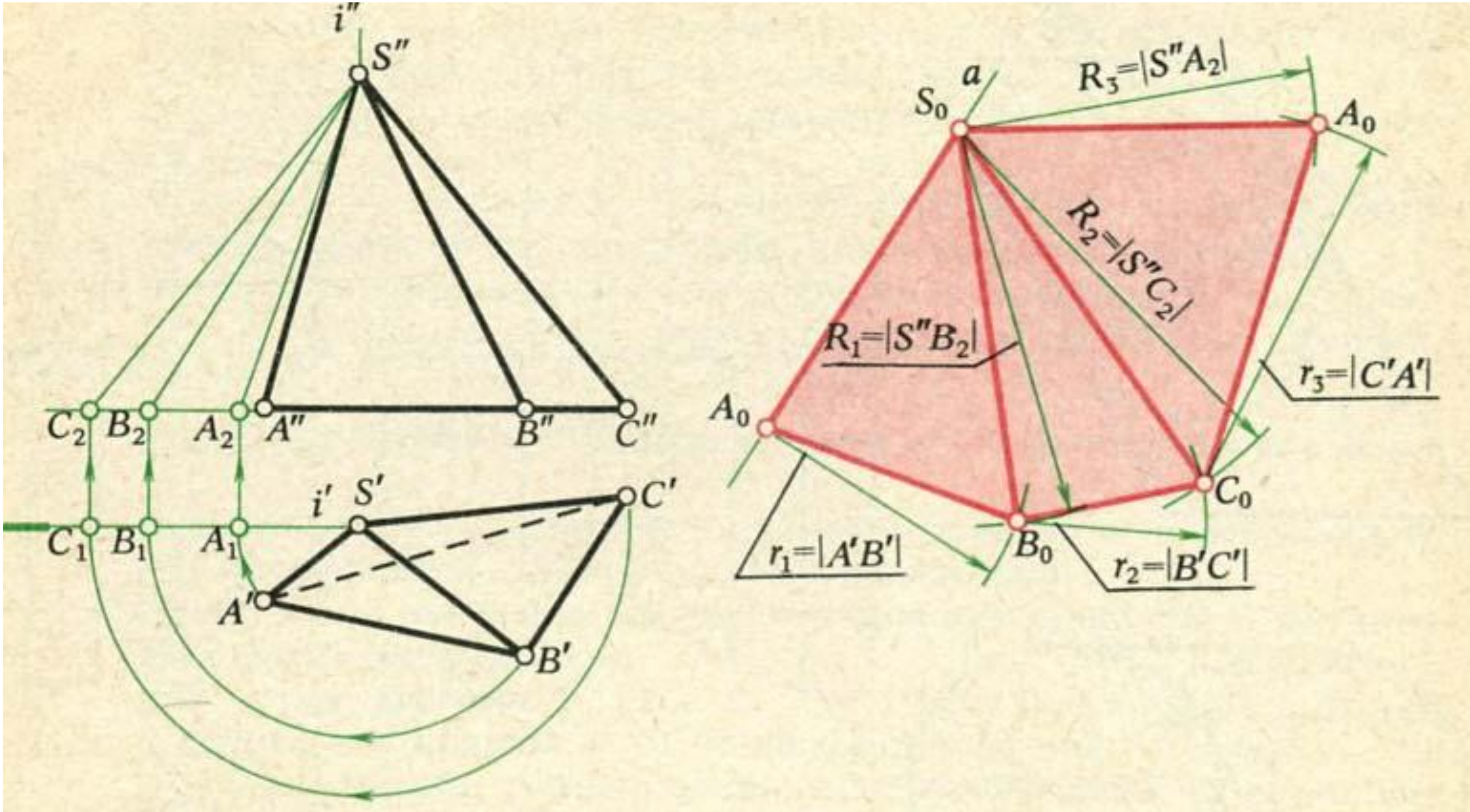
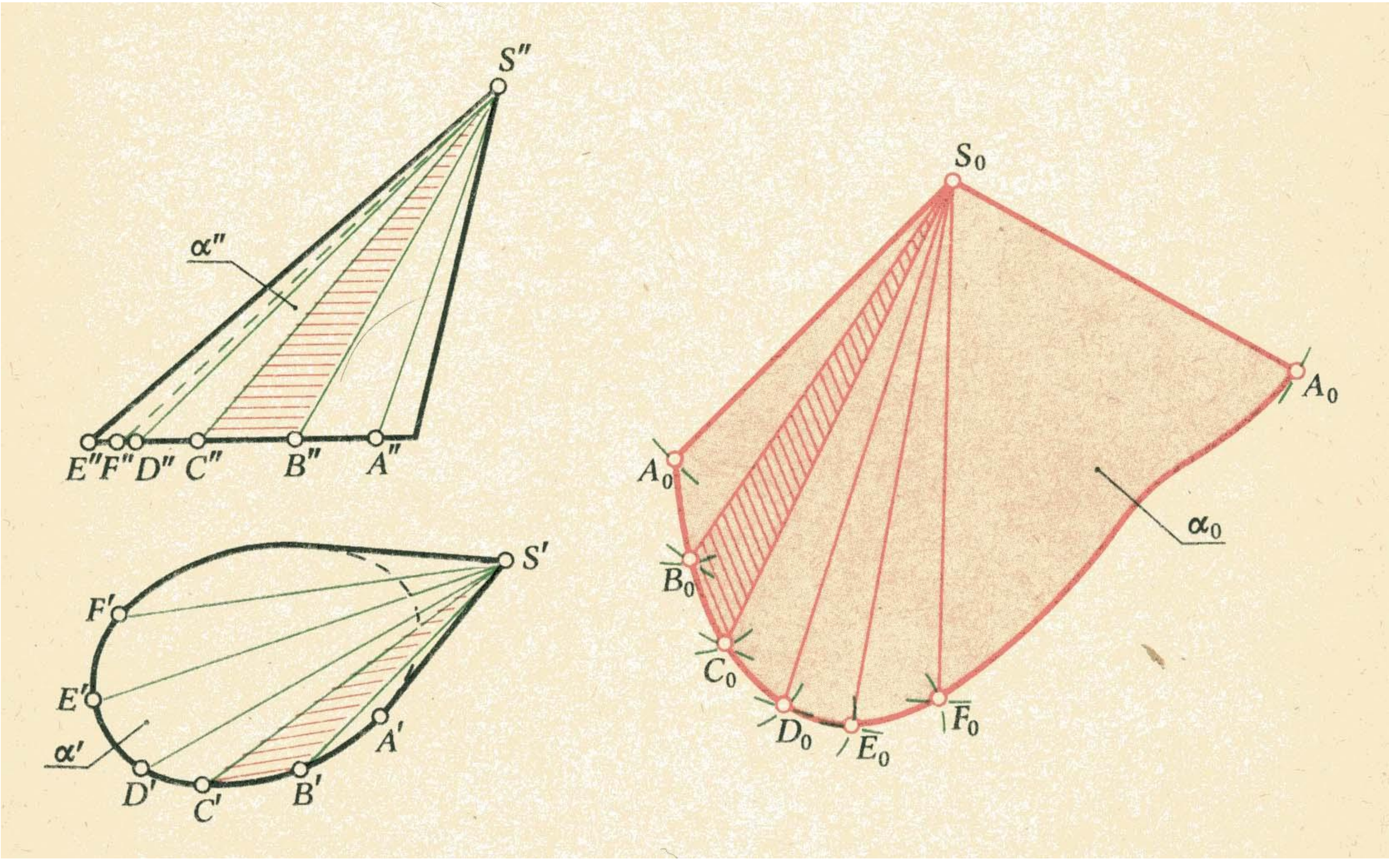
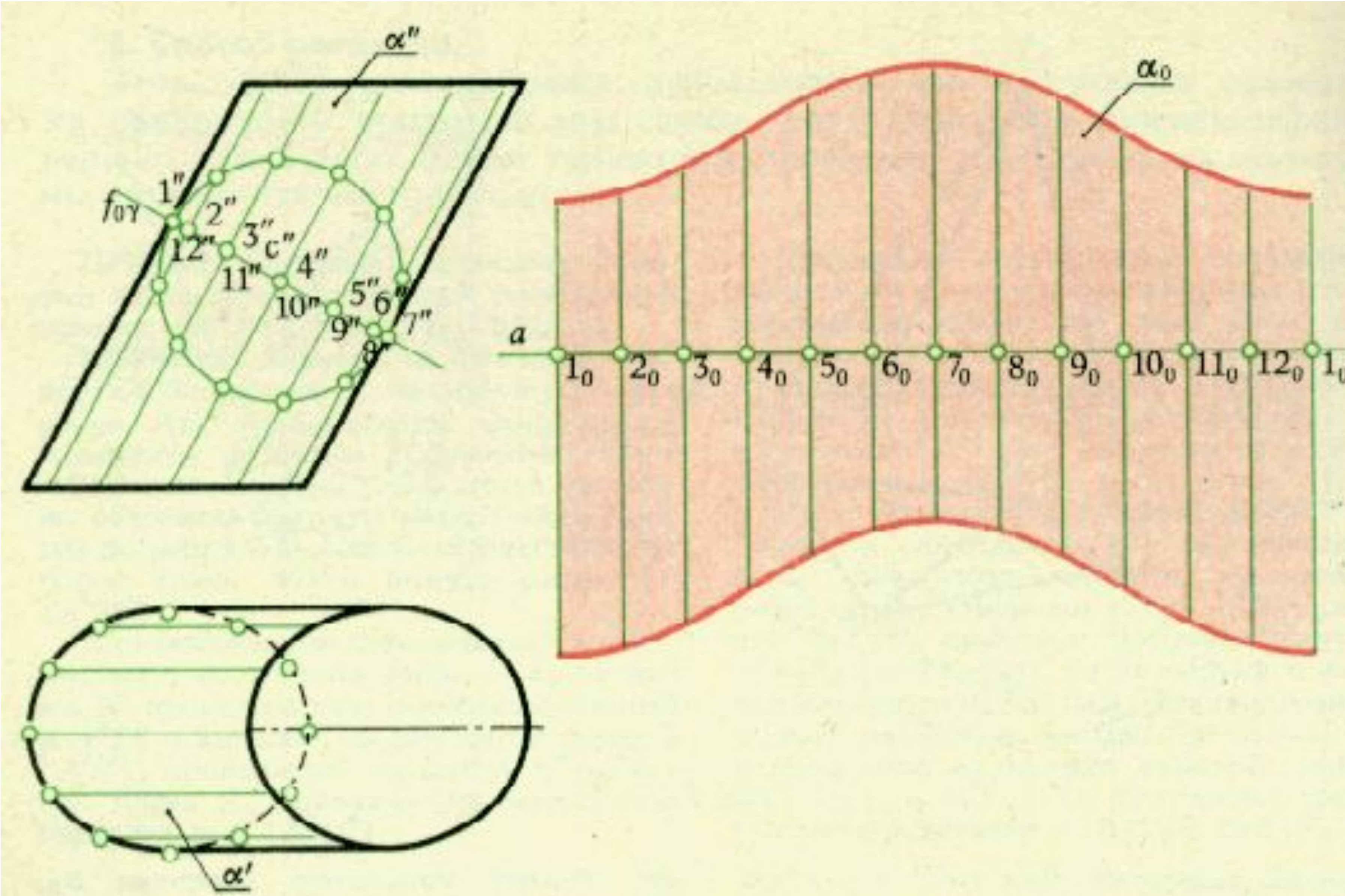


Рис. 293

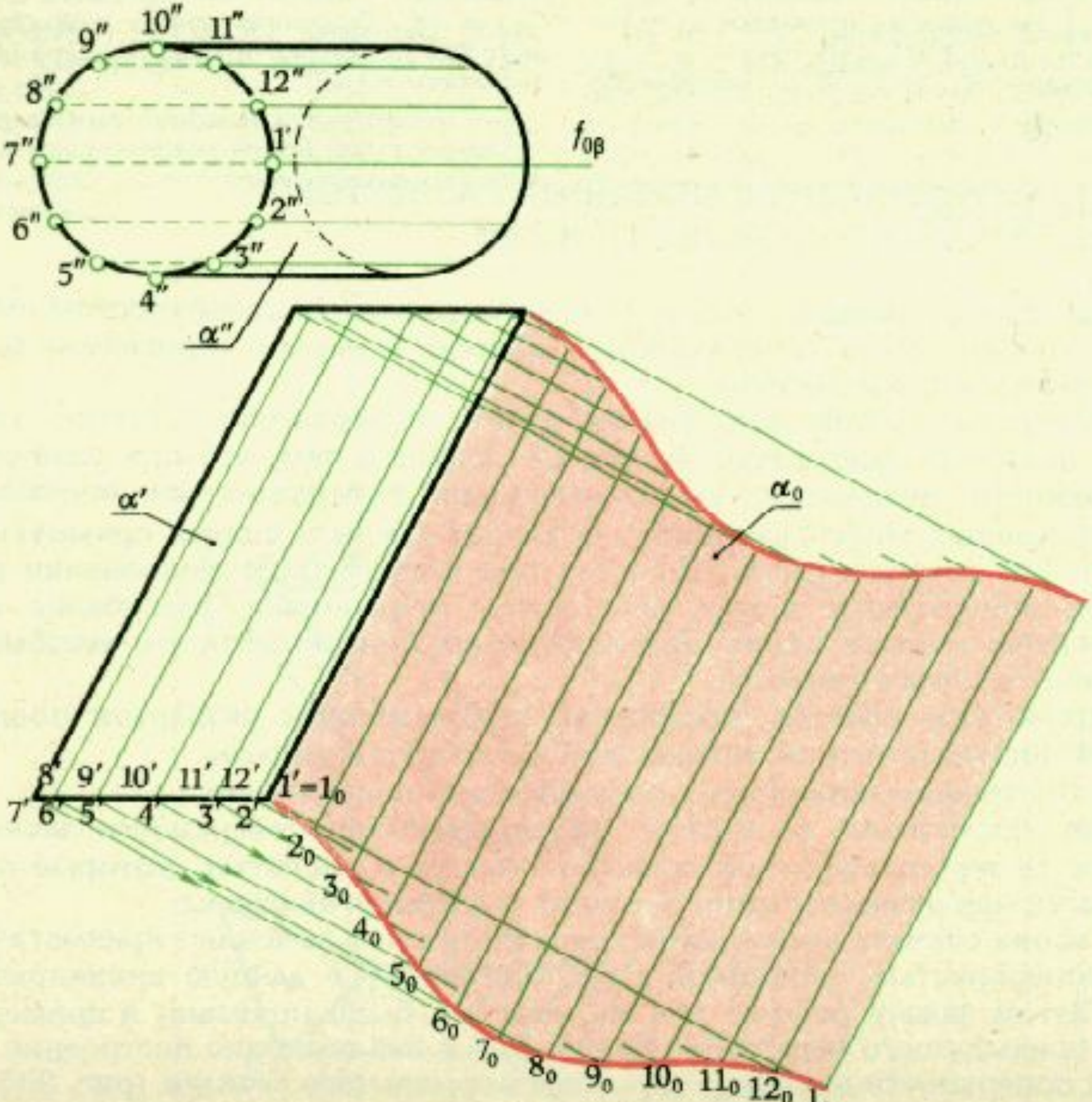
Способ треугольников (триангуляции)




S″
α″
E″F″D″ C″ B″ A″
S′
F′
E′
α′
D′ C′ B′ A′
S₀
A₀
A₀
α₀
B₀
C₀
D₀ E₀ F₀

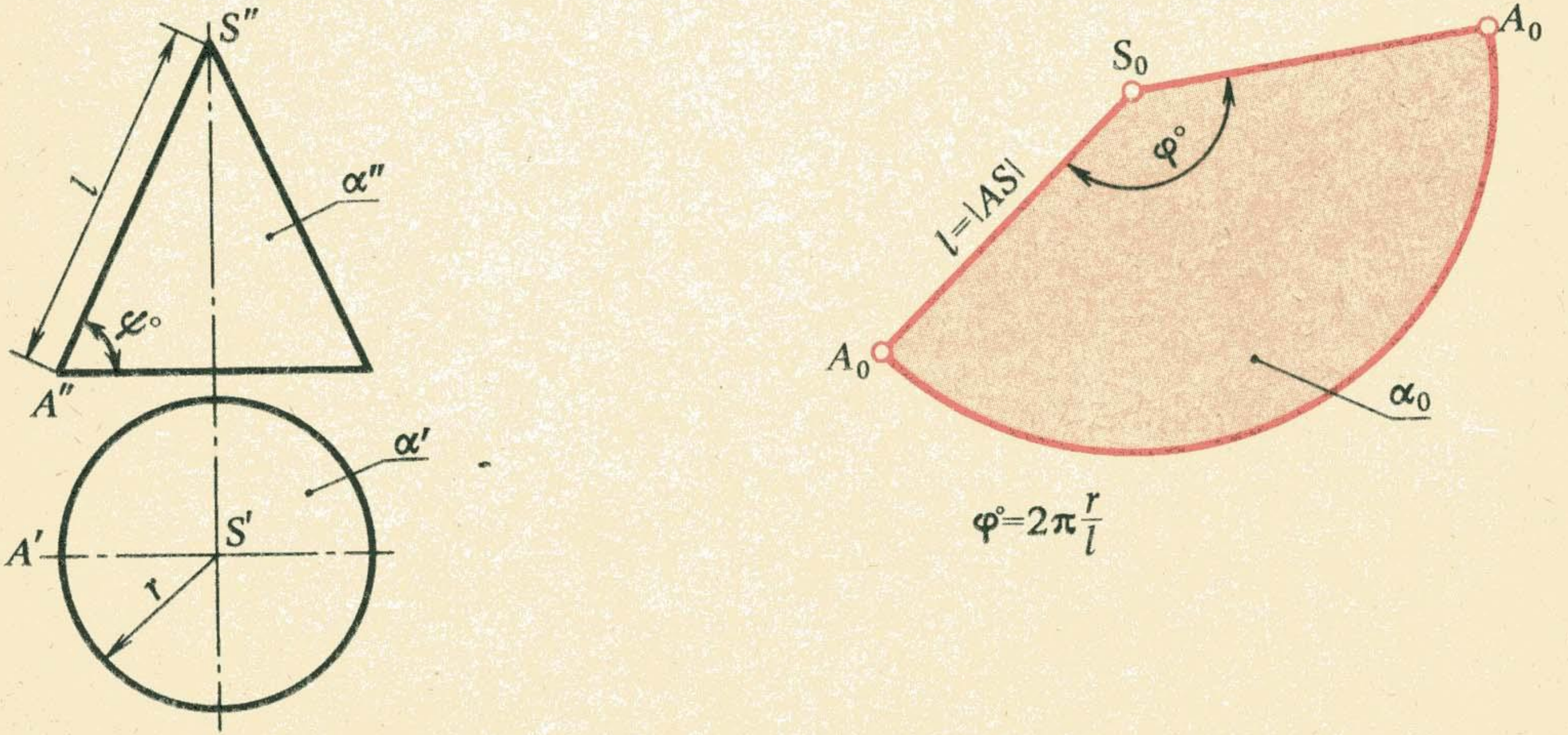


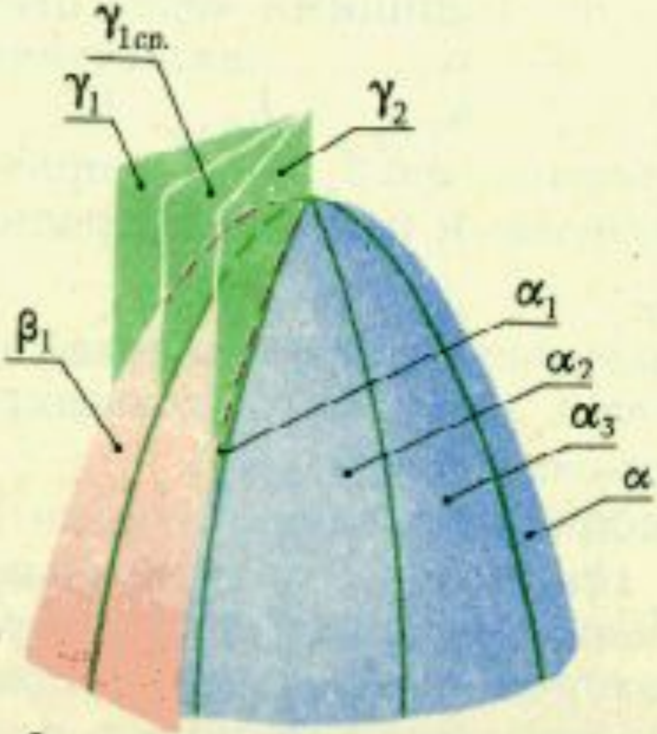
α''
$f_{0\gamma}$
1''
2''
3''
c''
4''
5''
6''
7''
8''
9''
10''
11''
12''
α'
α_0
a
1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 6_0 7_0 8_0 9_0 10_0 11_0 12_0 1_0



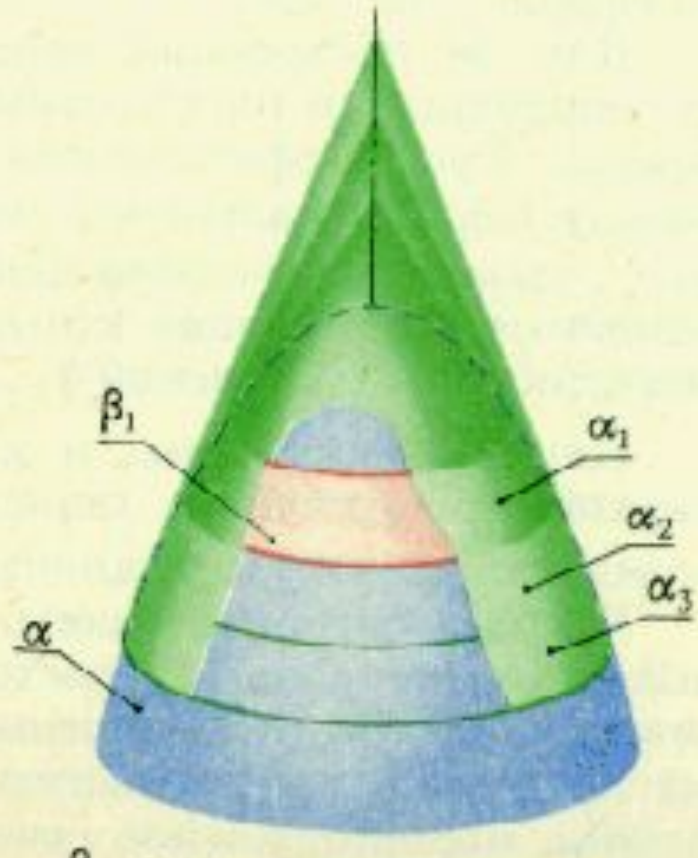
9″
10″
11″
12″
8″
7″
1′
$f_{0\beta}$
6″
2″
5″
3″
4″
α″
α′
α_0
8′ 9′ 10′ 11′ 12′ 1′=1_0
7′ 6′ 5′ 4′ 3′ 2′
2_0
3_0
4_0
5_0
6_0
7_0
8_0
9_0
10_0
11_0
12_0
1_0

Рис. 296

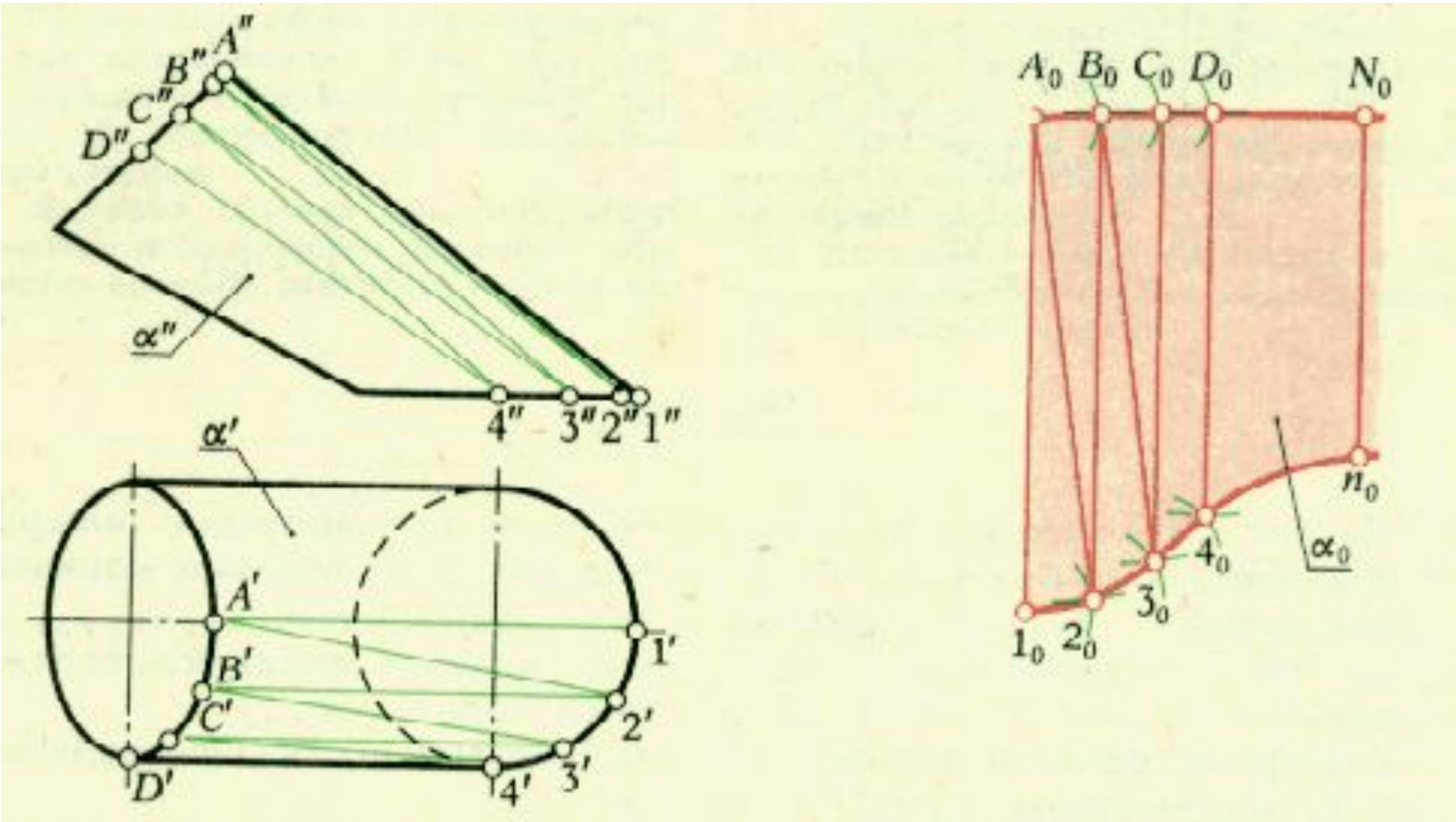

S″
l
α″
φ°
A″
α′
S′
A′
r
S0
A0
φ°
l=|AS|
A0
α0
φ°=2π r/l



β1 — отсек цилиндрической поверхности



β1 — отсек конической поверхности



A″
B″
C″
D″
α″
4″
3″
2″
1″
α′
A′
B′
C′
D′
1′
2′
3′
4′
A₀ B₀ C₀ D₀ N₀
1₀ 2₀ 3₀ 4₀
n₀
α₀

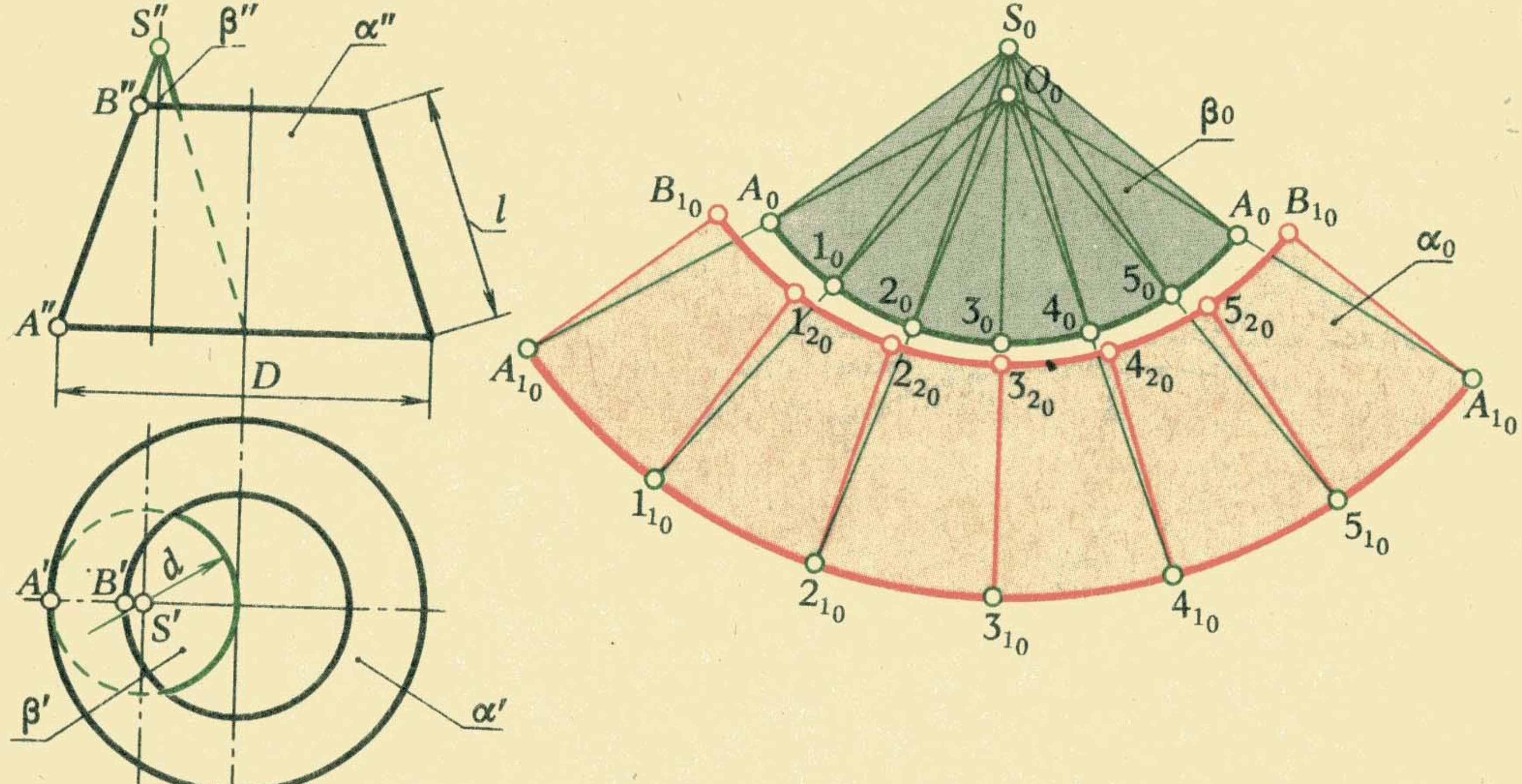
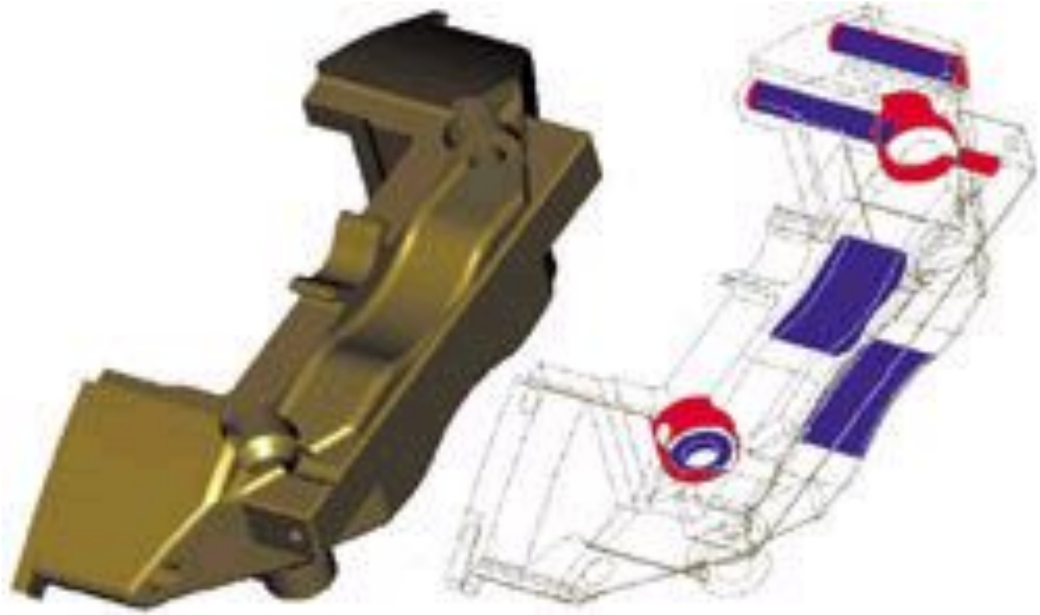
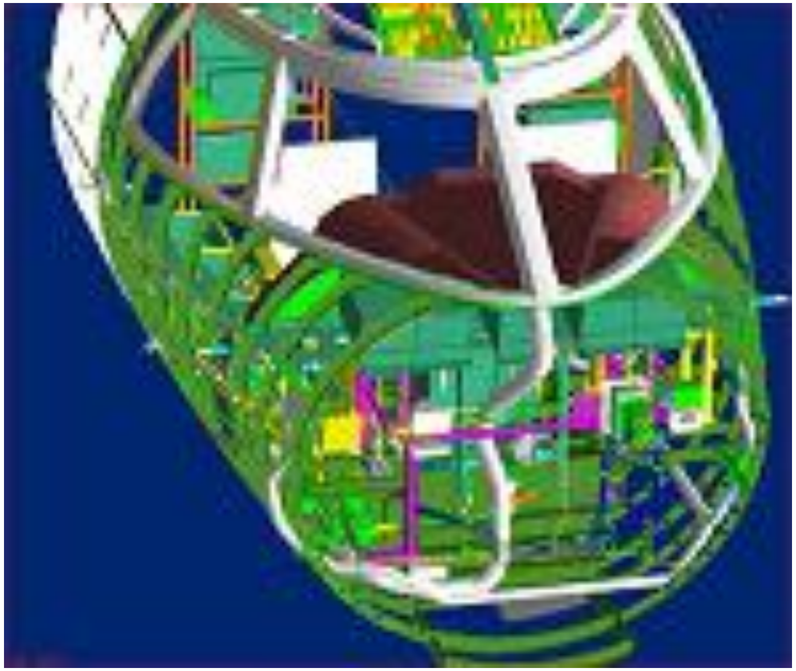

S''
β''
α''
B''
l
A''
D
A'
B'
d
S'
β'
α'
S₀
O₀
β₀
B₁₀
A₀
α₀
1₀
2₀
3₀
4₀
5₀
1₂₀
2₂₀
3₂₀
4₂₀
5₂₀
A₁₀
1₁₀
2₁₀
3₁₀
4₁₀
5₁₀

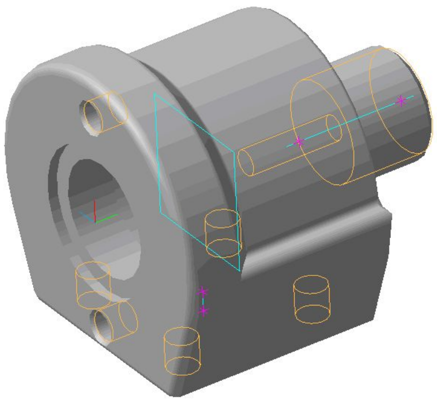
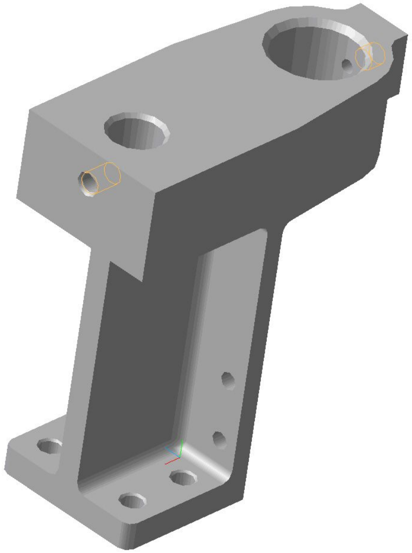
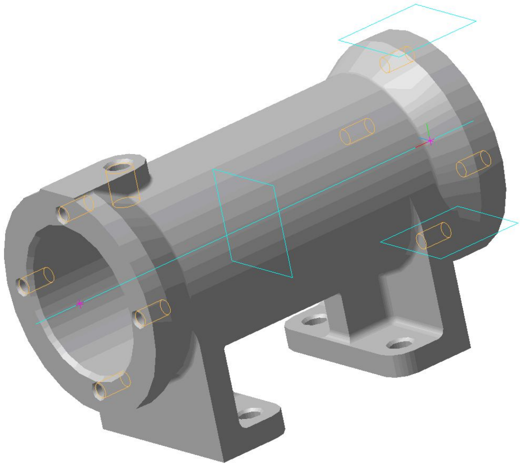
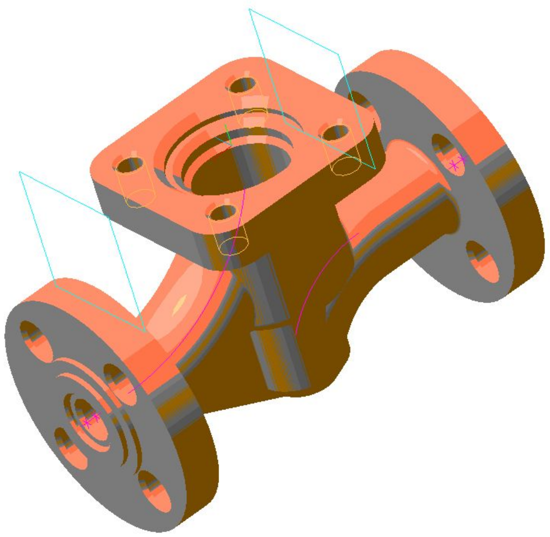
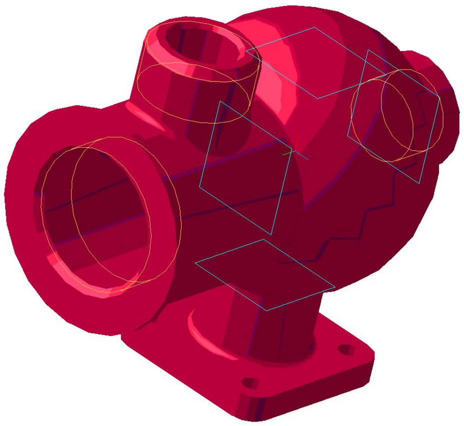
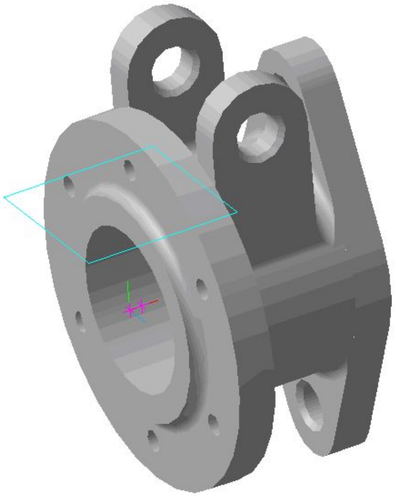
Рис. 299

Аксонометрические проекции

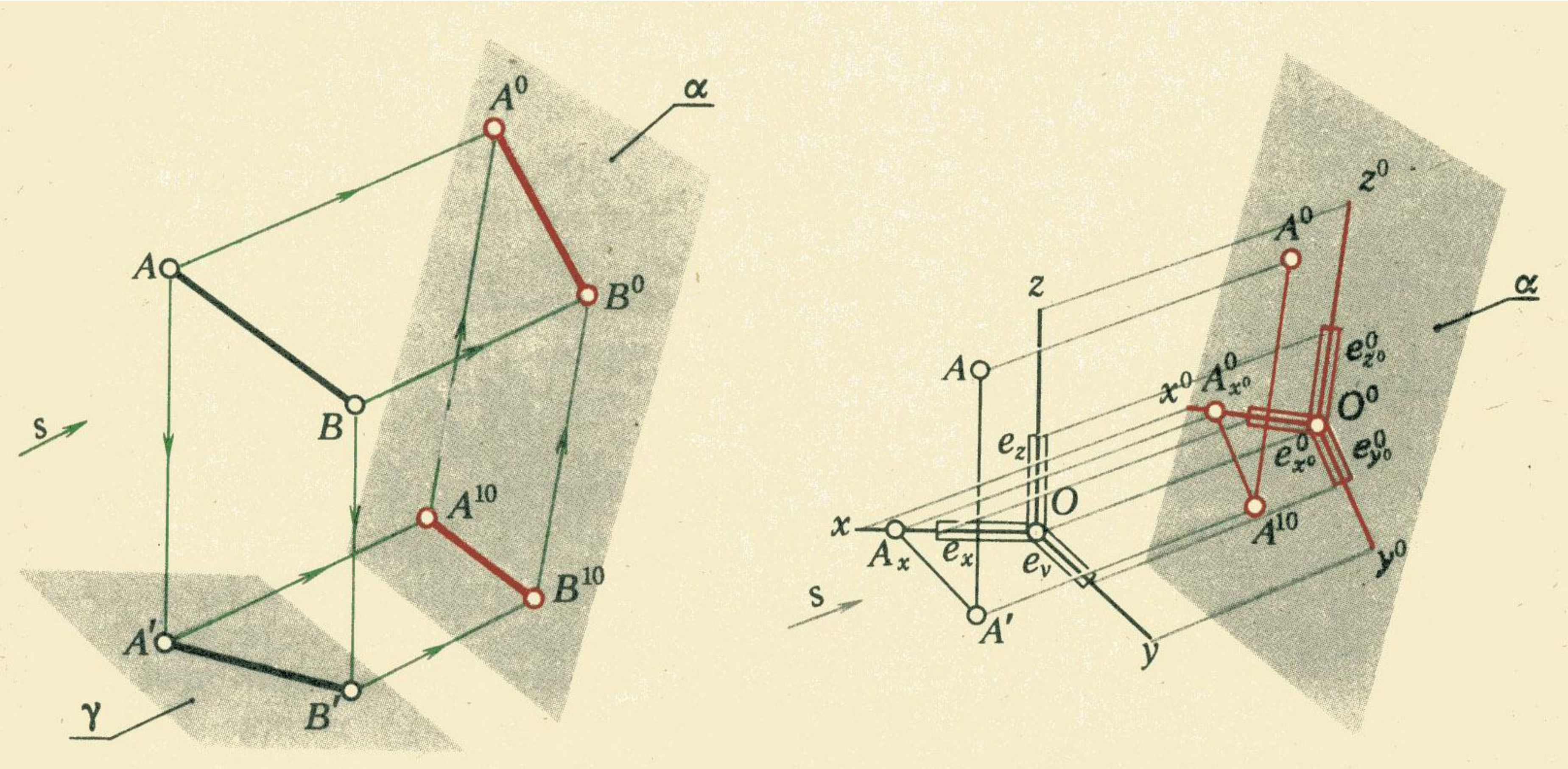




Аксонометрические проекции

Аксонометрические проекции

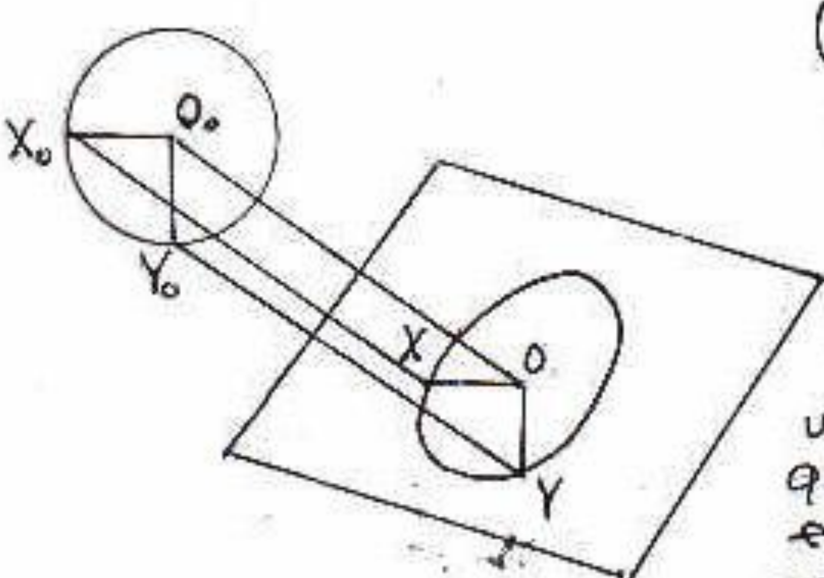


Теорема Польке. Три отрезка произвольной длины, лежащие в одной плоскости и выходящие из одной точки под произвольными углами друг к другу – представляют собой параллельные проекции трех равных отрезков, отложенных на прямоугольных осях координат от начала.

$$K_x = \frac{l_x}{l_{x_0}}; \quad K_y = \frac{l_y}{l_{y_0}}; \quad K_z = \frac{l_z}{l_{z_0}};$$

Связь между коэфф. искажения и углом проецирования может быть установлено с помощью Теоремы Апполония:

Сумма квадратов сопряженных полудиаметров эллипса есть величина постоянная



$$(OX)^2 + (OY)^2 = const$$

при $O_0X_0 = O_0Y_0 = 1 \Rightarrow$ $K_x = OX$, $K_y = OY$

т.е. $K_x^2 + K_y^2 = const$

Сумма квадратов показателей искажений при $\parallel$-проецировании двух равных и взаимно $\perp$ отрезков есть величина постоянная при данном направлении проециров.

$K_x \neq K_y \neq K_z$ — триметрия;
$K_x = K_z \neq K_y$ — диметрия;
$K_x = K_y = K_z$ — изометрия.

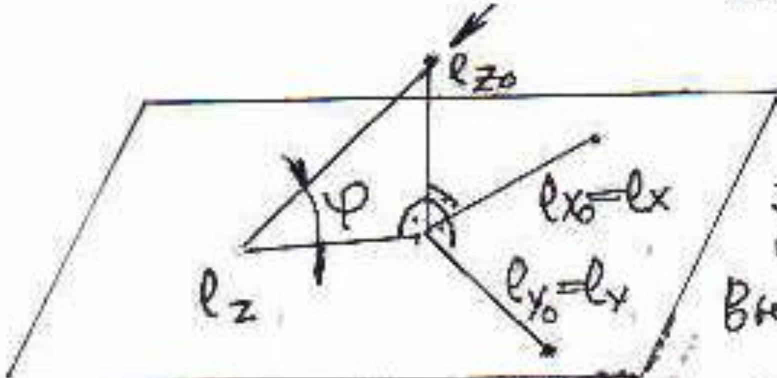
$\perp$ — прямоугольные проекции
$\not\perp$ — косоугольные — " —

Для $3^х$ взаимно $\perp$ равных отрезков на основании т. Апполония можно записать.

$$\left.\begin{aligned} K_x^2 + K_y^2 &= const = A \\ K_x^2 + K_z^2 &= const = B \\ K_y^2 + K_z^2 &= const = C \end{aligned}\right\} + \text{ и разделить на 2 то:}$$

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = \frac{A+B+C}{2} = \underset{= f(\varphi)}{const} = \underbrace{1+1+ctg\,\varphi}$$

$l_x = l_{x_0}$
$l_y = l_{y_0}$
$l_z = l_{z_0}\,ctg\,\varphi$



т.е. при заданном направлении проецирования можно произвольно задавать величины $2^х$ коэфф. искажения — третье определяется выражением:

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 2 + ctg\,\varphi$$

При прямоугольном проецировании $ctg(\varphi = 90^\circ) = 0$

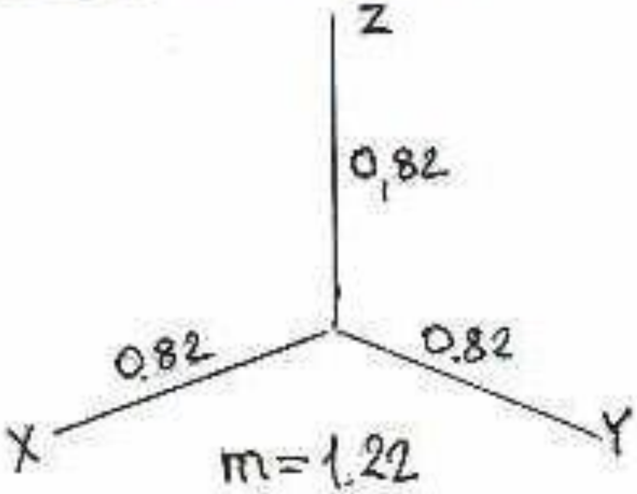
т. е. $\underbrace{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}_{\text{не могут быть больше 1}} = 2$, т. е $3K^2 = 2$; $K = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}82$

или при $K = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{K} = \frac{1}{0{,}82} \approx 1.22$

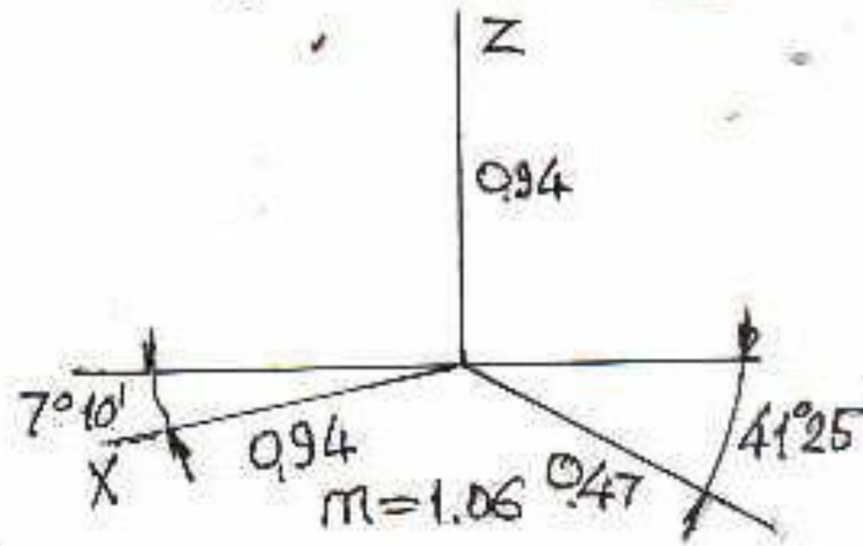
ГОСТ 2.317-69

Прямоугольные аксонометрические проекции

Изометрическая

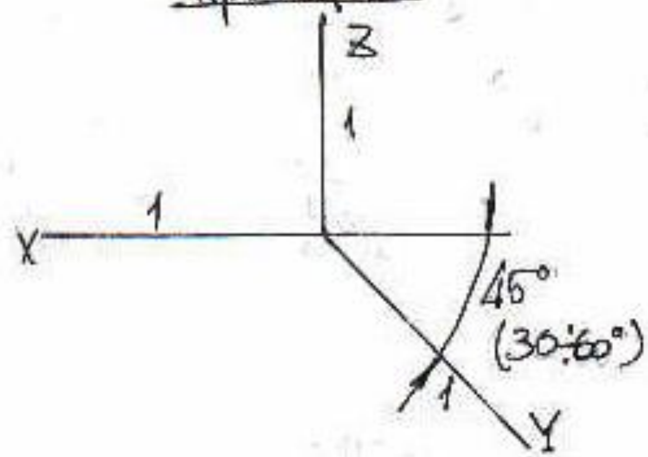


Диметрическая

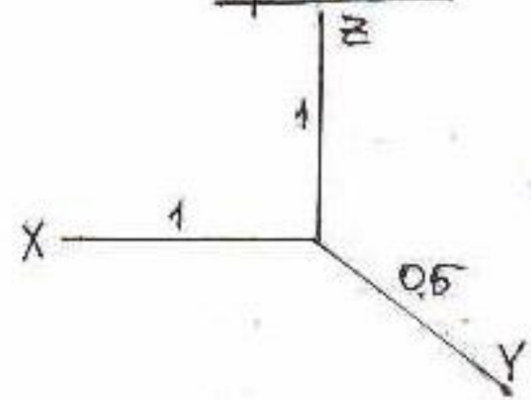


Косоугольные аксонометрические проекции

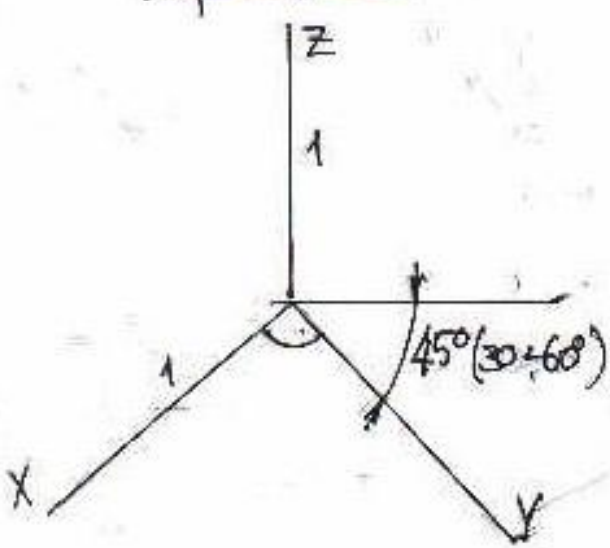
Фронтальная изометрическая проекция



Фронтальная диметрическая проекция



Горизонтальная изометрическая проекция

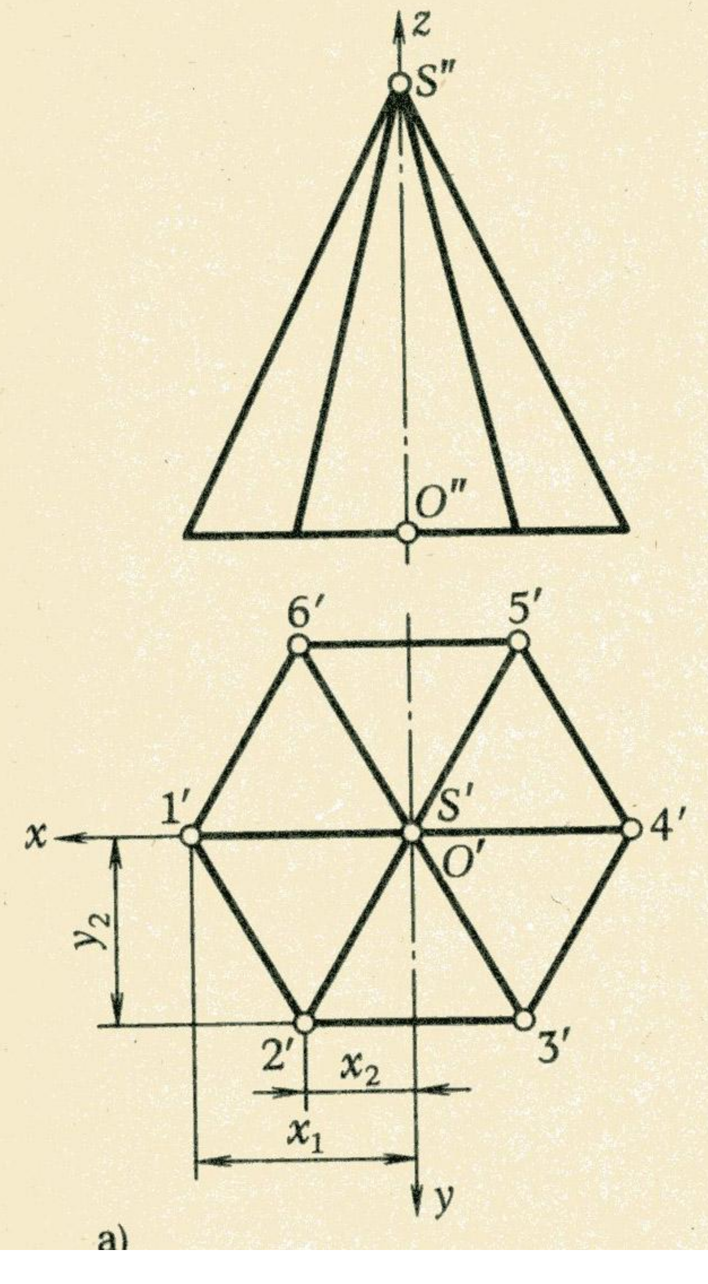


если $K_y=1.0$, то $\varphi=45^\circ$

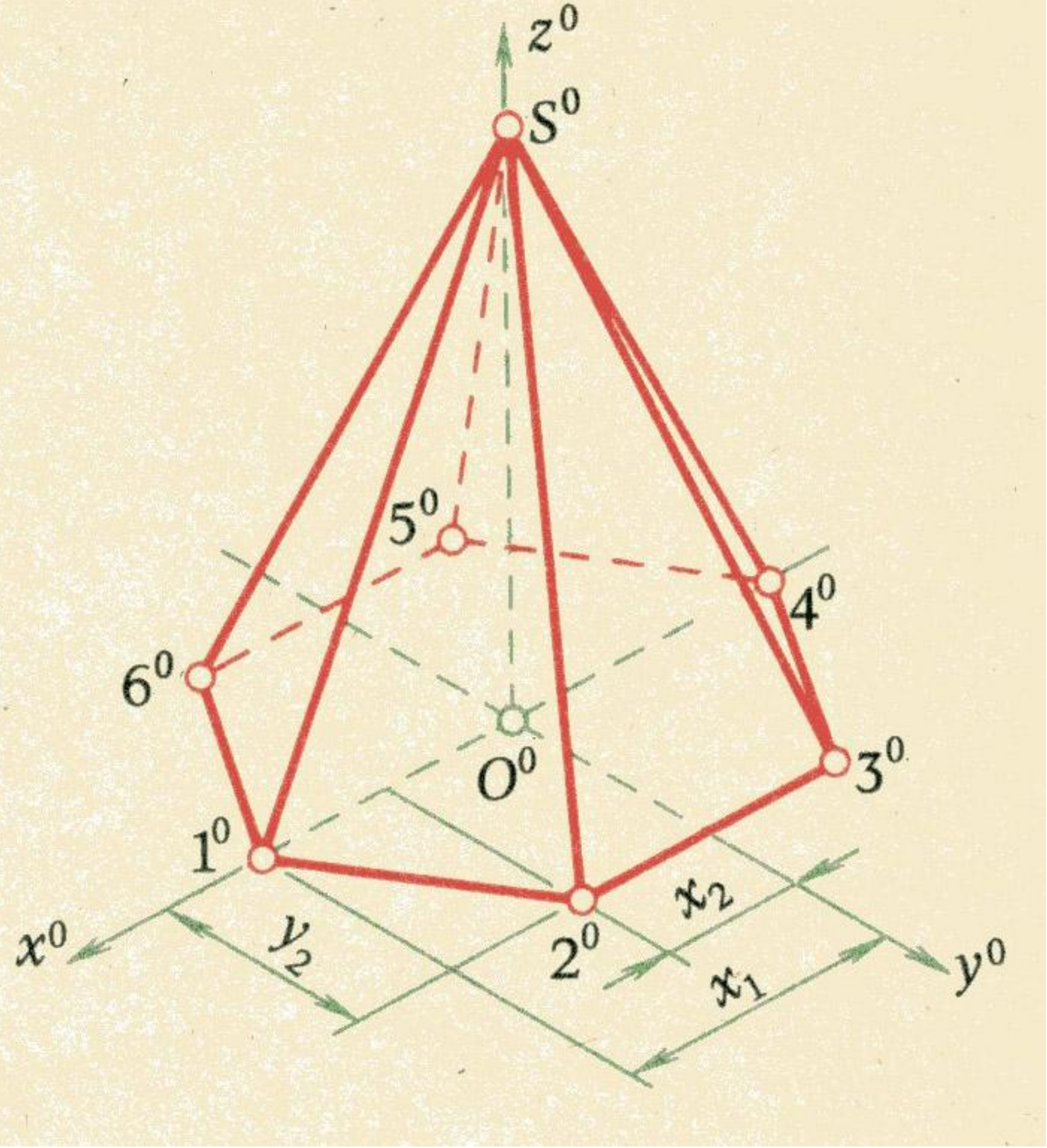
если $K_y=0.5$ то

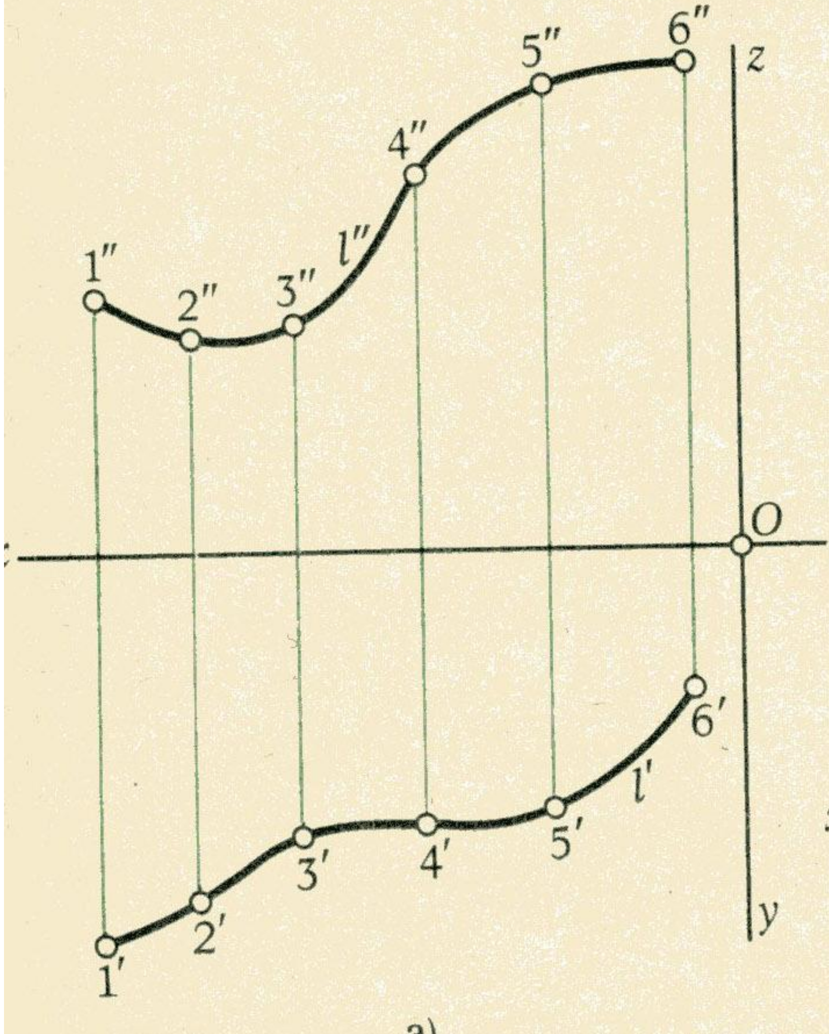
$$1+1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=2+ctg^2\varphi$$

$$ctg\varphi=0.5;\quad \varphi=63^\circ 35'$$

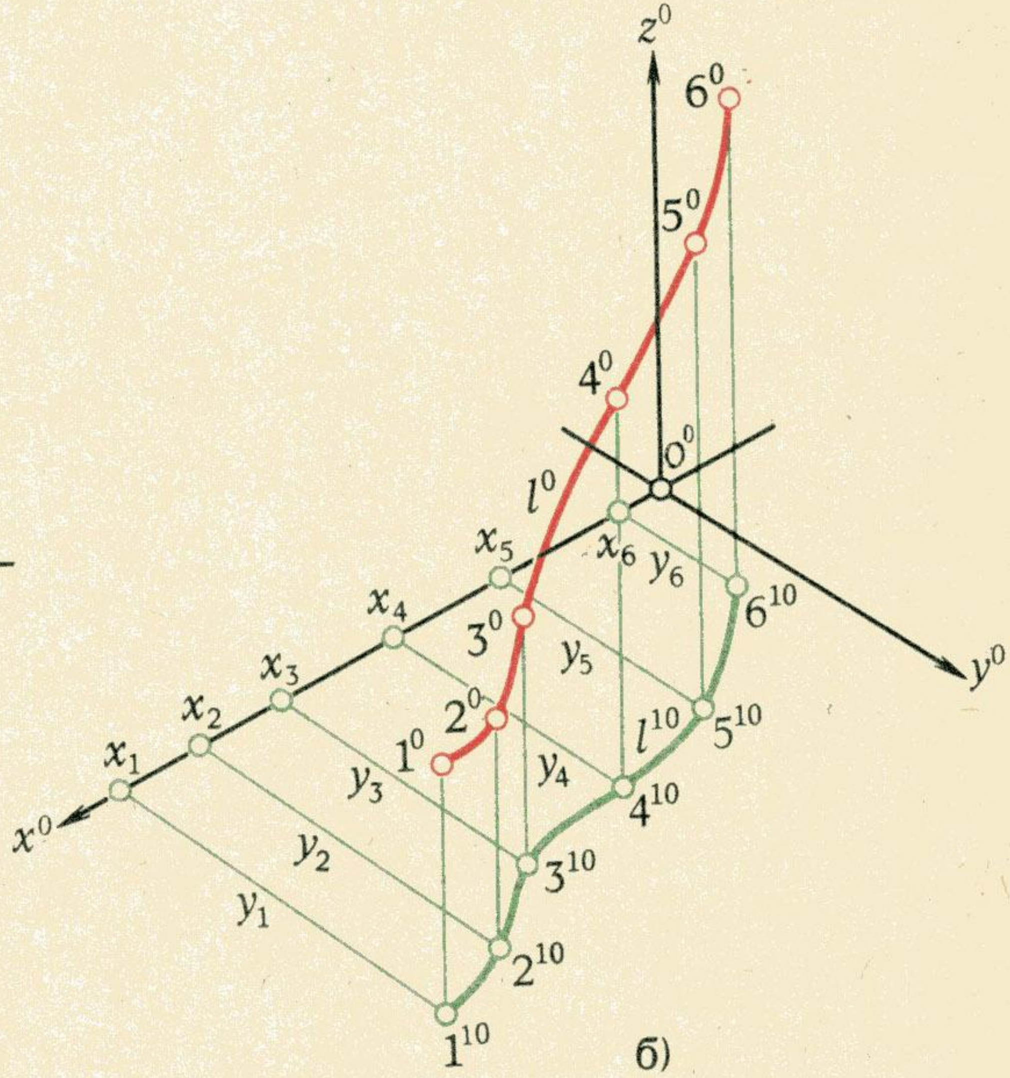


a)

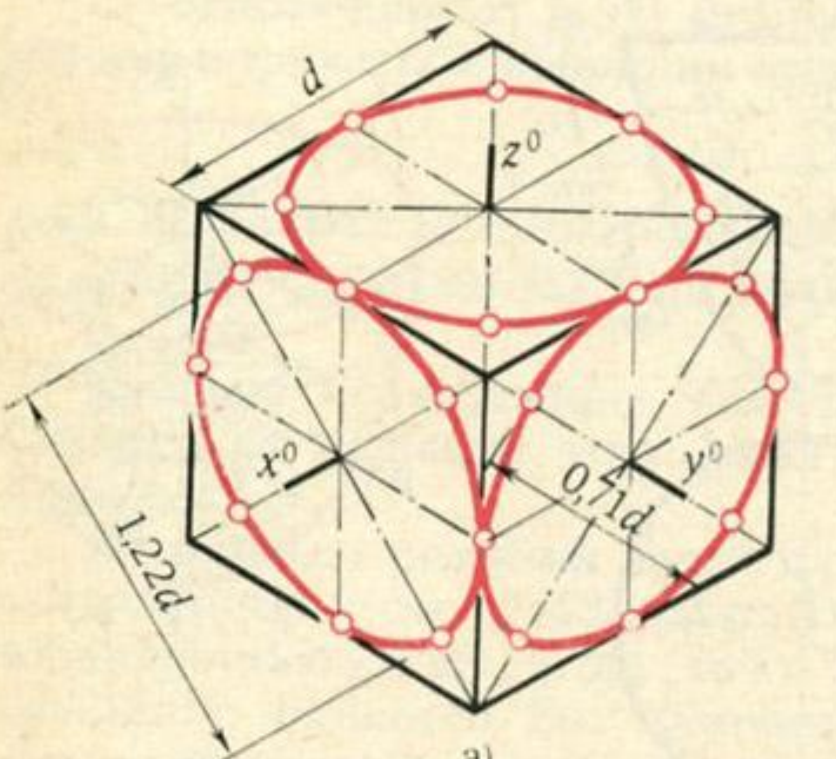



$1''$
$2''$
$3''$
$4''$
$5''$
$6''$
l''
z
O
y
$1'$
$2'$
$3'$
$4'$
$5'$
$6'$
l'

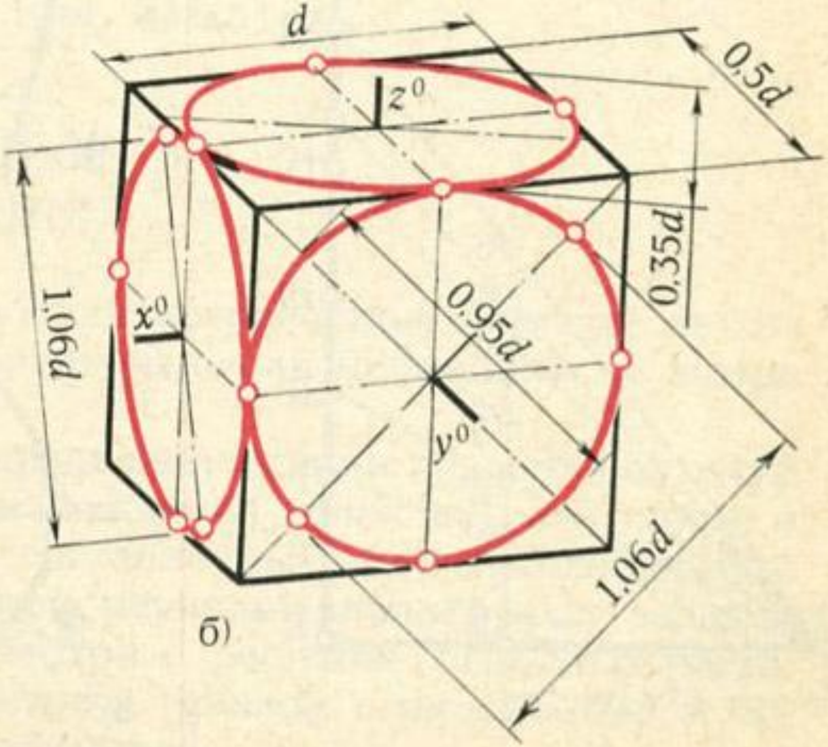
а)


z^0
6^0
5^0
4^0
O^0
l^0
3^0
2^0
1^0
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
y_1
y_2
y_3
y_4
y_5
y_6
x^0
y^0
1^{10}
2^{10}
3^{10}
4^{10}
5^{10}
6^{10}
l^{10}

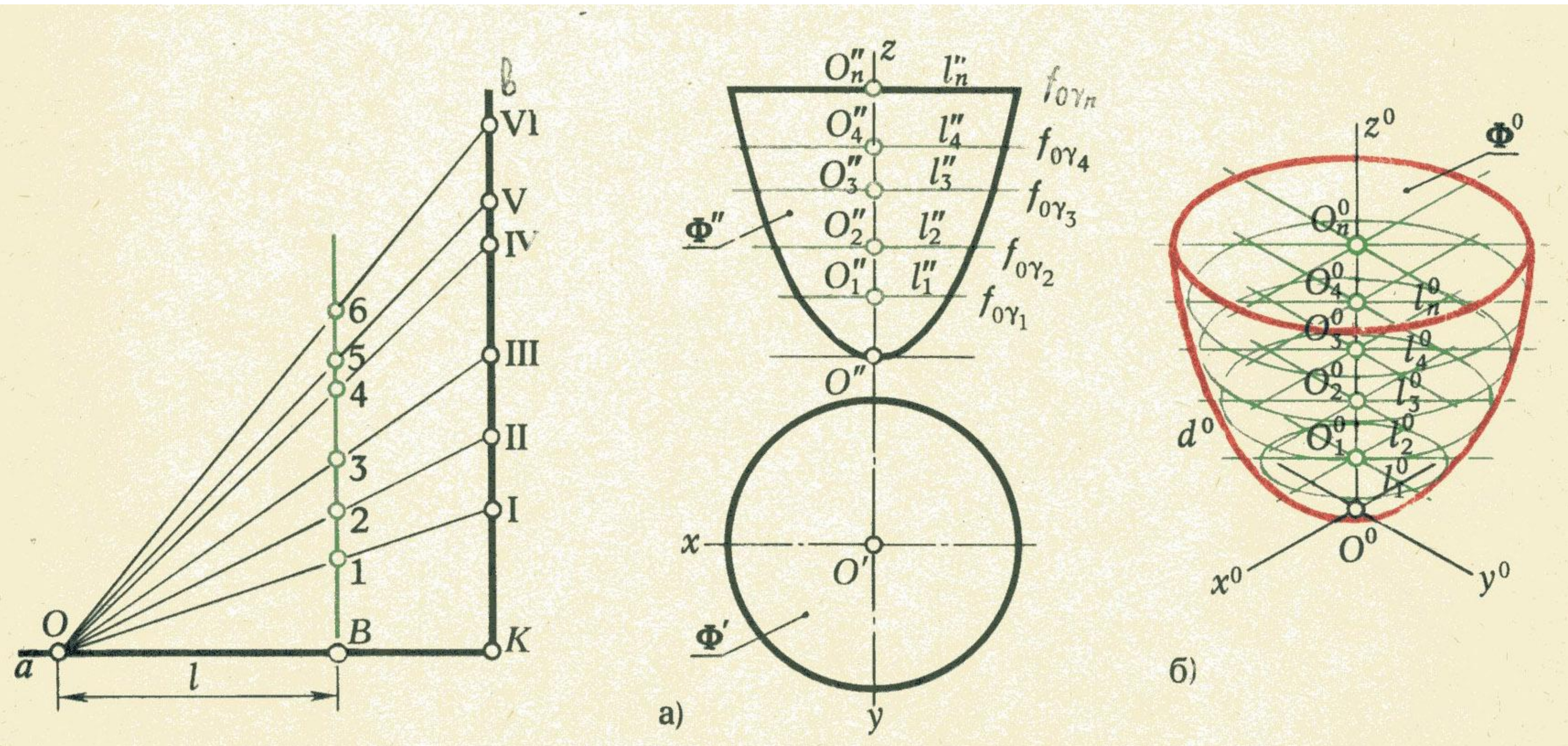
б)

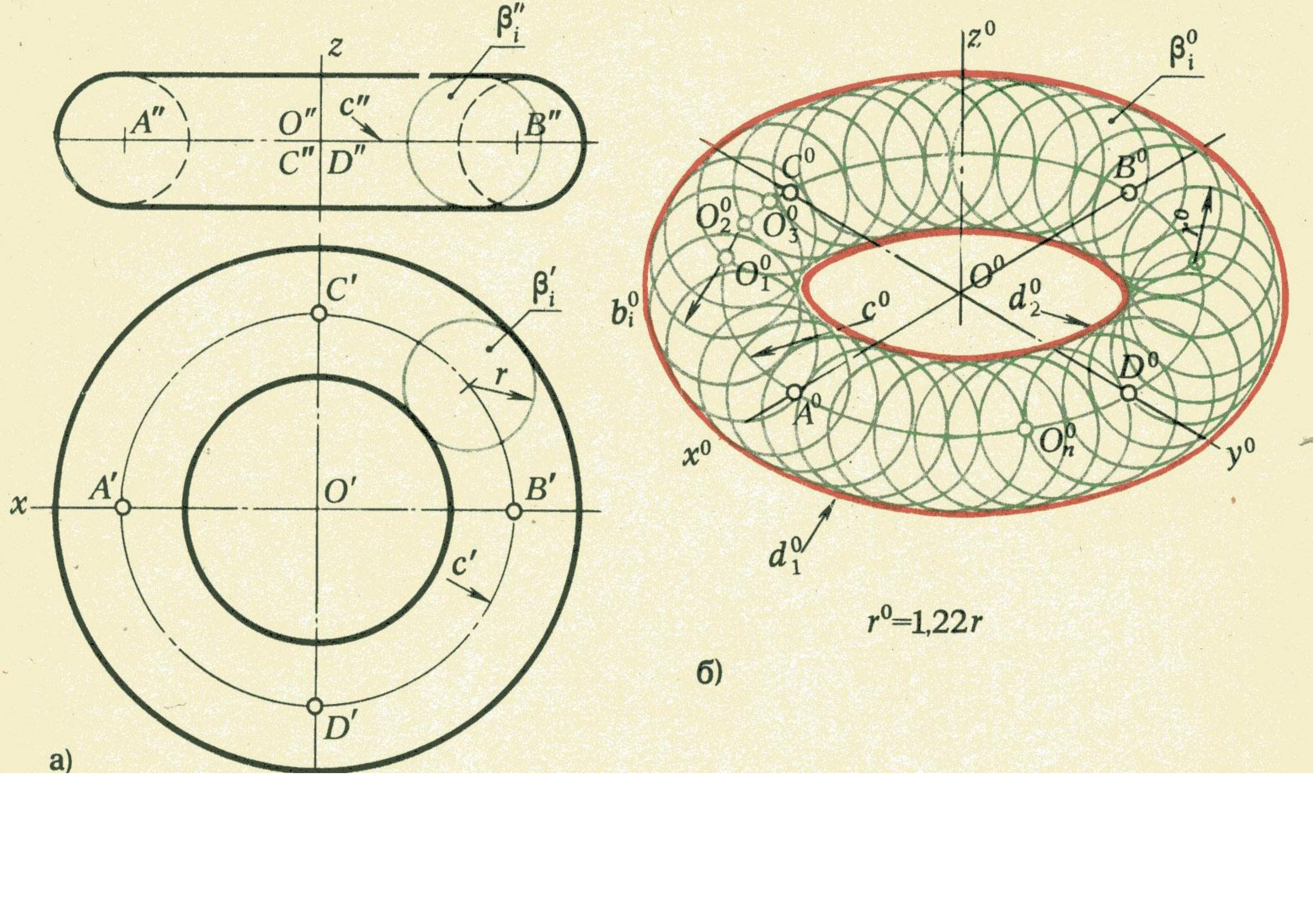


а)

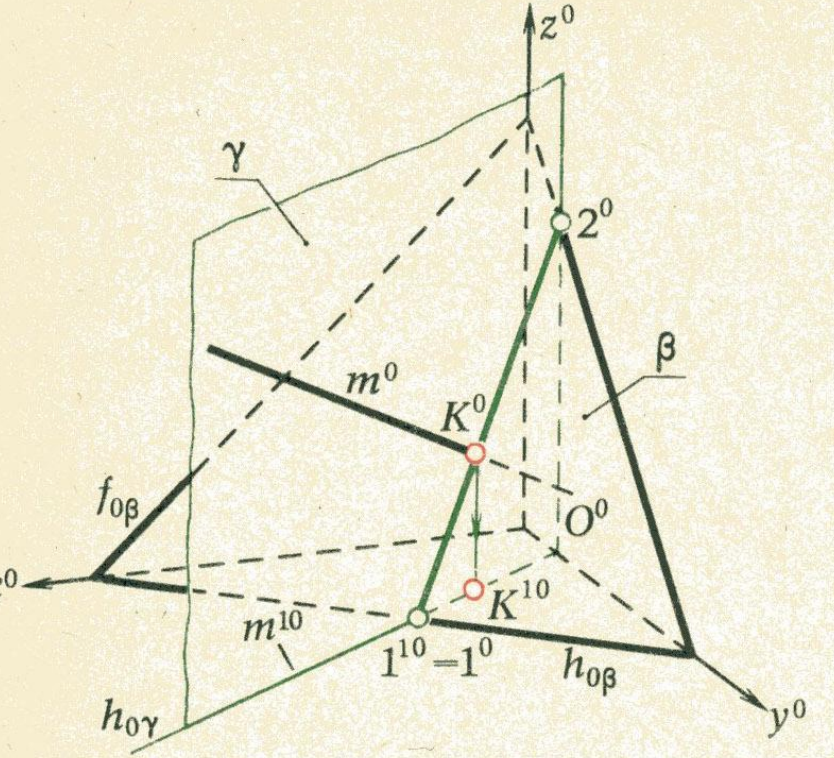


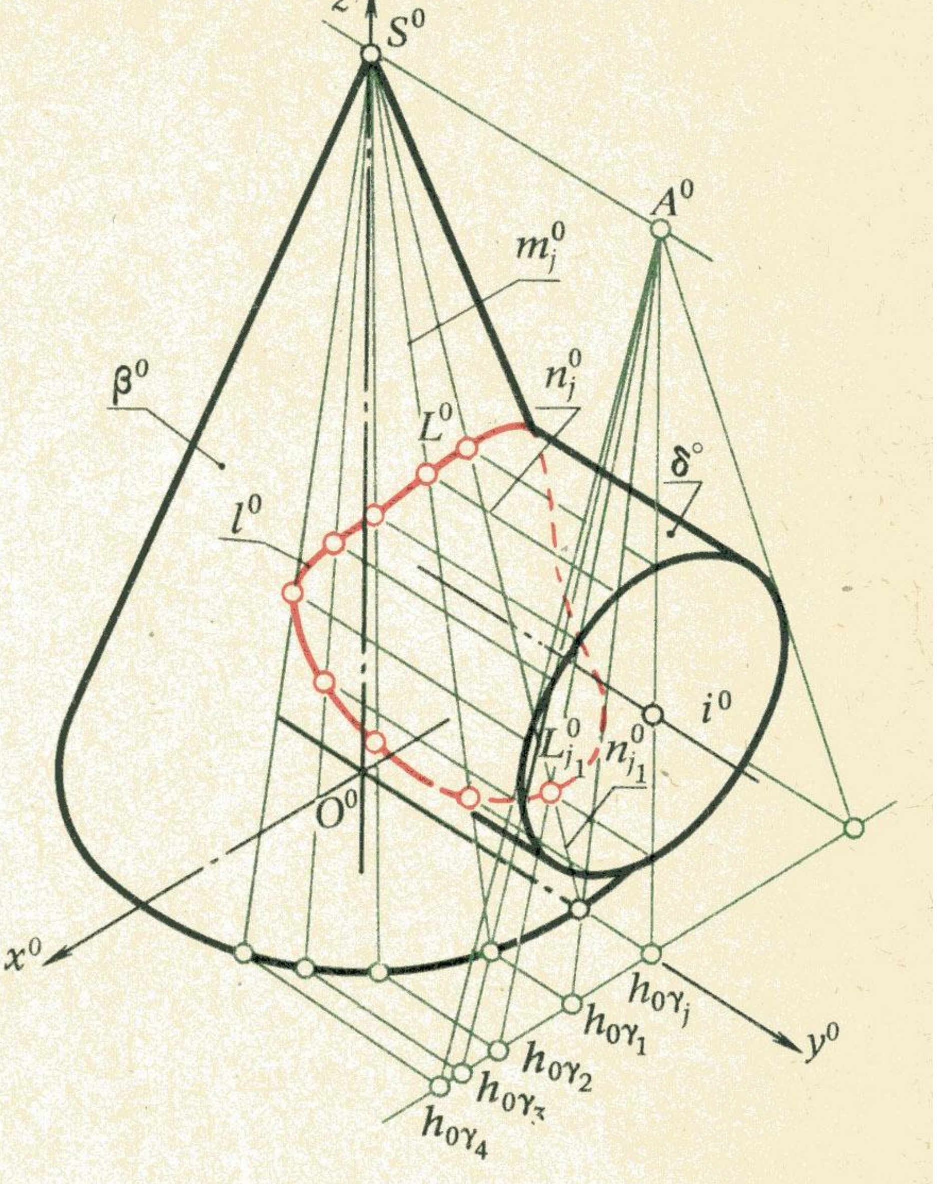
б)

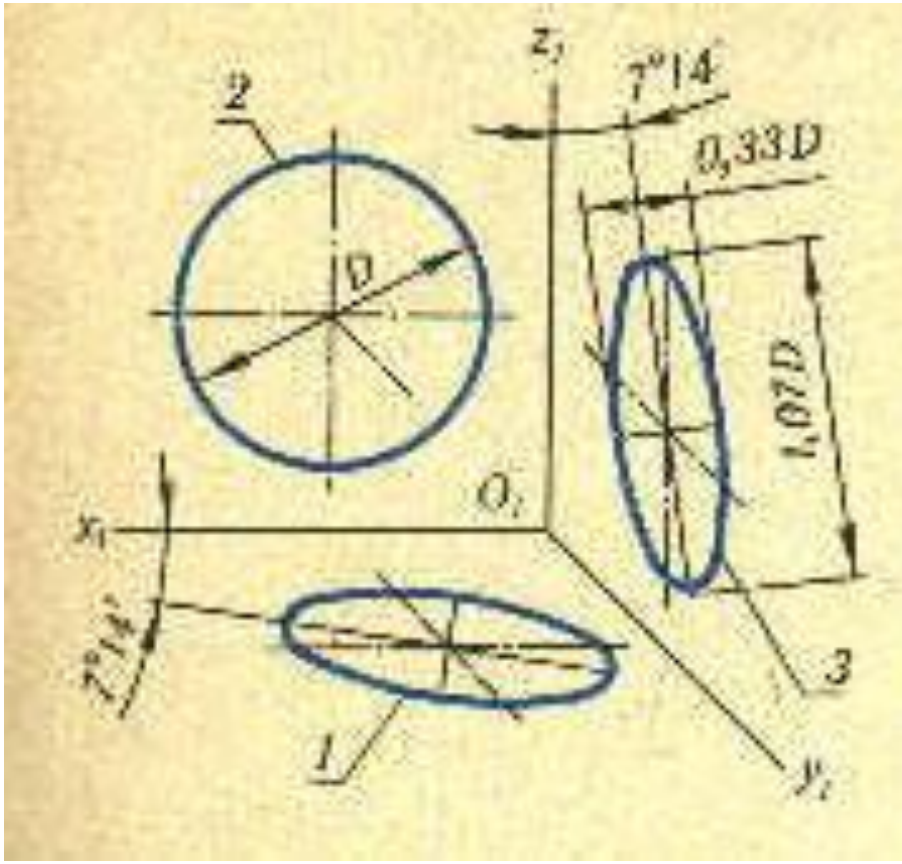

O
a
l
B
K
1
2
3
4
5
6
I
II
III
IV
V
VI
b
z
O''_n
l''_n
f_0γ_n
O''_4
l''_4
f_0γ_4
O''_3
l''_3
f_0γ_3
O''_2
l''_2
f_0γ_2
O''_1
l''_1
f_0γ_1
Φ''
O''
x
O'
Φ'
y
а)
z^0
Φ^0
O^0_n
O^0_4
l^0_n
O^0_3
l^0_4
O^0_2
l^0_3
d^0
O^0_1
l^0_2
l^0_1
O^0
x^0
y^0
б)



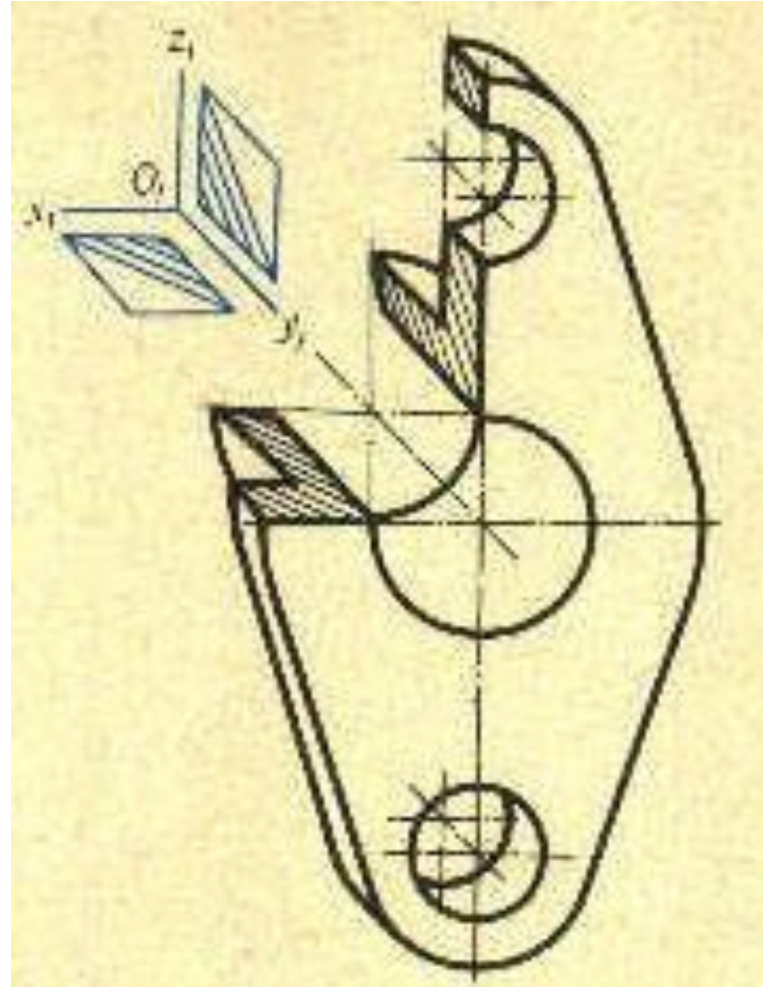
z
β_i''
A''
O''
c''
B''
C'' D''
C'
β_i'
r
A'
O'
B'
x
c'
D'
a)
z^0
β_i^0
C^0
B^0
O_2^0
O_3^0
O_1^0
O^0
r^0
b_i^0
c^0
d_2^0
D^0
A^0
O_n^0
x^0
y^0
d_1^0
r^0=1,22r
б)


z^0
γ
2^0
m^0
β
K^0
$f_{0\beta}$
O^0
x^0
K^{10}
m^{10}
$1^{10}=1^0$
$h_{0\beta}$
y^0
$h_{0\gamma}$

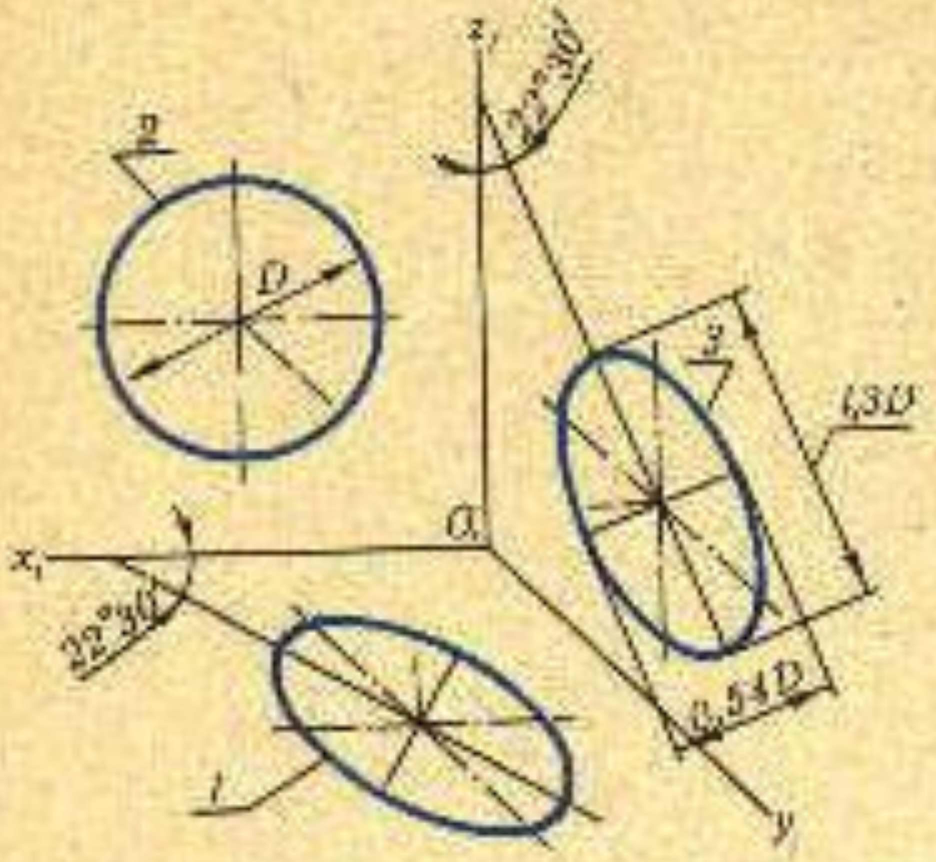

z^0
S^0
A^0
m_j^0
β^0
n_j^0
L^0
δ^0
l^0
i^0
$L_{j_1}^0$
$n_{j_1}^0$
O^0
x^0
$h_{0\gamma_j}$
$h_{0\gamma_1}$
y^0
$h_{0\gamma_2}$
$h_{0\gamma_3}$
$h_{0\gamma_4}$



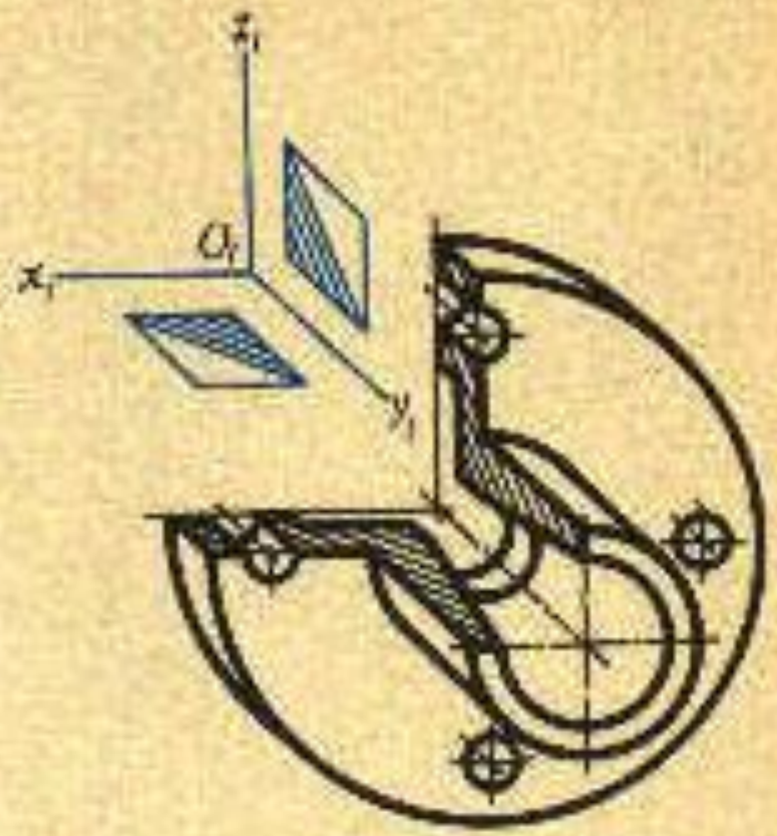
z_1
$7°14'$
$0,33D$
2
D
$1,07D$
O_1
x_1
$7°14'$
3
1
y_1



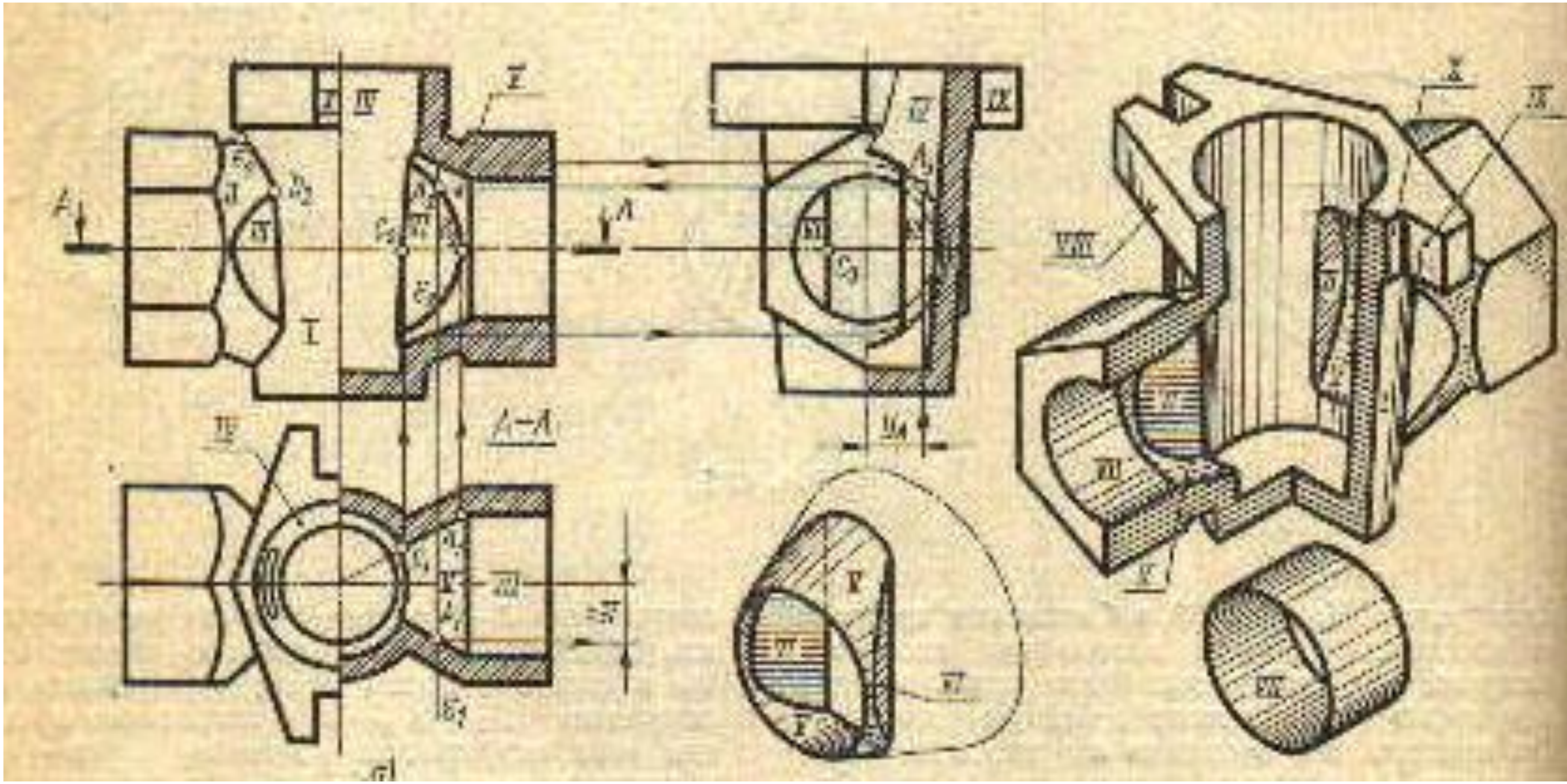
z_1
O_1
x_1
y_1



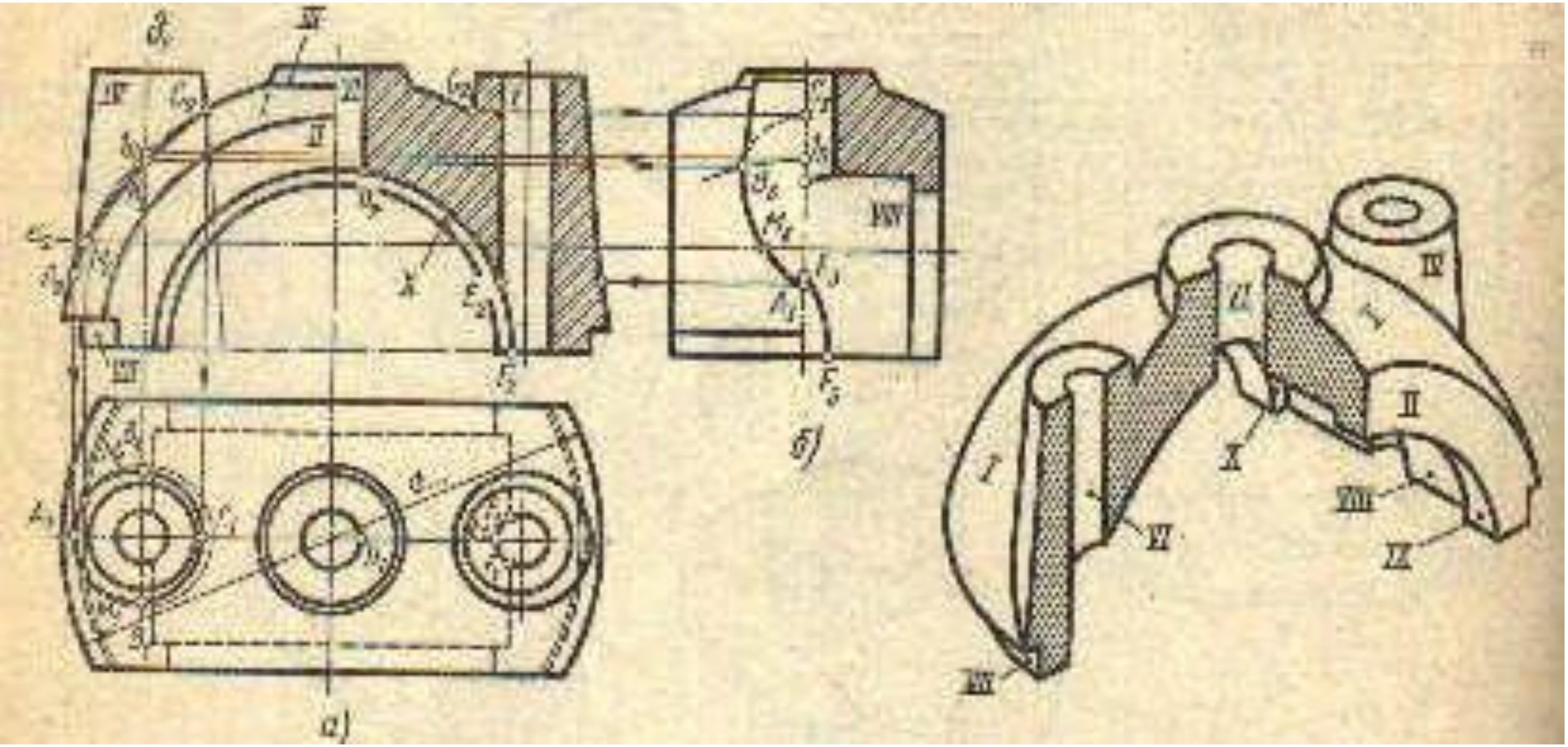
z1
x1
y1
O1
D
1,3D
0,54D
22°30'
22°30'
1
2
2



z1
x1
y1
O1



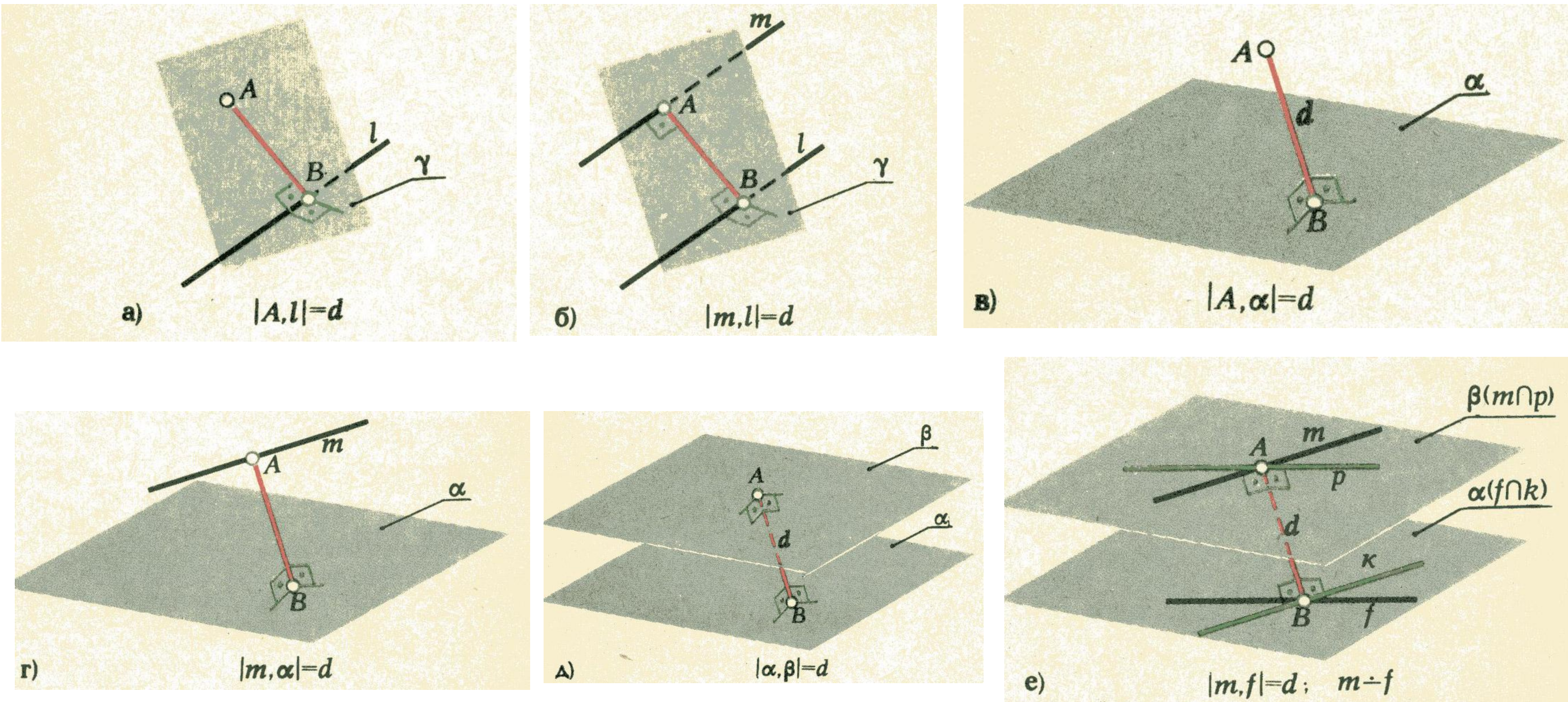
А–А


а)
б)

Метрические задачи

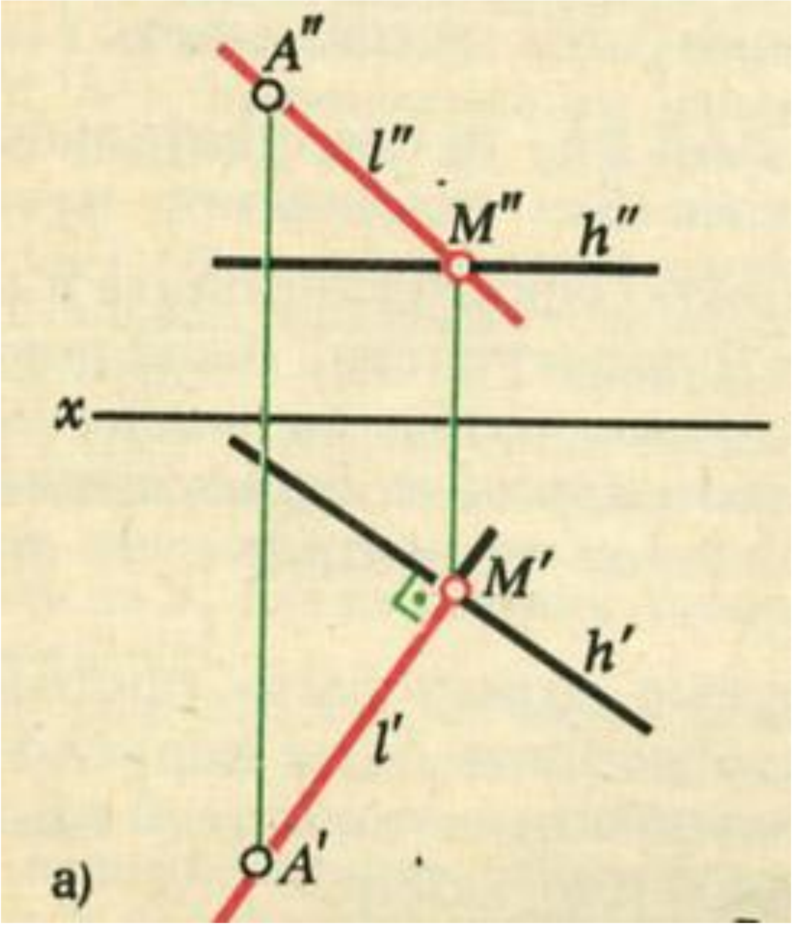
- задачи на определение расстояния между двумя точками;

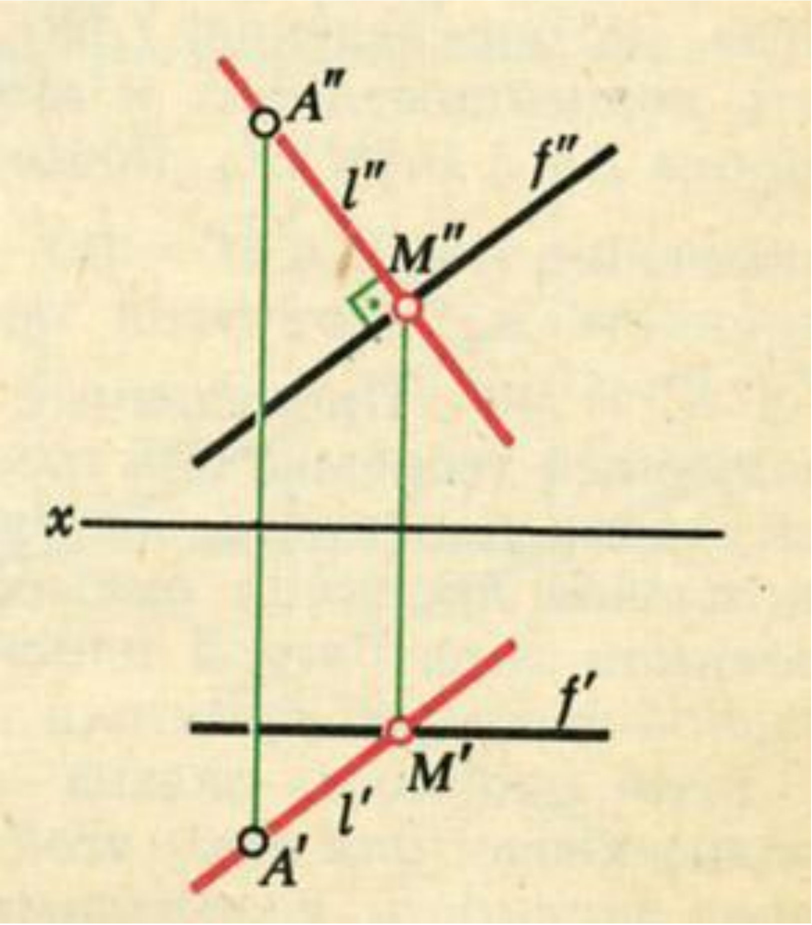
- задачи на нахождение величины угла между двумя пересекающими прямыми.

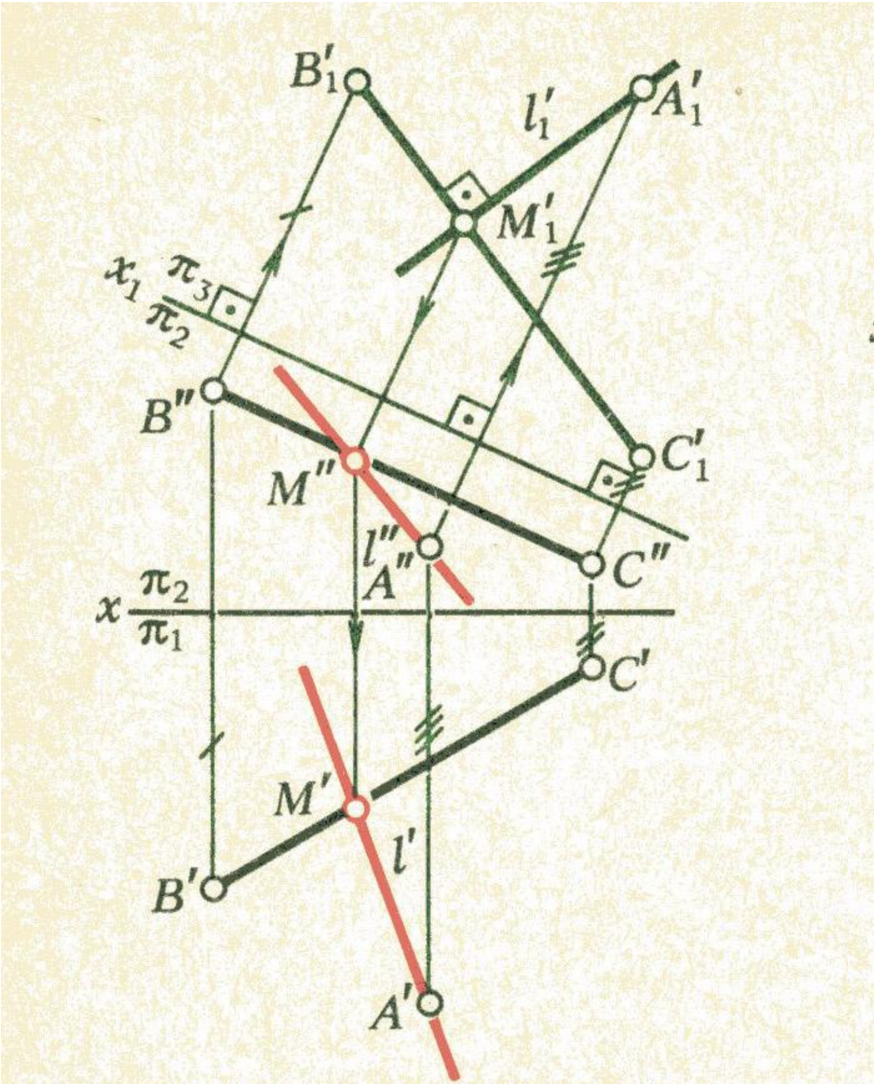


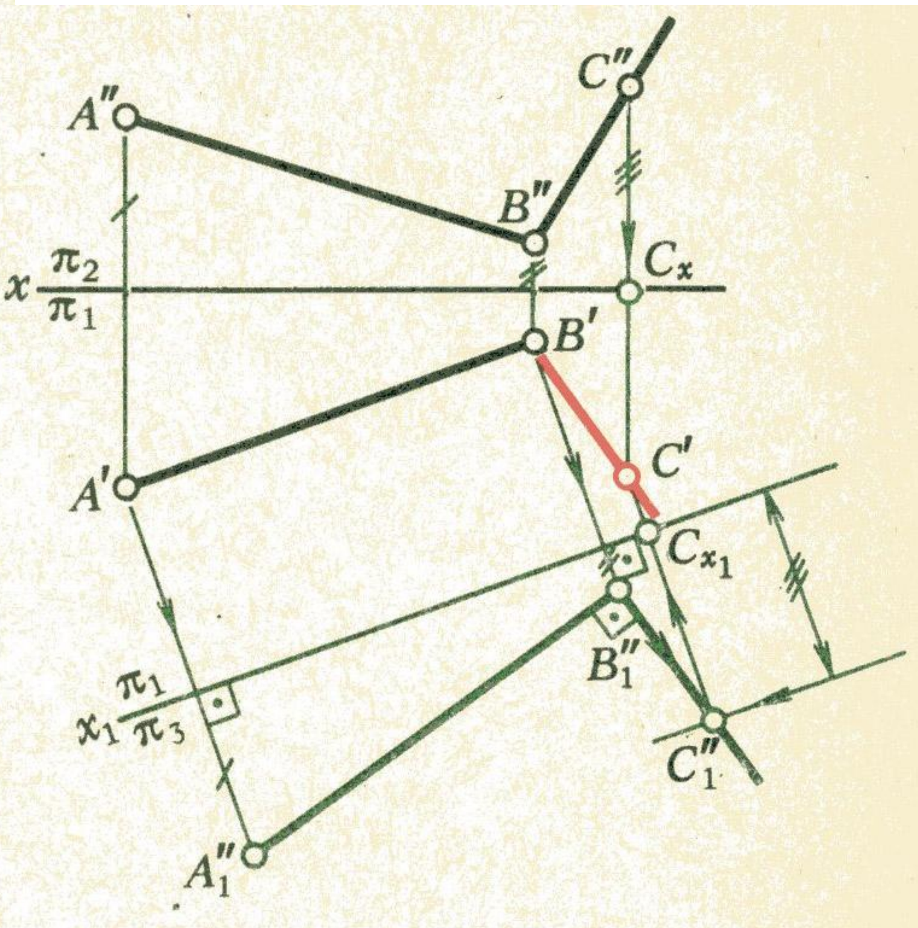
Взаимно перпендикулярные прямые

$$(\widehat{ABC} = 90^\circ) \wedge ([BC) \parallel \pi_1,\ [BA) \nparallel \pi_1) \Rightarrow \widehat{A'B'C'} = 90^\circ .$$

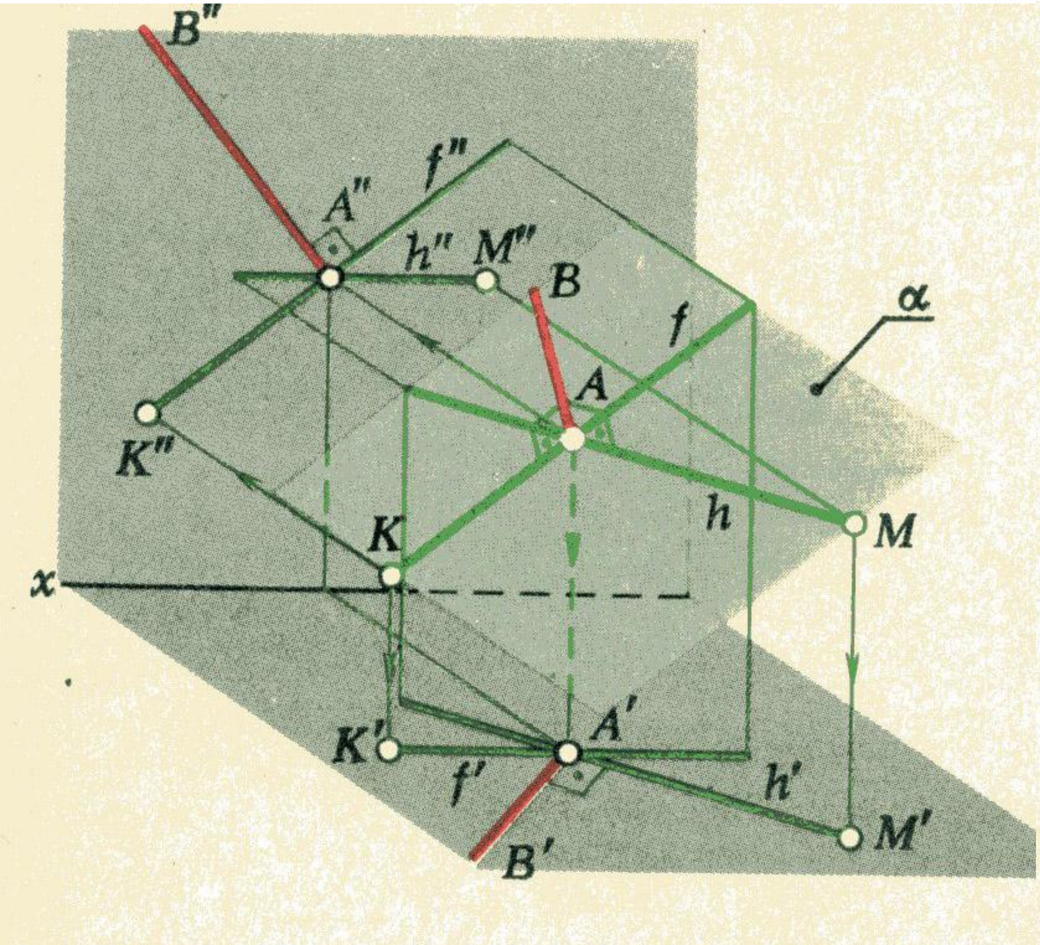


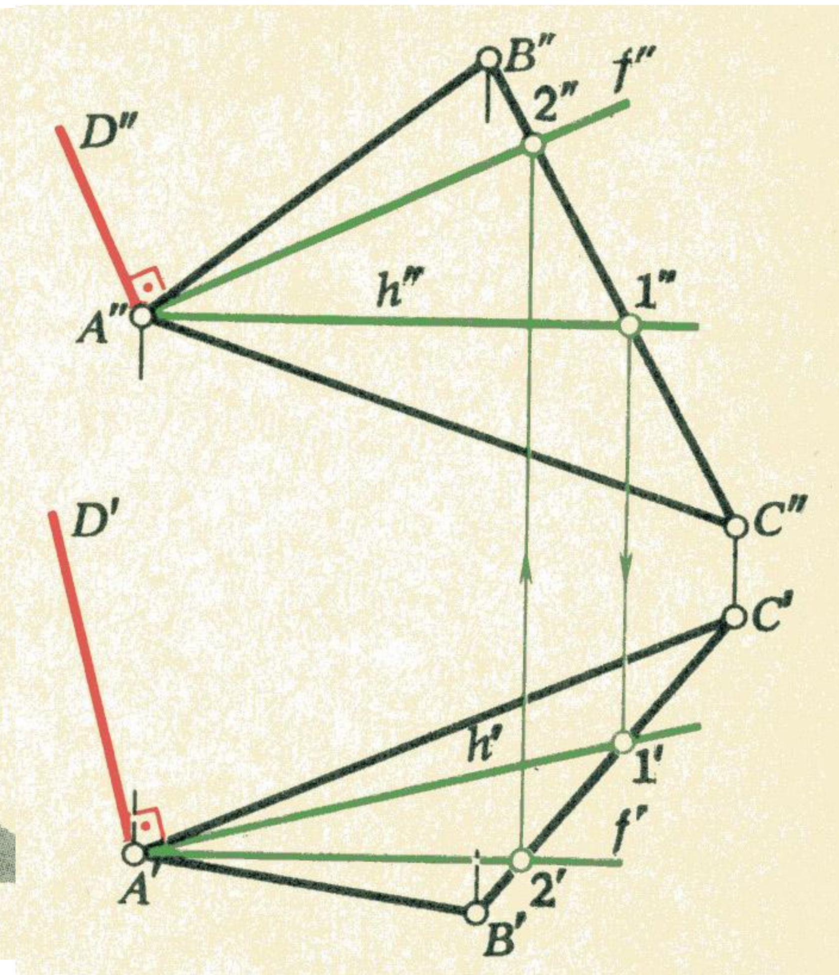


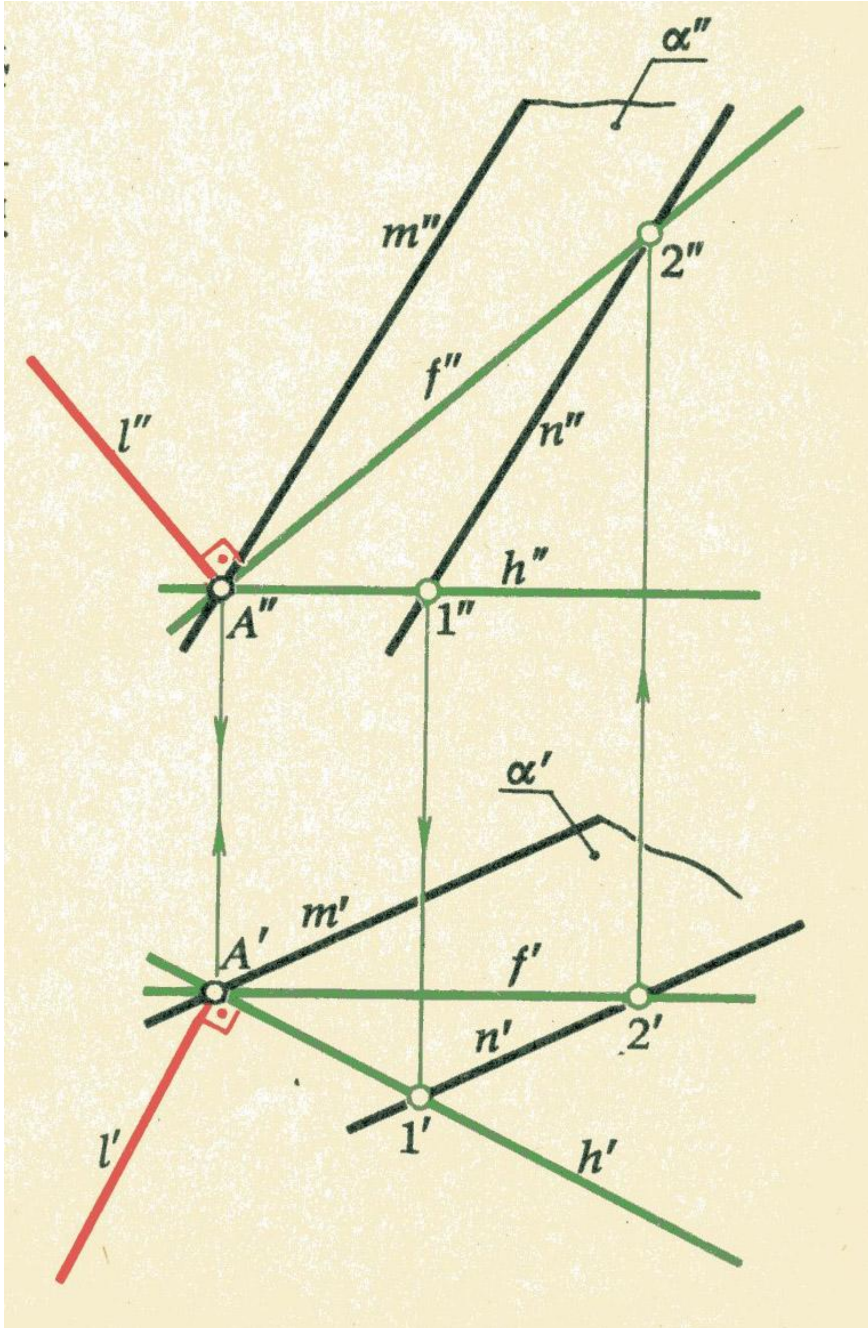

B'1
l'1
A'1
M'1
x1
π3
π2
B''
M''
C'1
l''
A''
C''
x
π2
π1
C'
M'
l'
B'
A'

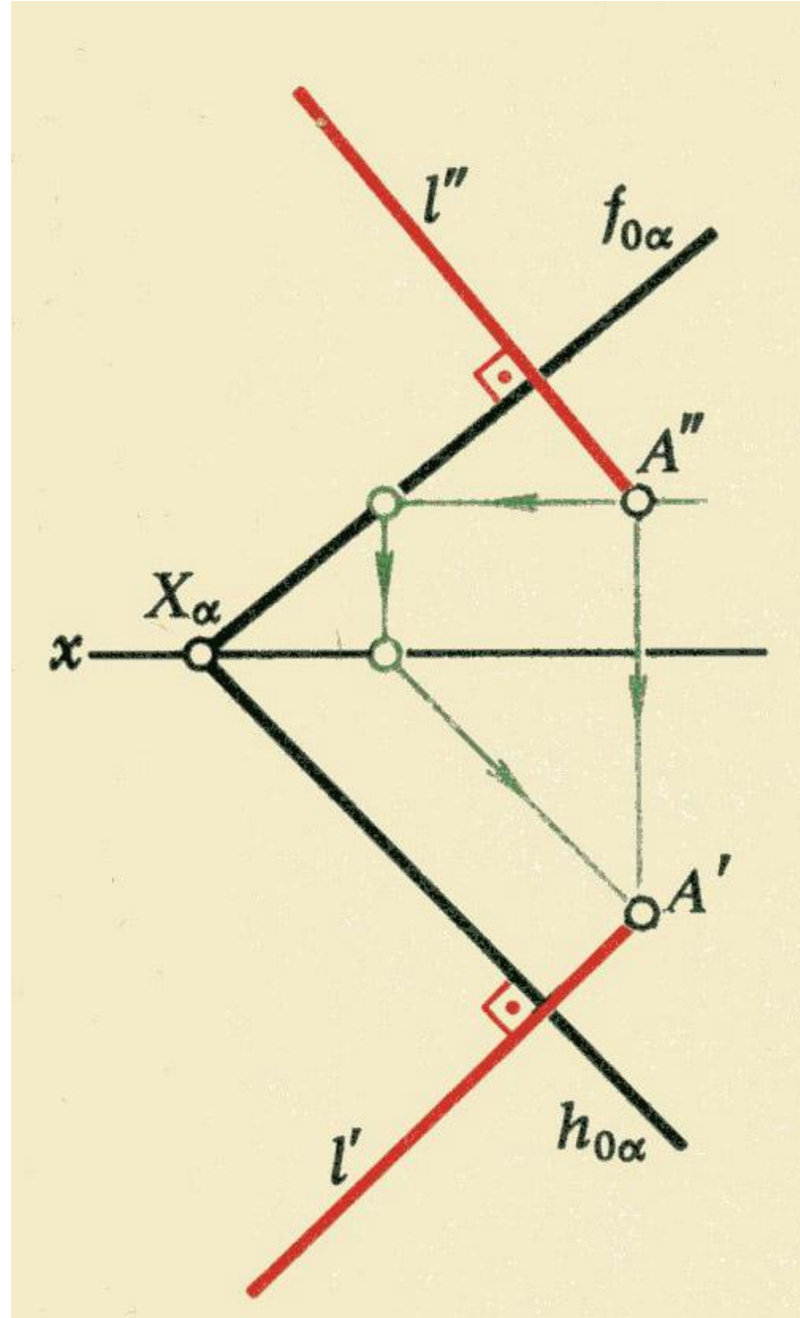

C''
A''
B''
x
π2
π1
Cx
B'
C'
A'
Cx1
B''1
π1
x1
π3
C''1
A''1

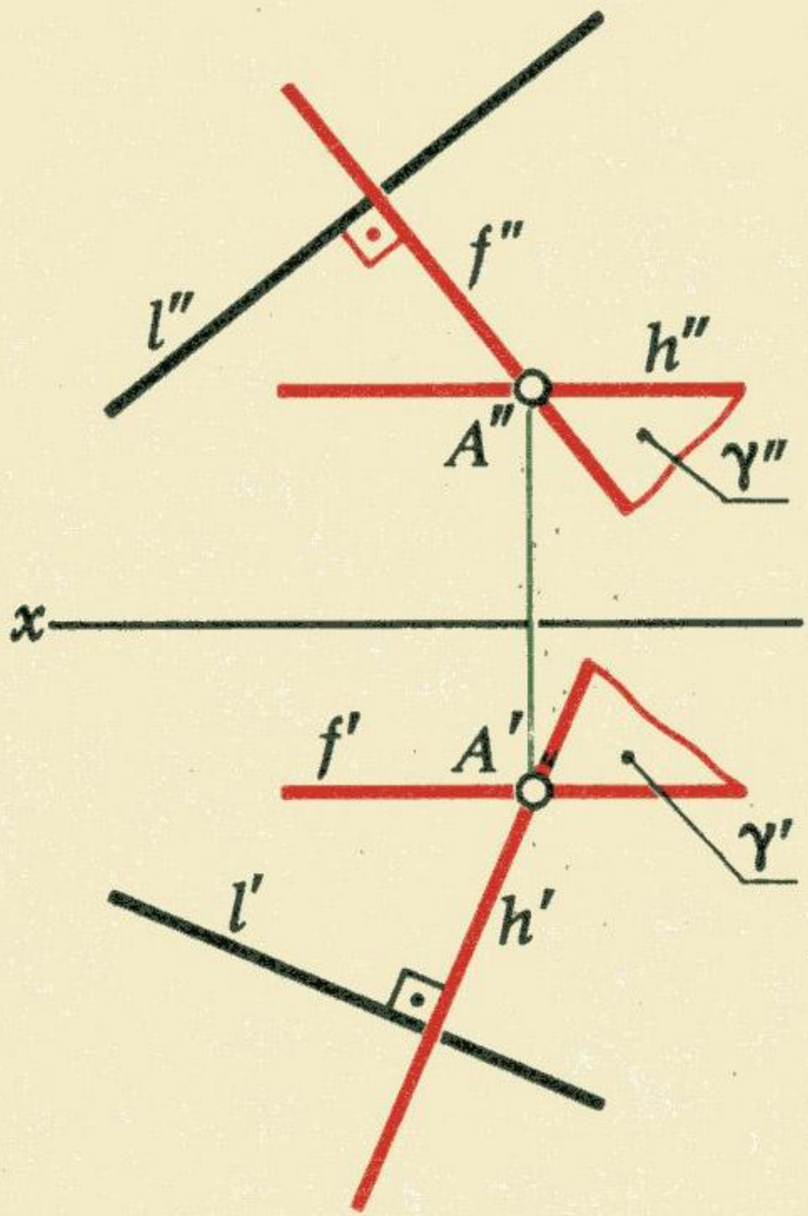
Взаимно перпендикулярные прямая и плоскость



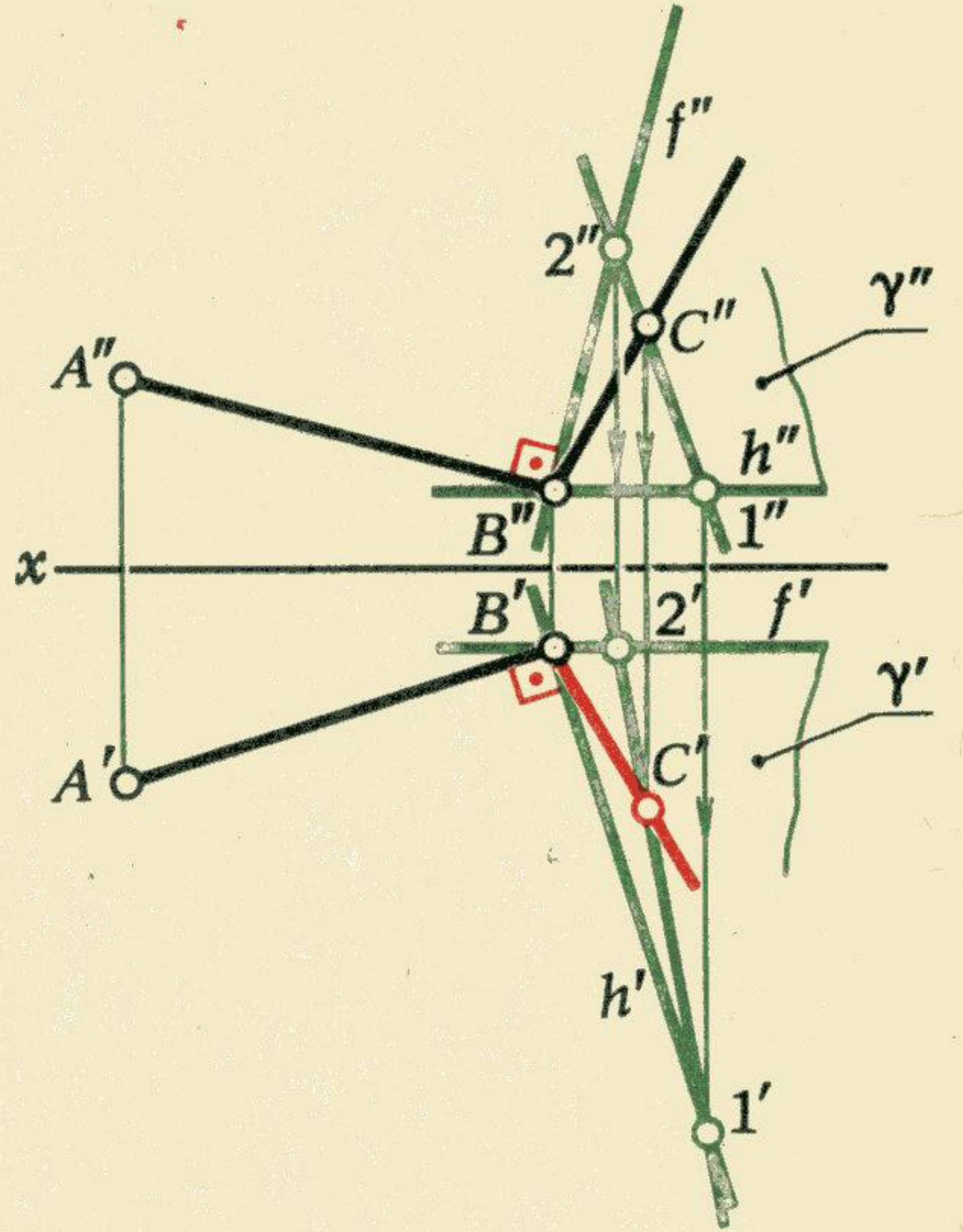



α″
m″
2″
f″
l″
n″
h″
A″
1″
α′
m′
A′
f′
n′
2′
l′
1′
h′


l″
f0α
A″
Xα
x
A′
h0α
l′

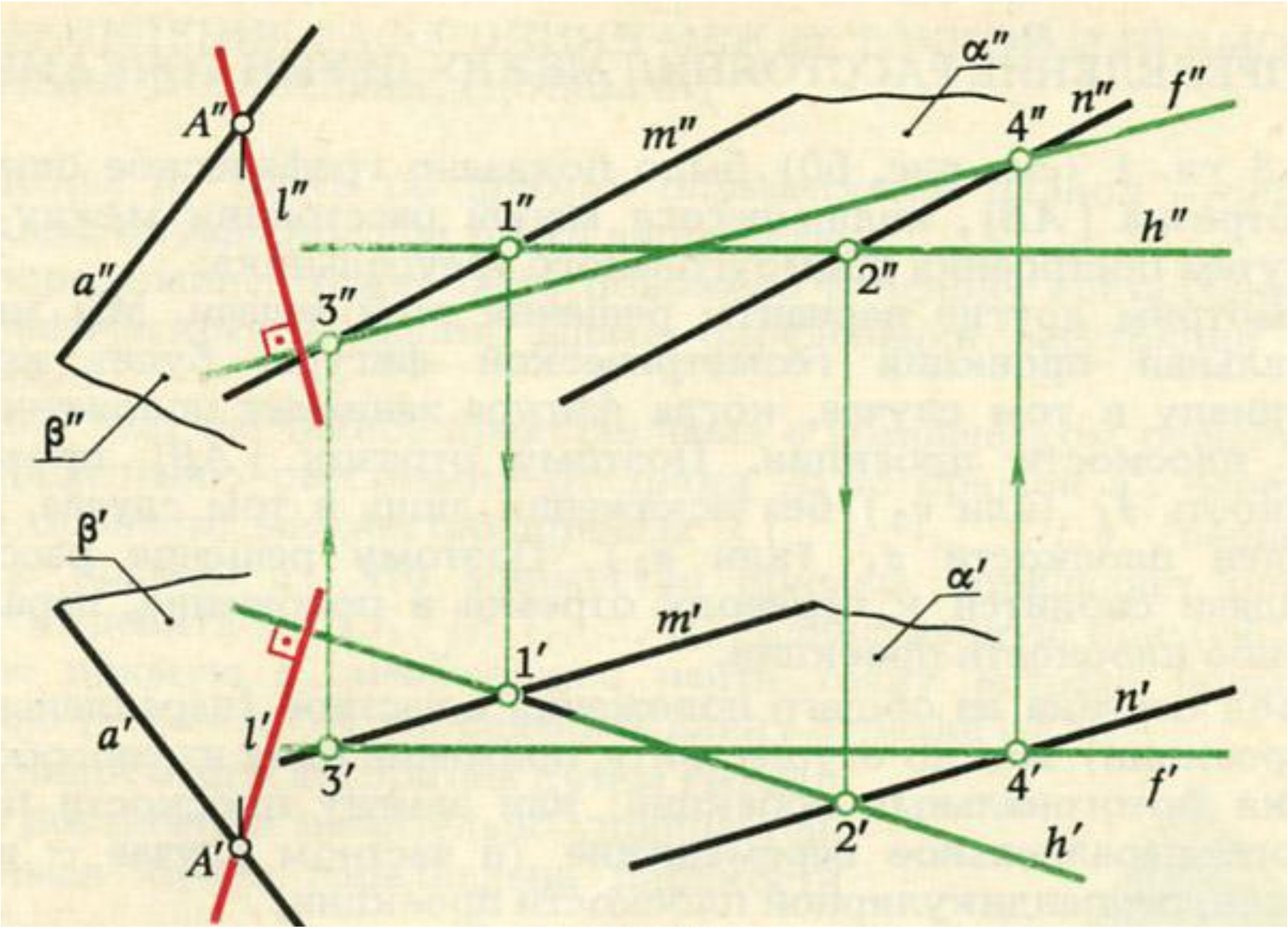


l''
f''
h''
A''
γ''
x
f'
A'
γ'
l'
h'

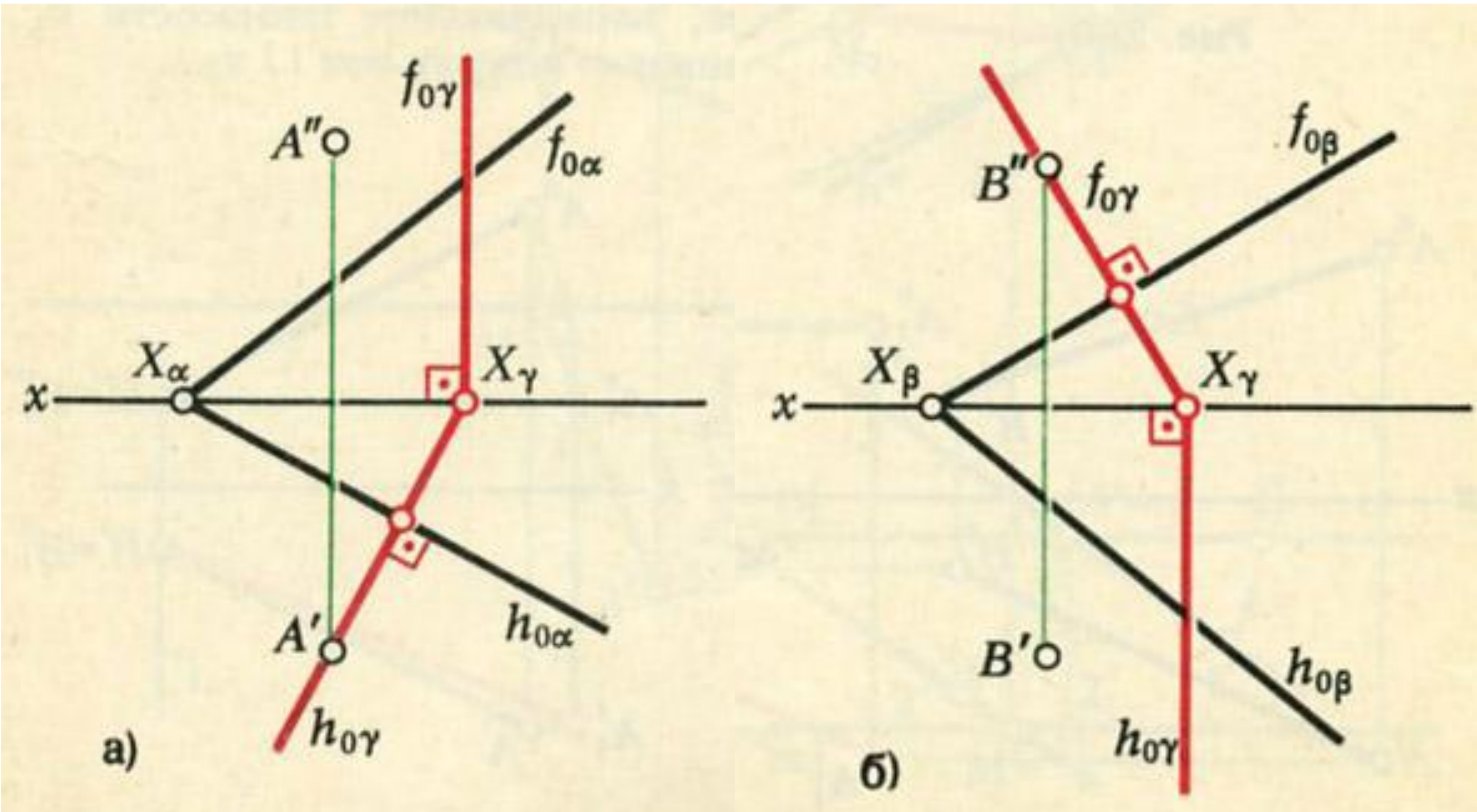


f''
2''
C''
γ''
A''
h''
B''
1''
x
B'
2'
f'
γ'
A'
C'
h'
1'

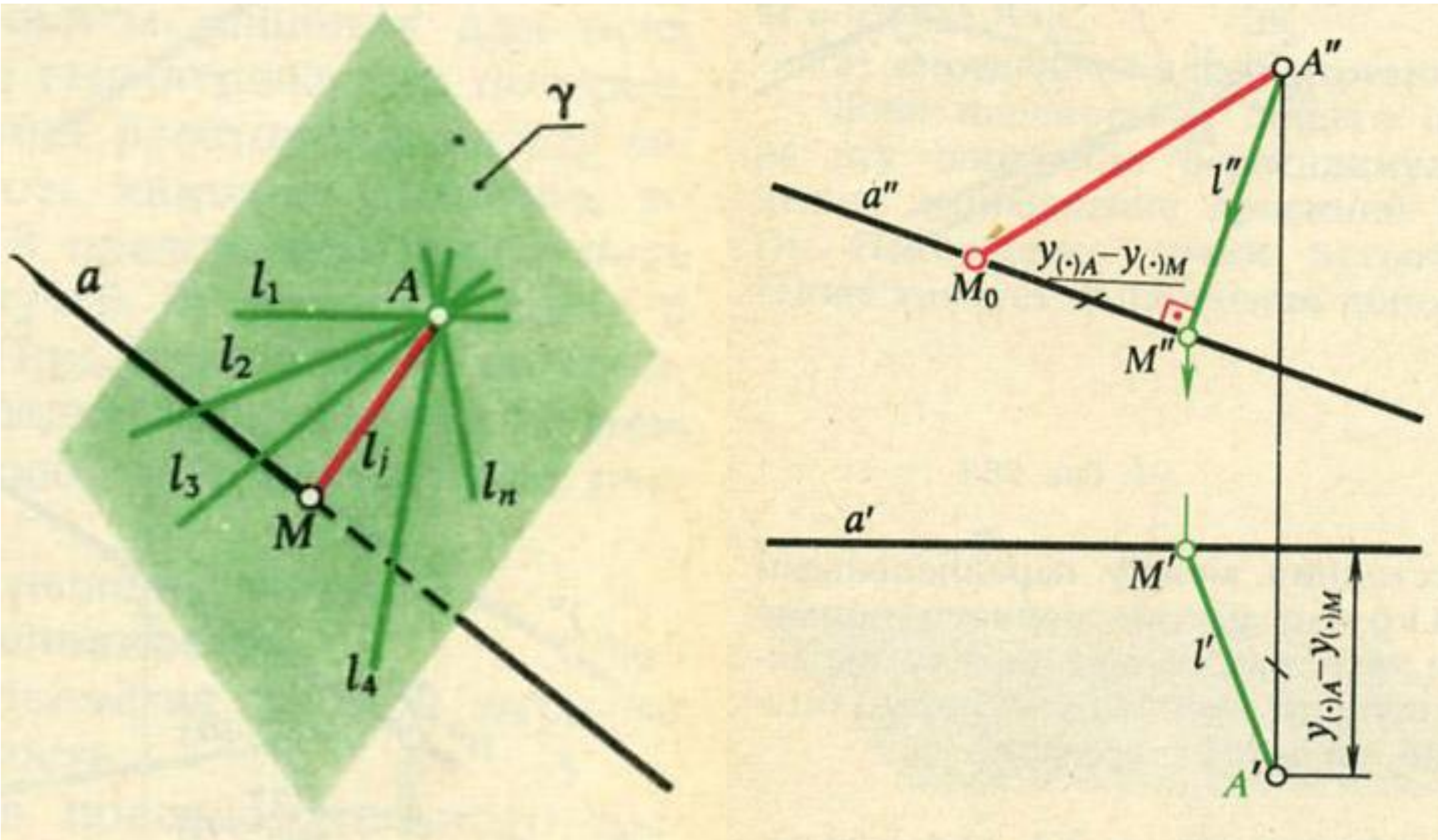
Взаимно перпендикулярные плоскости

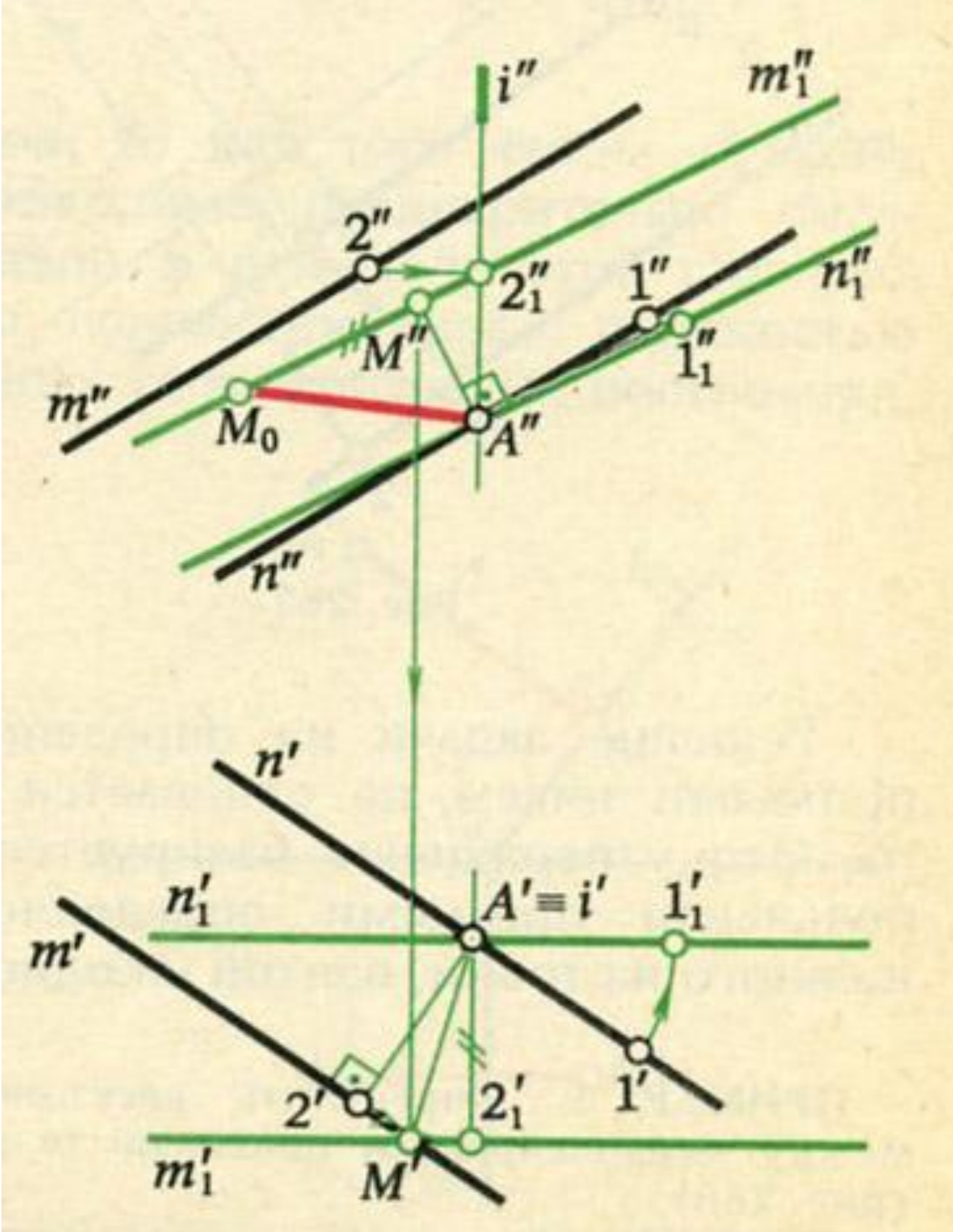


Взаимно перпендикулярные плоскости



Определение расстояния между точкой и прямой, между двумя параллельными прямыми





i''
m_1''
$2''$
$2_1''$
$1''$
n_1''
M''
$1_1''$
m''
M_0
A''
n''
n'
n_1'
$A' \equiv i'$
$1_1'$
m'
$2'$
$2_1'$
$1'$
m_1'
M'

Определение расстояния между точкой и плоскостью, прямой и плоскостью, между плоскостями и скрещивающимися прямыми