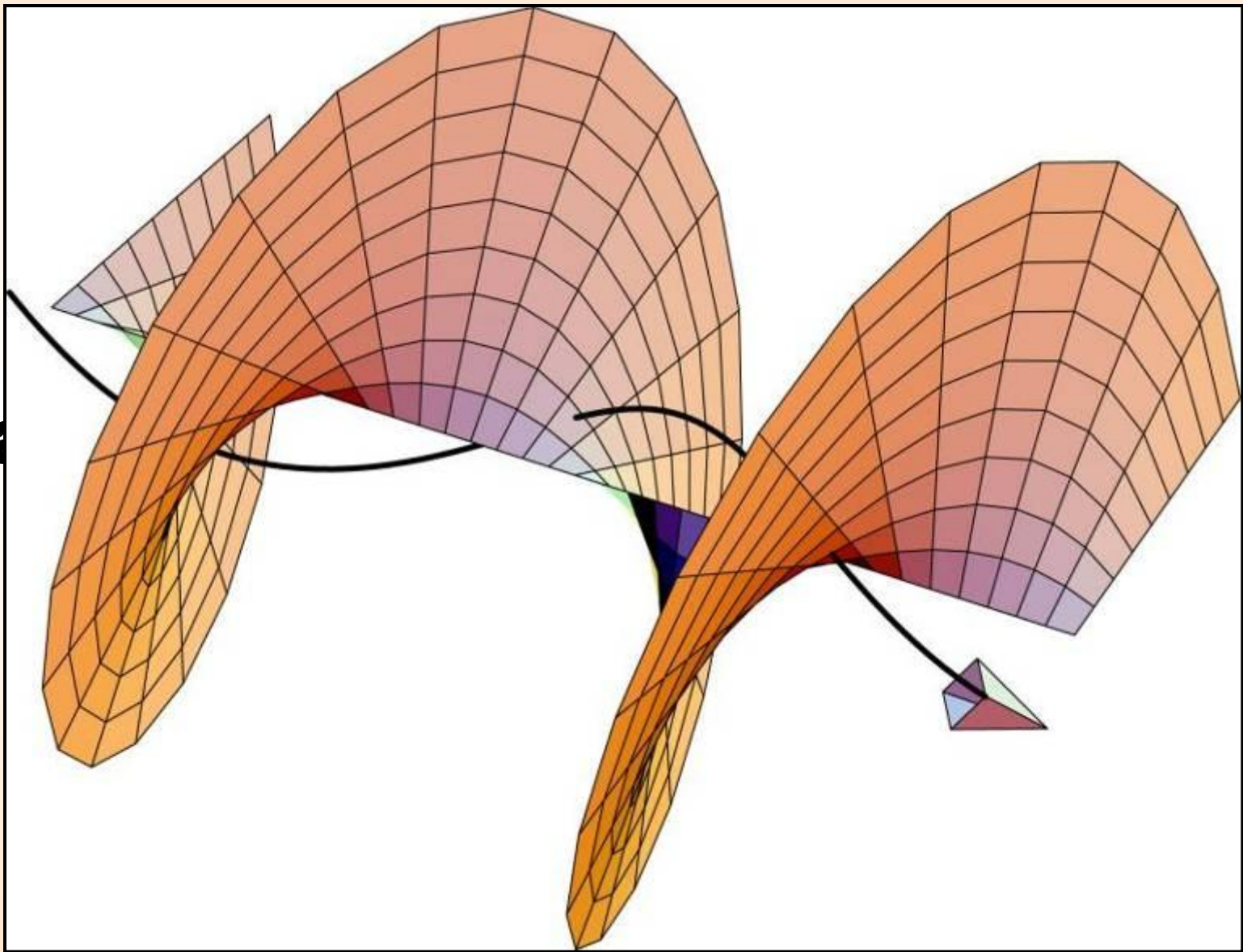


**Колебания и волны.
Геометрическая и волновая оптика**

**Кузнецов Сергей Иванович
доцент кафедры
ОФ ЕНМФ ТПУ**

Pa



Pa

Тема 3.

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ СИЛ НА КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

**3.1 Свободные затухающие
механические
колебания**

**3.2 Коэффициент затухания и
логарифмический декремент затухания**

**3.3 Вынужденные механические
колебания**

3.4 Автоколебания

3.1 Свободные затухающие механические колебания

Все реальные колебания являются затухающими. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний уменьшается.

Сила трения (или *сопротивления*)

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{v}$$

где r – коэффициент сопротивления,
 v – скорость движения

Второй закон Ньютона для затухающих
прямолинейных колебаний вдоль оси x

$$ma_x = -kx - r v_x$$

где kx – возвращающая сила, $r v_x$ – сила трения.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Введем обозначения $\frac{r}{2m} = \beta$; $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.1.1)$$

Решение уравнения (3.1.1) имеет вид (при $\beta \leq \omega_0$)

Решение уравнения (3.1.1) имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.1.2)$$

Найдем *частоту колебаний* ω . ($\omega \neq \omega_0$)

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad \beta \leq \omega_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} ; \quad \beta = \frac{r}{2m} ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

условный период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

3.2 Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

где β – *коэффициент затухания*

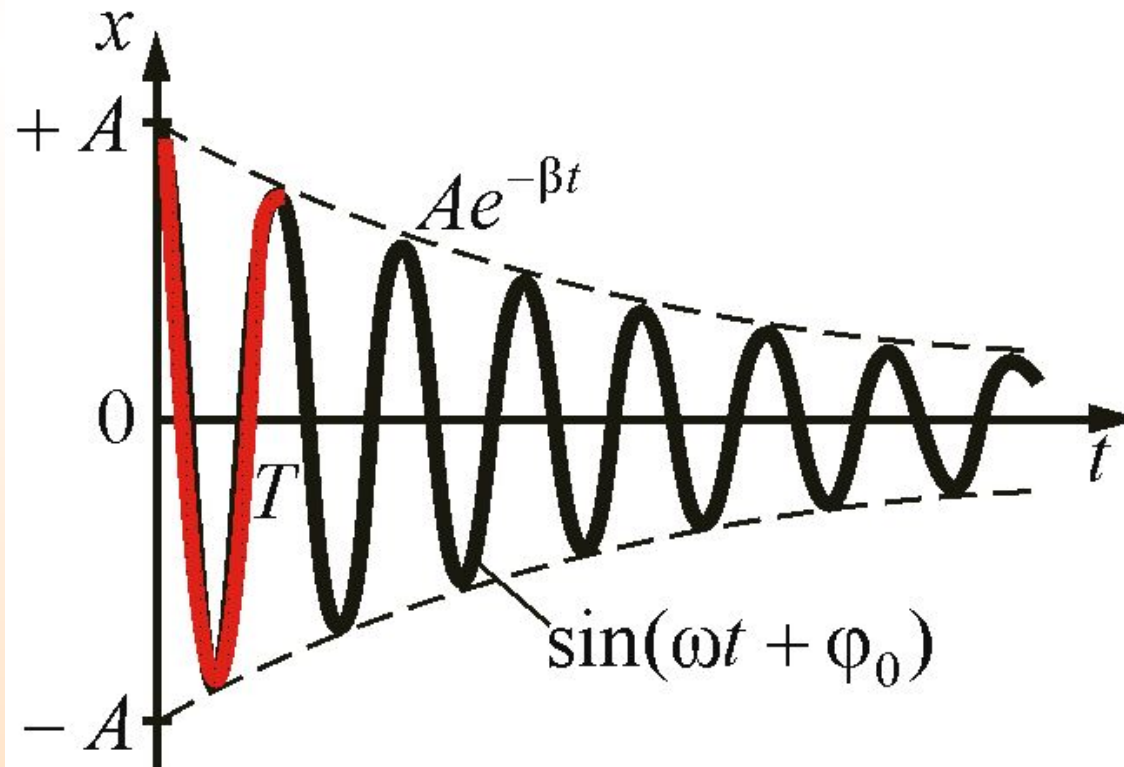


Рисунок 1

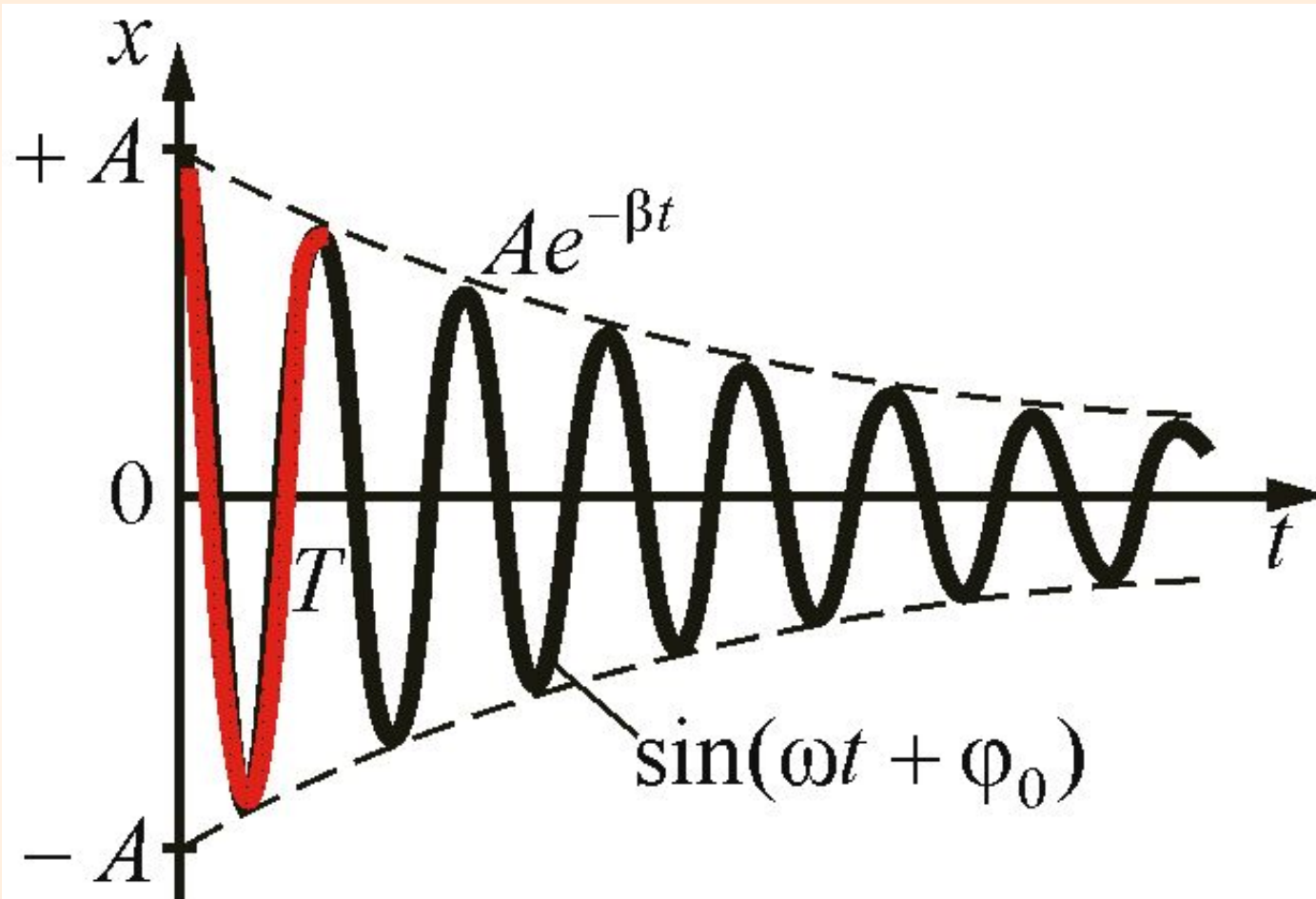
Логарифмическим декрементом затухания

называется **натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период T .**

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T; \quad \boxed{\chi = \beta T}$$

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e^1, \text{ откуда } \beta\tau = 1; \quad \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Следовательно, **коэффициент затухания β** – есть физическая величина, обратная времени, в течение которого **амплитуда уменьшается в e раз**, τ – **время релаксации**.



$$\chi = \beta T$$

$$\beta = \frac{1}{\tau}$$

Когда сопротивление становится равным критическому $r = r_{кр}$, а $\beta = \omega_0$, то круговая частота обращается в нуль ($\omega = 0$), ($T \rightarrow \infty$), колебания прекращаются. Такой процесс называется *апериодическим*:

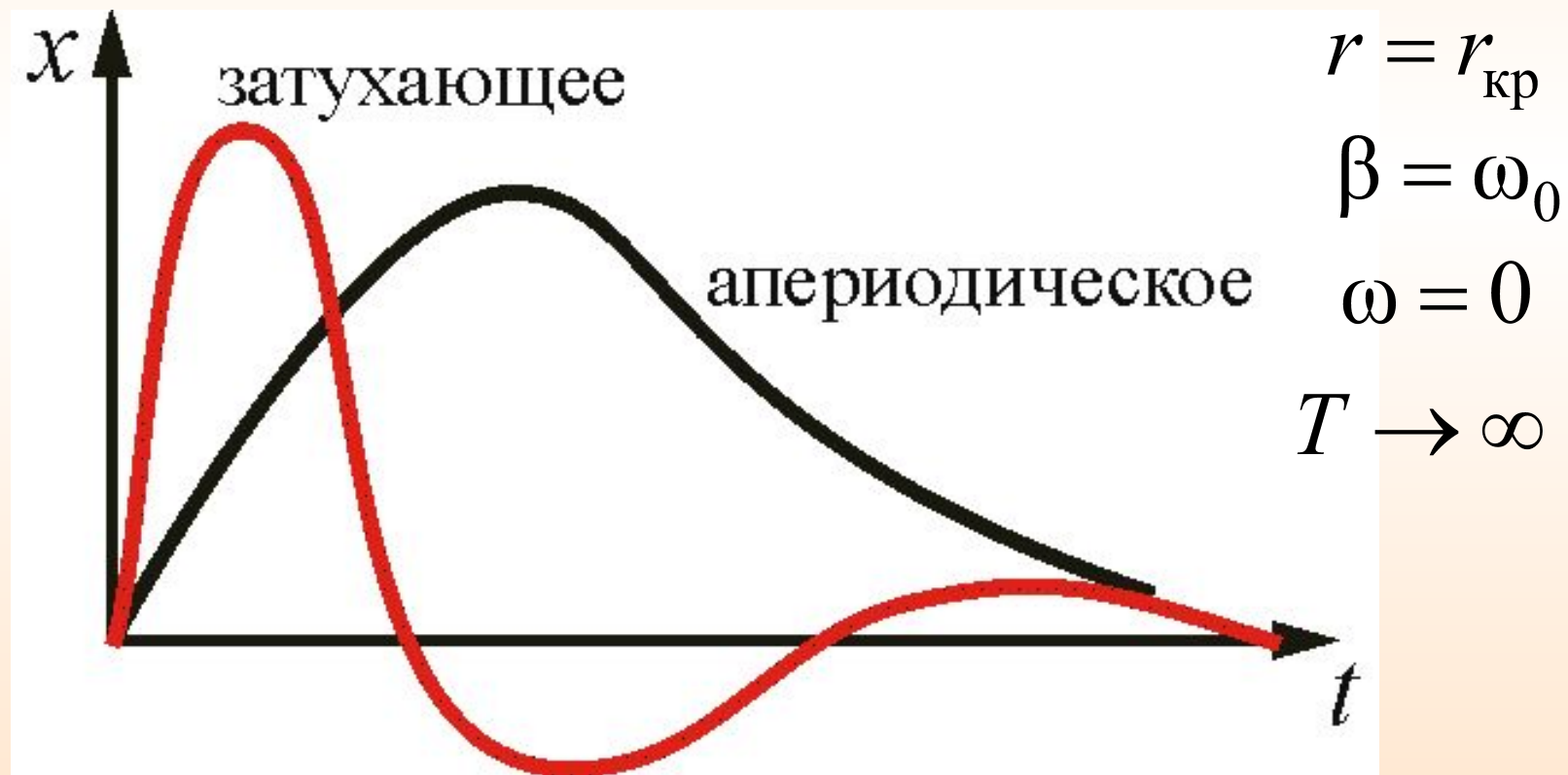


Рисунок 2

Отличия в следующем.

При колебаниях, тело, возвращающееся в положение равновесия, имеет запас кинетической энергии. В случае *апериодического движения* энергия тела при возвращении в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление сил сопротивления трения.

3.3 Вынужденные механические колебания

Рассмотрим систему, на которую кроме *упругой силы* ($-kx$) и *сил сопротивления* ($-rv$) действует добавочная *периодическая сила* F – *вынуждающая сила*:

$$ma_x = -kx - rv_x + F_x$$

– *основное уравнение колебательного процесса*,
при вынужденных колебаниях

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_x \quad (3.3.1)$$

$$F_x = F_0 \cos \omega t.$$

Уравнение установившихся вынужденных колебаний

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.3.2)$$

Наша задача найти амплитуду A и разность фаз φ между смещением вынужденных колебаний и вынуждающей силой.

Введем обозначения:

$A_1 = \omega^2$ – амплитуда ускорения;

$A_2 = 2\beta\omega$ – амплитуда скорости;

$A_3 = \omega_0^2$ – амплитуда смещения;

$A_4 = F_0 / mA$ – амплитуда вынуждающей силы

Вектор амплитуды силы найдем по правилу сложения векторов:

$$\vec{A}_4 = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$$

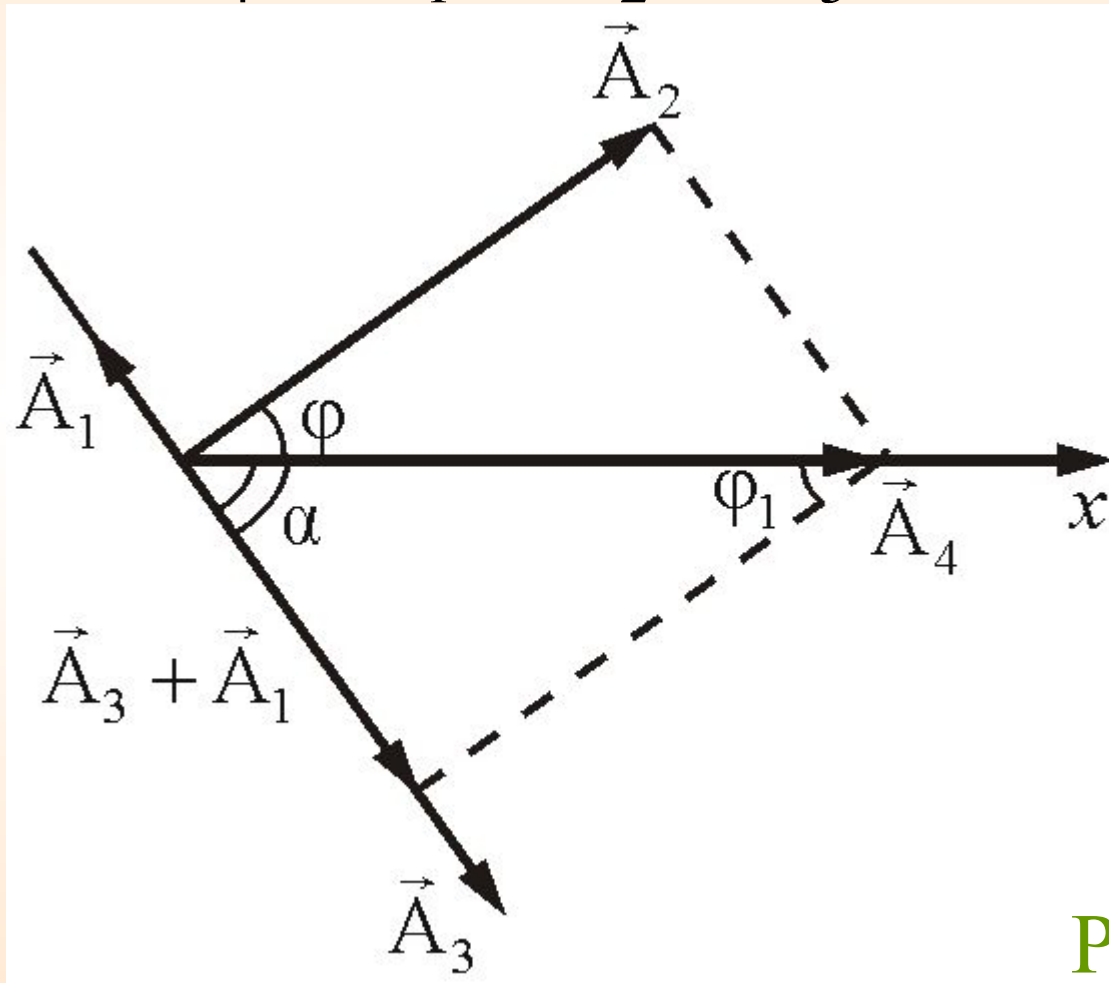


Рисунок 3

Из рисунка 3 видно, что $A_4^2 = (A_3 - A_1)^2 + A_2^2$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (3.3.4)$$

Проанализируем выражение (3.3.4).

1) $\omega = 0$ (частота вынуждающей силы равна нулю)

$$x = F_0 / m\omega_0^2$$

– статическая амплитуда, колебания не совершаются.

2) $\beta = 0$ (затухания нет). С увеличением ω (но при $\omega < \omega_0$), амплитуда растет и при $\omega = \omega_0$, амплитуда резко возрастает ($A \rightarrow \infty$). Это явление называется – **резонанс**. При дальнейшем увеличении ($\omega > \omega_0$) амплитуда опять уменьшается. (Рисунок 4)

3) $\beta \neq 0$. $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ **резонансная частота**

$\omega = \omega_0$ $A \rightarrow \infty$ - явление резонанса

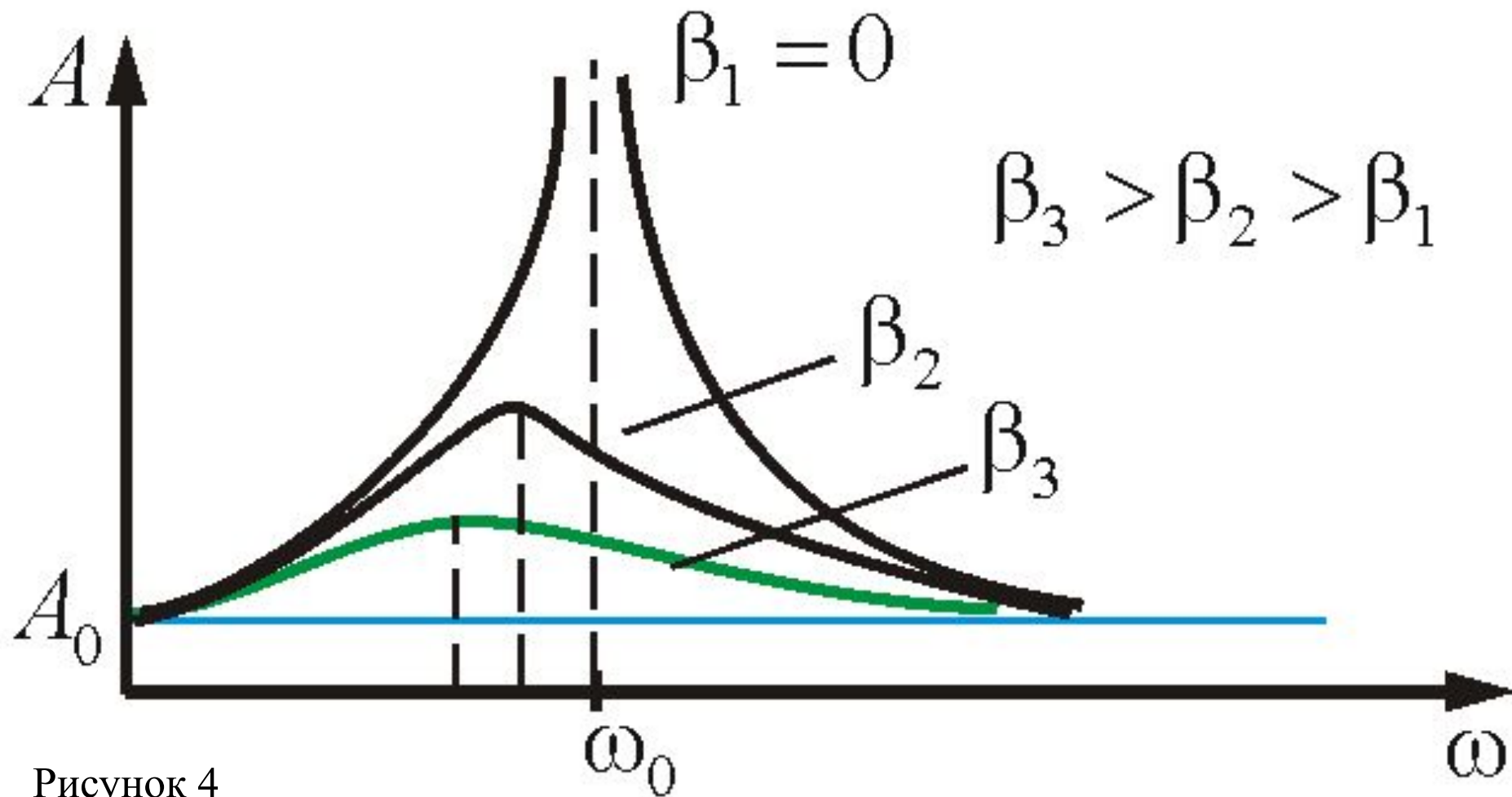


Рисунок 4

$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ — резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \text{ — резонансная частота.}$$

*Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к $\omega_{\text{рез}}$ называется **резонансом**.*

Для консервативной системы, т.е. $\beta = 0$, $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$
для диссипативной $\omega_{\text{рез}}$ несколько меньше
собственной круговой частоты ω_0

С увеличением коэффициента затухания β явление резонанса проявляется все слабее и исчезает при

$$\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

3.4 Автоколебания

Наблюдая колебания листьев деревьев, дорожных знаков над проезжей частью улиц, полотнищ на ветру и др., мы понимаем, что во всех перечисленных случаях незатухающие колебания происходят за счет энергии постоянно дующего ветра.

Классическим примером *автоколебательной системы* служат *механические часы* с маятником и гирями.

Принцип работы всех автоколебательных систем можно понять, обратившись к схеме, изображенной на рисунке 5

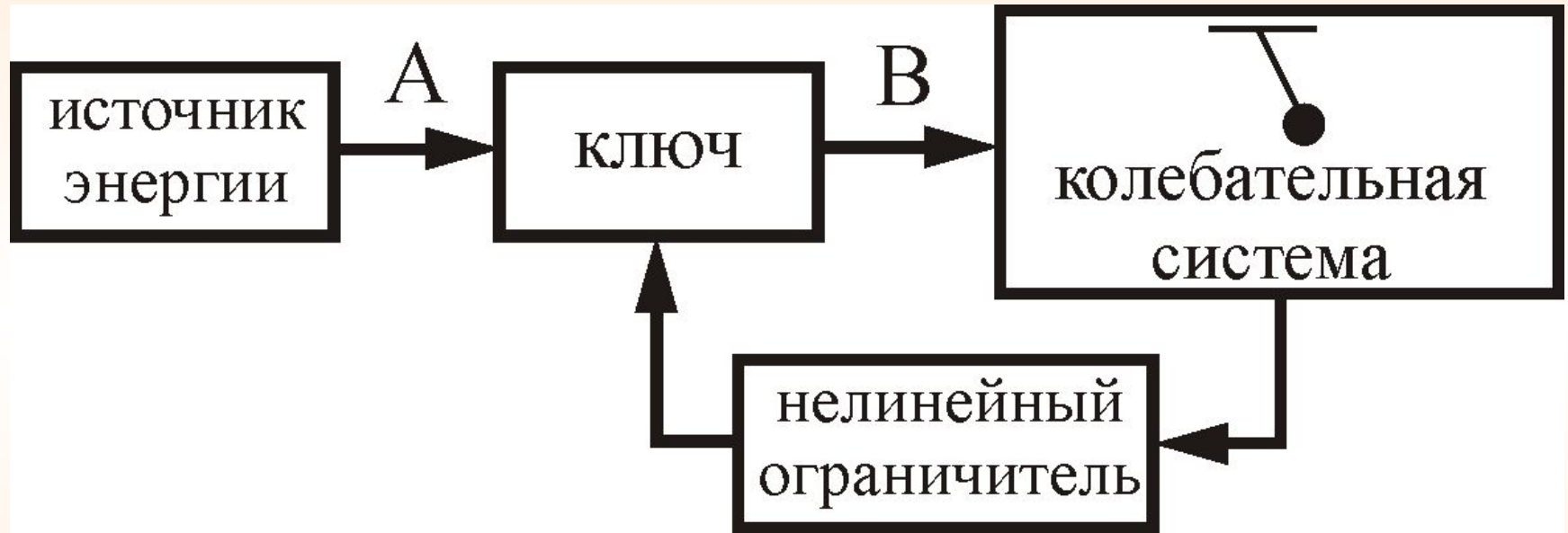


Рисунок 5

Периодическим поступлением энергии в колебательную систему от источника энергии по каналу АВ управляет сама колебательная система посредством обратной связи.

В конструкции часового механизма (рисунок 6) присутствует специальное устройство – анкер, выполняющий роль ключа. Этот анкер, представляющий собой коромысло, приводится в колебание самим маятником часов.

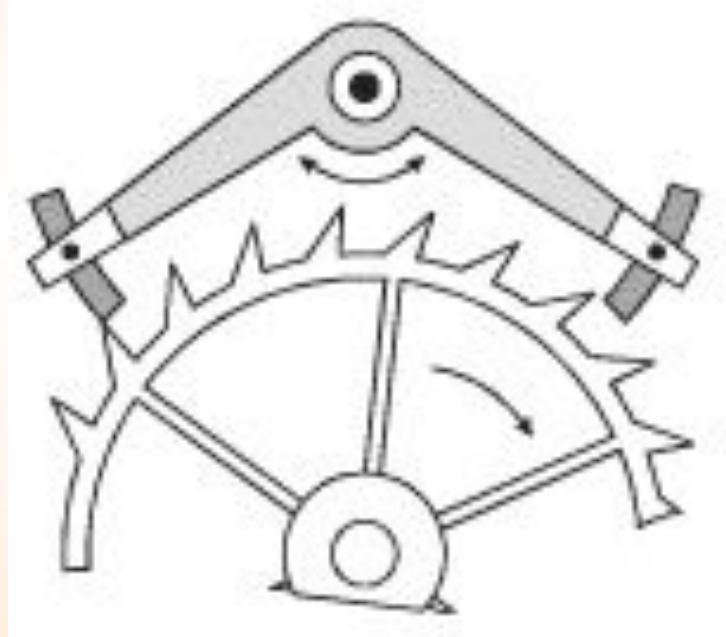
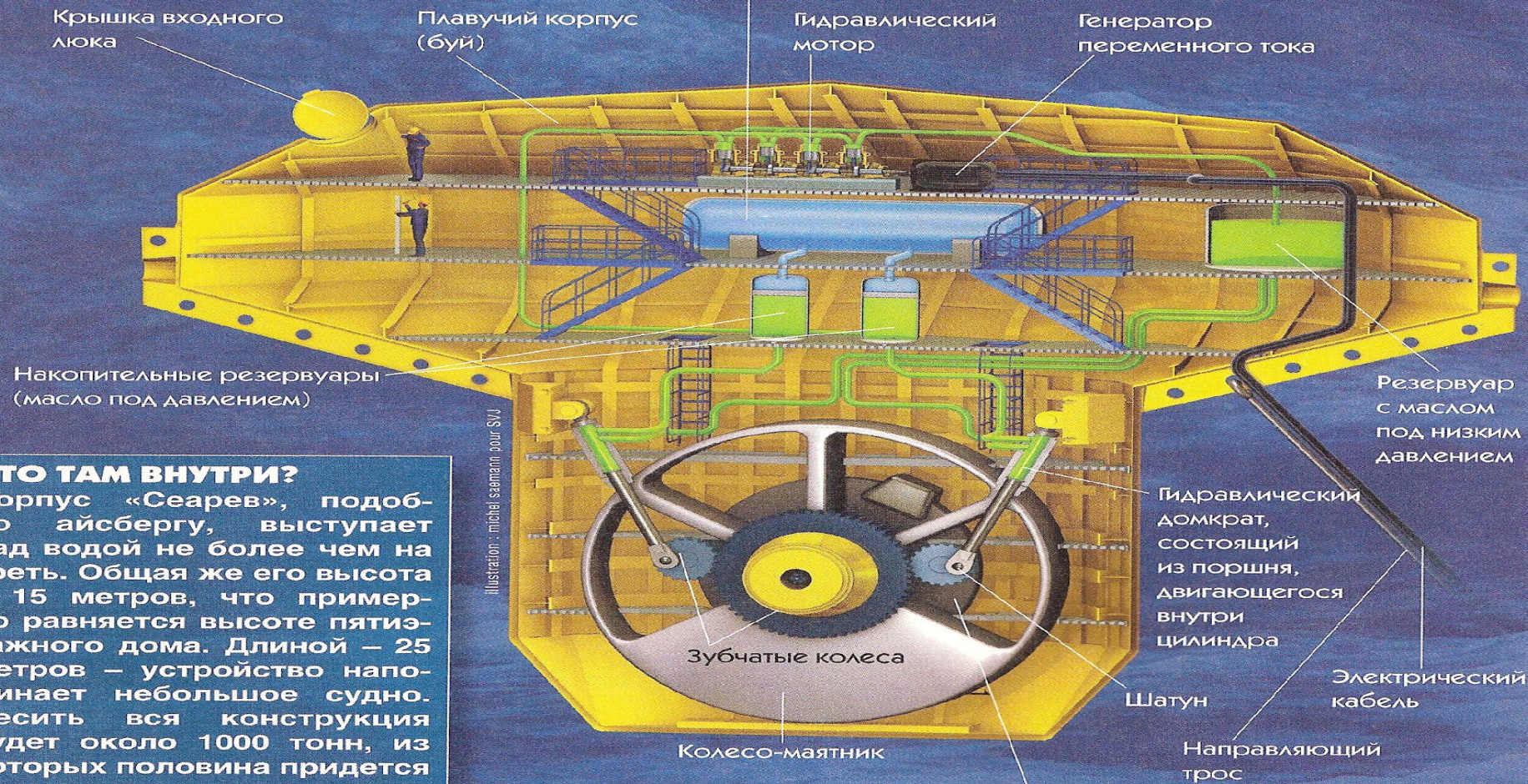


Рисунок 6

Важно отметить, что любая автоколебательная система нелинейна.

РЕЗЕРВУАР С АЗОТОМ

Содержащийся здесь газ нужен для того, чтобы постоянно держать под давлением масло в накопительных резервуарах. Таким образом, в гидравлический мотор непрерывно поступает масло под давлением, что необходимо для бесперебойной работы.



ЧТО ТАМ ВНУТРИ?

Корпус «Сеарев», подобно айсбергу, выступает над водой не более чем на треть. Общая же его высота – 15 метров, что примерно равняется высоте пятиэтажного дома. Длинной – 25 метров – устройство напоминает небольшое судно. Весить вся конструкция будет около 1000 тонн, из которых половина придется на гигантское колесо-маятник, расположенное в нижней части аппарата. Именно благодаря этому колесу электростанция сможет производить достаточно электричества для обеспечения потребности в энергии двух сотен домохозяйств. Электричество передается на сушу с помощью кабеля.

ДИСКОВЫЙ ТОРМОЗ

Дисковый тормоз управляется компьютером, который связан с датчиками, расставленными в разных местах конструкции. Благодаря этим датчикам электроника отслеживает малейшее движение как всего корпуса, так и колеса-маятника. Компьютер включает тормоз, когда колесо достигает самой крайней точки во вращательном цикле. На долю секунды колесо блокируется, чтобы затем начать вращение в противоположном направлении. Цель этой операции – усилить колебания маятника относительно плавучего корпуса, чтобы добыть как можно больше энергии из волн.

КАК ОН РАБОТАЕТ?

Главную роль в производстве электричества играют два элемента конструкции – плавучий корпус и колесо-маятник. Именно смещение корпуса под действием волн дает возможность приводить в движение вал электрогенератора. Вот как это происходит.



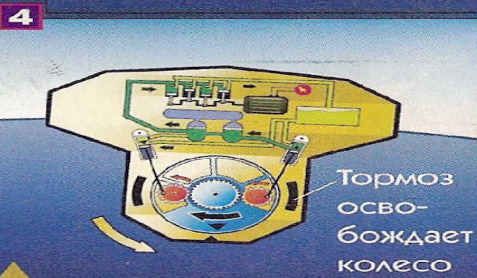
Набегающая волна заставляет «Сеарев» накрениться



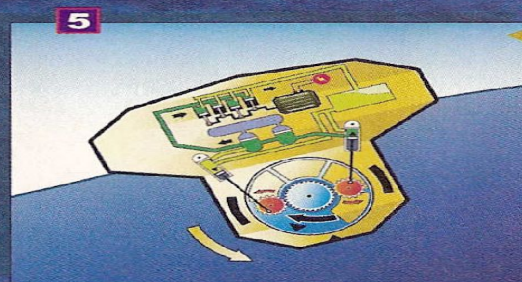
Крен корпуса приводит, в свою очередь, к тому, что колесо-маятник начинает вращаться. Под действием собственного веса маятник качается внутри корпуса. При этом колесо приводит в движение (через систему шестеренок) шатуны, а те заставляют двигаться поршни. Поршень в левом цилиндре поднимается, а в правом, наоборот, опускается.



Посмотри на левый поршень. Поднимаясь, он выталкивает масло в накопительные резервуары, а затем к гидравлическому мотору. Масло попадает в его цилиндры, заставляя двигаться поршни, а те передают свое движение коленчатому валу (коленчатый вал – деталь, преобразующая возвратно-поступательное движение, например, поршня в цилиндре, во вращательное). Коленчатый вал заставляет вращаться вал электрогенератора, и генератор начинает вырабатывать переменный ток (то же самое происходит в электростанциях любого другого типа). Пройдя через гидравлический мотор, масло поступает в резервуар с низким давлением, чтобы быть использованным в новом цикле. А теперь обрати внимание на правый поршень. Пока его «коллега» слева поднимался, правый поршень опускался, освобождая место в своем цилиндре. В результате в правый цилиндр всасывается масло из резервуара с низким давлением. Это масло будет выдвинуто в гидравлический мотор, когда колесо-маятник качнется в другую сторону. Но в данное мгновение колесо-маятник неподвижно. Как только оно достигло крайней точки в этом цикле, его заблокировал дисковый тормоз, управляемый компьютером.

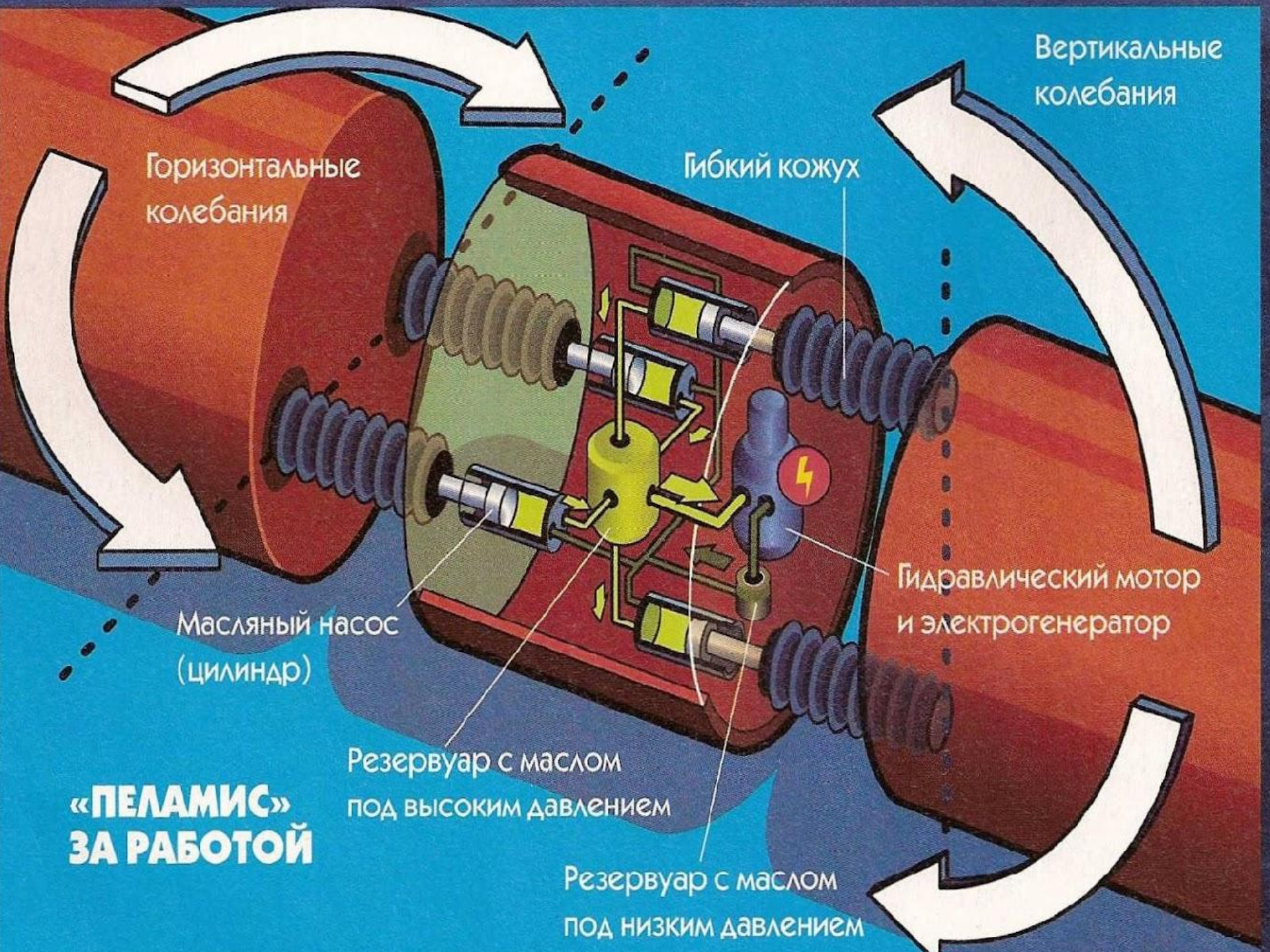


Сейчас «Сеарев» находится на гребне волны. Корпус выпрямляется. Благодаря датчикам компьютер фиксирует это движение и дает команду тормозу освободить колесо-маятник. Теперь оно качнется в другую сторону, заставляя левый поршень опускаться, а правый – подниматься.



На этот раз именно правый поршень толкает масло под давлением к гидравлическому мотору, а левый всасывает в цилиндр масло из резервуара с низким давлением. Колесо-маятник тем временем достигает крайней точки своего колебательного цикла и снова блокируется дисковым тормозом. Со следующей волной колесо-маятник начнет поворачиваться в противоположном направлении. Затем все повторится.





Вертикальные колебания

Горизонтальные колебания

Гибкий кожух

Гидравлический мотор и электрогенератор

Масляный насос (цилиндр)

Резервуар с маслом под высоким давлением

Резервуар с маслом под низким давлением

«ПЕЛАМИС» ЗА РАБОТОЙ



ЛЕКЦИЯ ОКОНЧЕНА!

