

Колебания и волны. Геометрическая и волновая оптика

Кузнецов Сергей Иванович
доцент кафедры
ОФ ЕНМФ ТПУ

Тема 4 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

4.1 Переменный ток

**4.2 Свободные колебания в
электрическом**

**4.3 Свободные затухающие
электрические
колебания**

**4.4 Вынужденные электрические
колебания**

4.5 Работа и мощность переменного тока

4.1 Переменный ток

При рассмотрении электрических колебаний приходится иметь дело с токами, изменяющимися во времени – *переменными токами*:

$$I = I_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа были установлены для постоянного тока. Однако они остаются справедливыми и для мгновенных значений изменяющегося тока.

Электромагнитные сигналы распространяются по цепи со скоростью света c .

- Пусть l – длина электрической цепи.

- Время распространения сигнала в данной цепи

$$t = l / c.$$

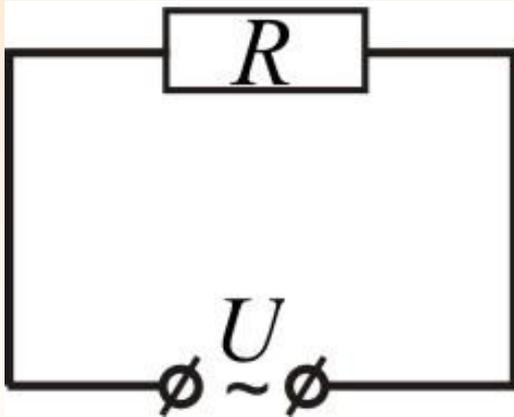
- Если $t \ll T$ такие токи называются **квазистационарными** (T – период колебаний тока).

- При этом условии мгновенное значение силы тока во всех участках цепи будет постоянным.

- Для частоты $f = 50$ Гц условие квазистационарности будет выполняться при длине цепи ~ 100 км.

- Рассматривая в дальнейшем электрические колебания, мы будем считать, что **токи квазистационарны**.

1. Сопротивление в цепи переменного тока

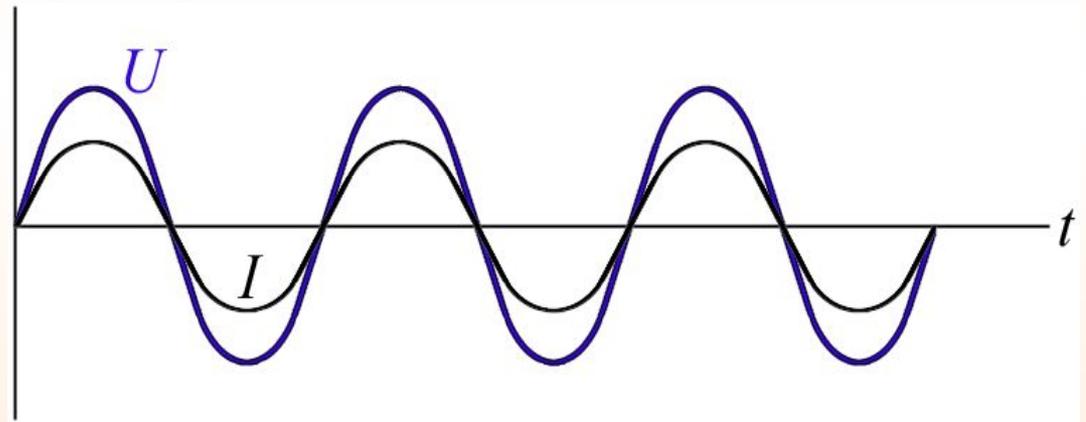


Ток в цепи $I = I_0 \sin \omega t$;

По закону Ома:

*$U = IR = I_0 R \sin \omega t$ - напряжение
изменяется синфазно с током;*

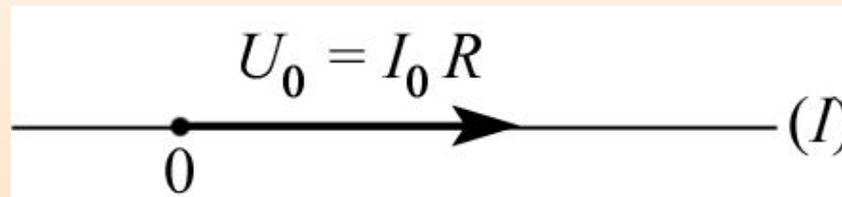
$U_0 = I_0 R$ - амплитуда напряжения.



C, L

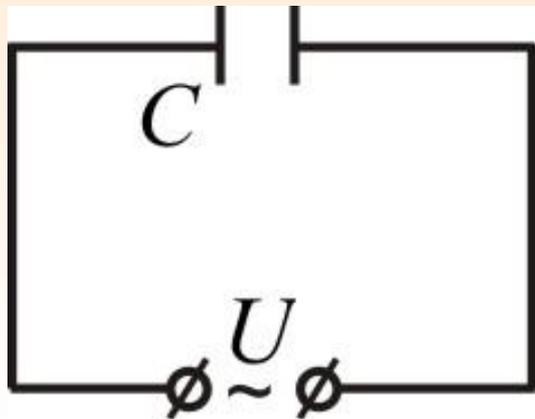
пренебрежимо малы

Векторная диаграмма напряжения на сопротивлении:



2. Емкость в цепи переменного тока

$$R \rightarrow 0, L \rightarrow 0$$



$$R_c = \frac{1}{\omega C}$$

*-кажущееся
сопротивление
емкости*

Ток в цепи: $I = I_0 \sin \omega t,$

По определению $I = \frac{dq}{dt}$

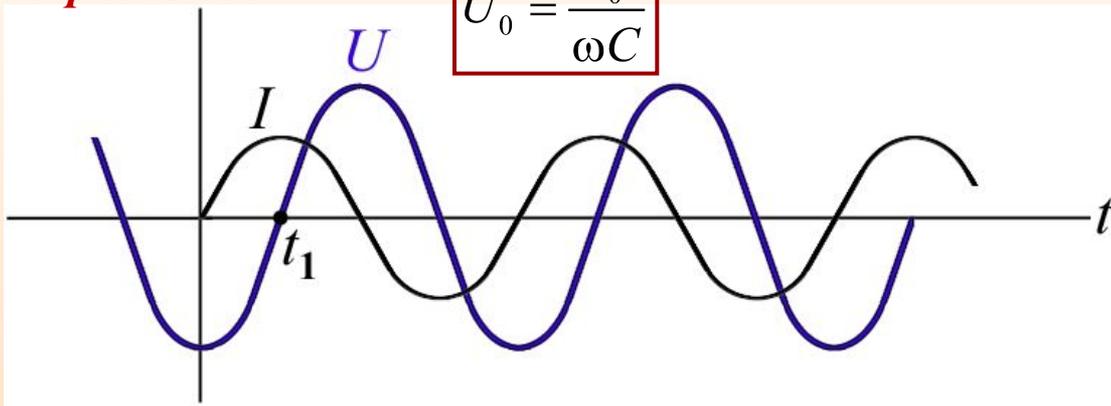
Заряд конденсатора: $q = -\frac{I_0}{\omega} \cos \omega t$

$$U = \frac{q}{C} = -\frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t = \frac{I_0}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

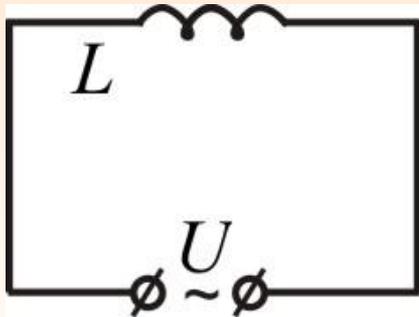
Напряжение отстает по фазе от тока на $\pi/2$

*-амплитуда
напряжения*

$$U_0 = \frac{I_0}{\omega C}$$



3. Индуктивность в цепи переменного тока



Рассмотрим цепь с $R \rightarrow 0$

при наличии переменного тока в катушке возникает **ЭДС самоиндукции**: $\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt}$

По закону Ома для участка цепи с ЭДС:

$$U = IR - \varepsilon_c = -\varepsilon_c$$

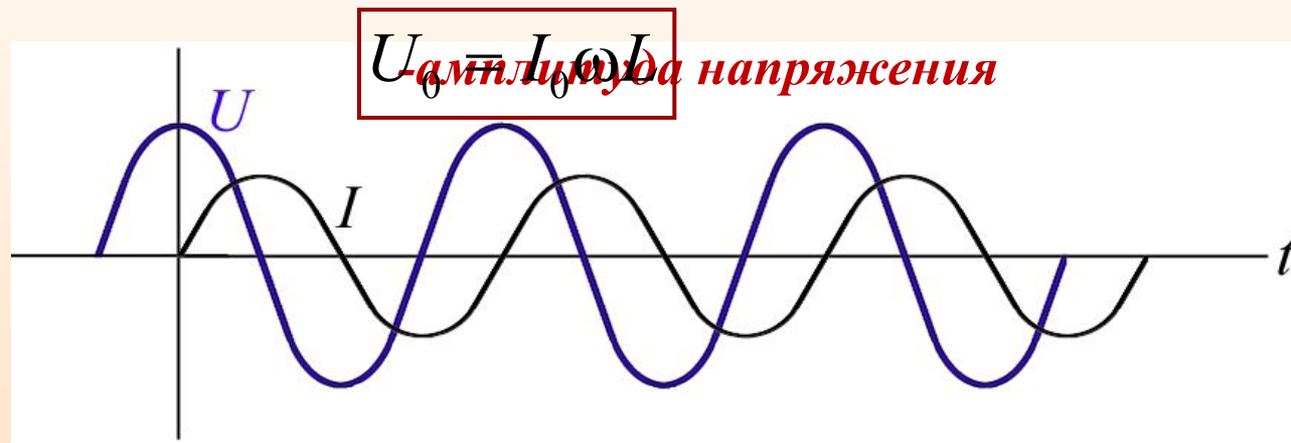
$$R_L = \omega L$$

$$U = L \frac{dI}{dt} = LI_0 \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

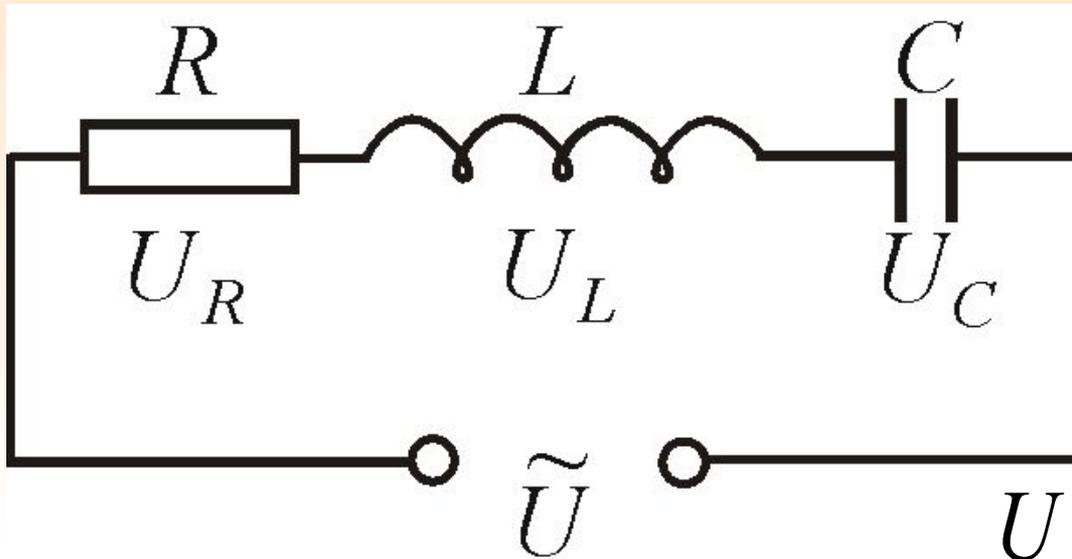
**Кажущееся
сопротивление
индуктивности**

(основа работы
дросселей)

Напряжение опережает по фазе ток на $\pi/2$



4. Закон Ома для переменного тока

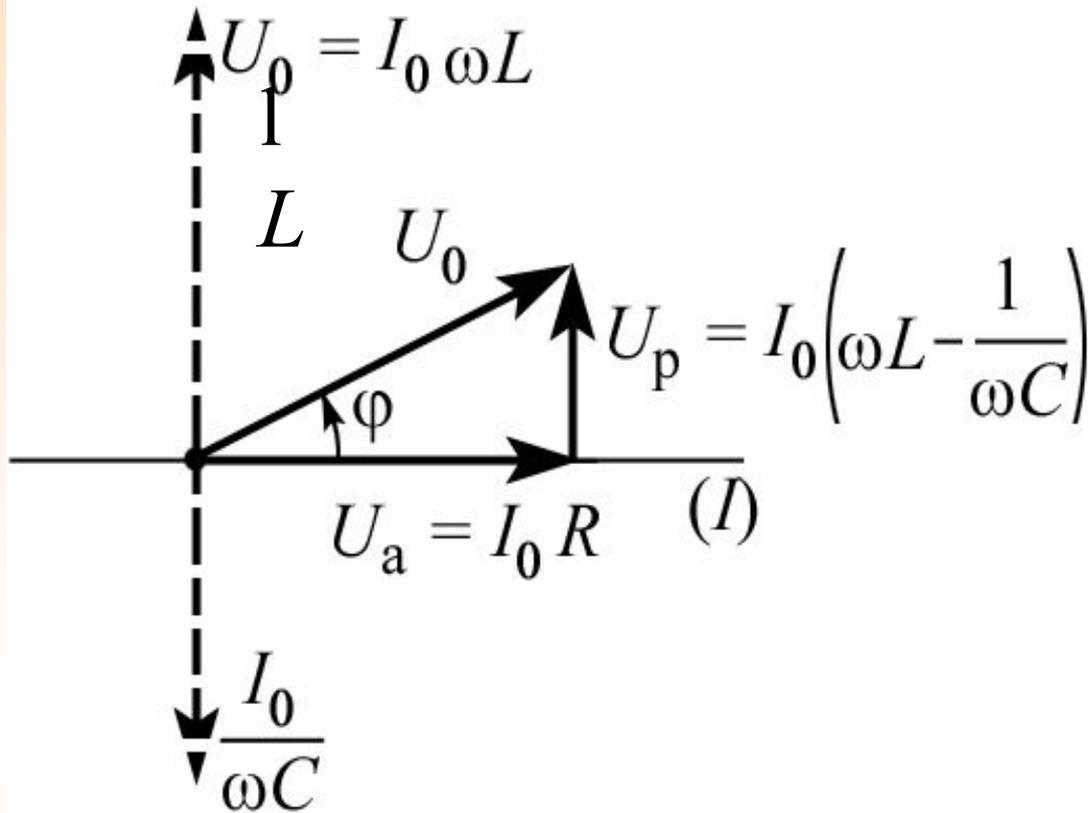


Напряжение при последовательном соединении R, L, C :

$$U = \sum U = U_R + U_C + U_L$$

Сумма $U_{0C} + U_{0L} = U_p = I_0 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$ - реактивная составляющая напряжения

$U_{0R} \equiv U_a = I_0 R$ - активная составляющая напряжения



Результирующее колебание:

$$U = U_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Фаза:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{U_p}{U_a} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Амплитуда напряжения:

$$U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

- закон Ома для переменного тока

Полное сопротивление цепи:

$$R_{\text{полн}} = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

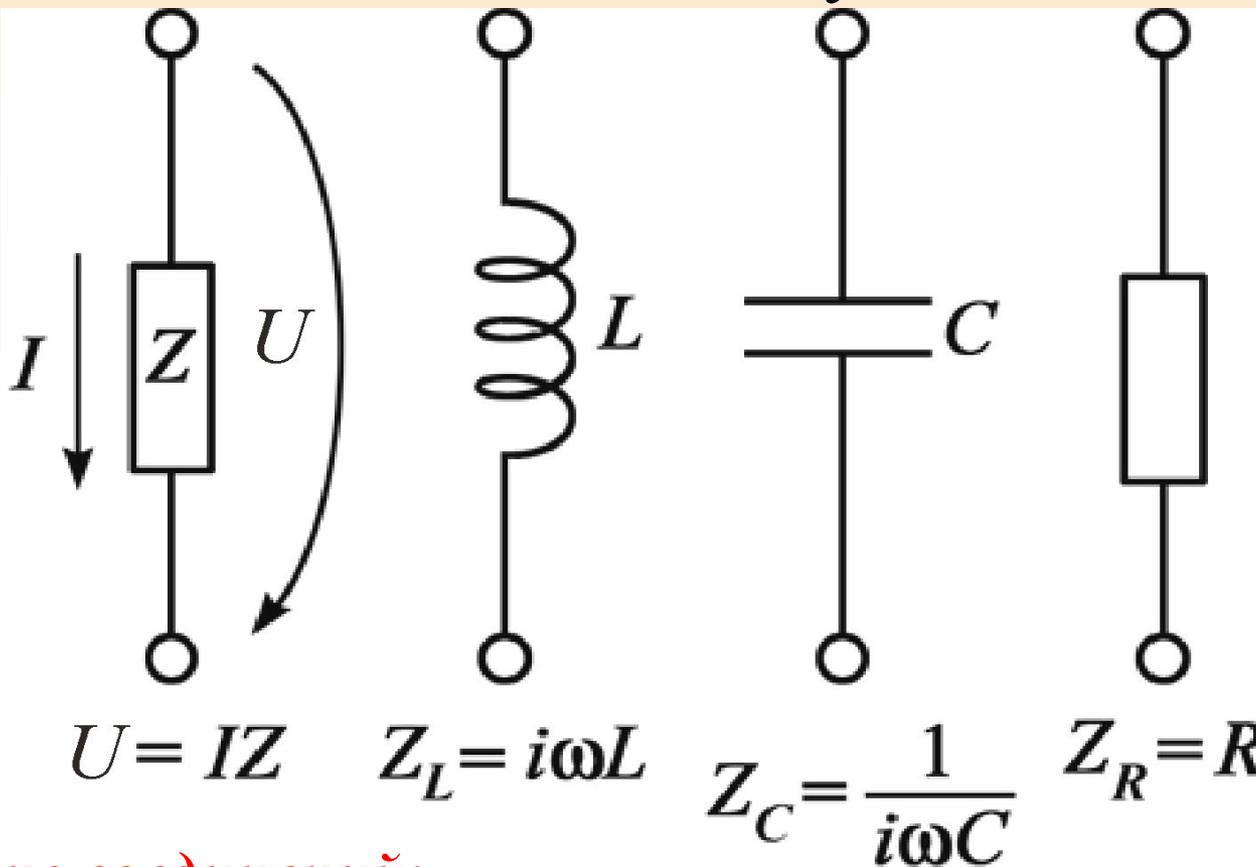
R – ***активное*** (омическое) ***сопротивление***

$$X = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \text{ реактивное сопротивление}$$

R – ***активное сопротивление*** отвечает за потерю мощности в цепи.

X – ***реактивное сопротивление***, определяет величину энергии пульсирующей в цепи с частотой 2ω .

Элементы цепи и соответствующие им *импедансы*:



Импеданс соединений: *Закон Ома в*

комплексной форме - последовательного

$$Z = \sum_k Z_k$$

$\frac{1}{Z} = \sum_k \frac{1}{Z_k}$ - параллельного

$$I = \frac{\varepsilon}{Z} = \frac{\varepsilon}{R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

4.2 Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

Цепь, содержащая индуктивность (L) и ёмкость (C) называется *LC-контуром*.

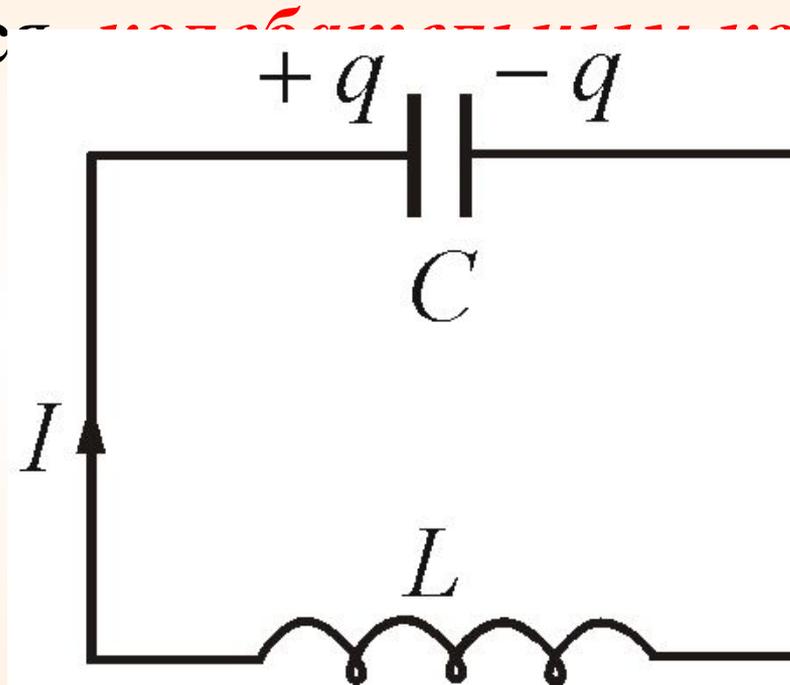
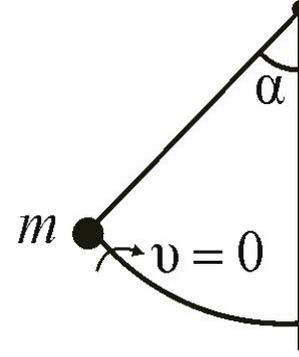
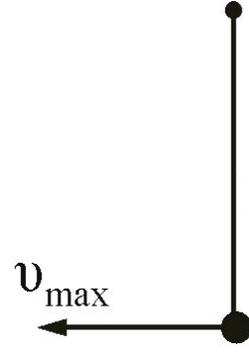
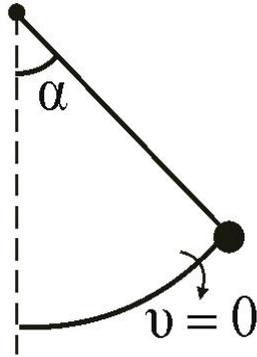
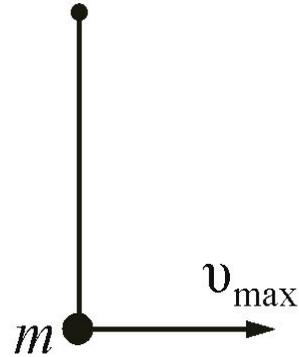
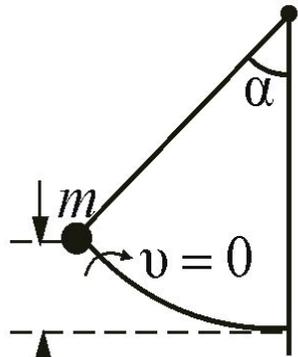


Рисунок 1

Колебания в контуре можно вызвать либо зарядив конденсатор, либо вызвав в индуктивности ток.

Т.к. $R=0$, то полная энергия контура $E=\text{const}$



$$U = mgh$$

$$K = 0$$

$$U = 0$$

$$K = mv^2 / 2$$

$$U = mgh$$

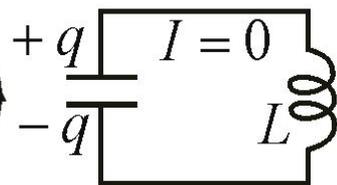
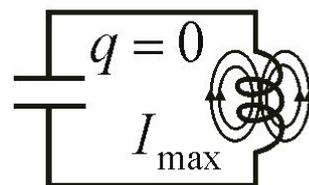
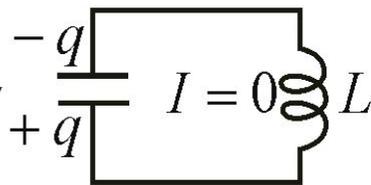
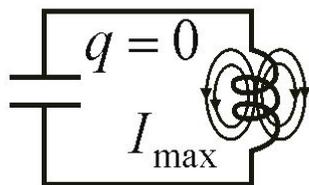
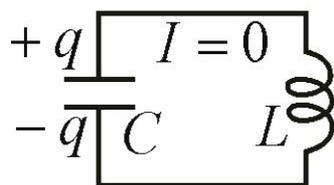
$$K = 0$$

$$U = 0$$

$$K = mv^2 / 2$$

$$U = mgh$$

$$K = 0$$



$$U = q^2 / 2C$$

$$K = 0$$

$$U = 0$$

$$K = LI^2 / 2$$

$$U = q^2 / 2C$$

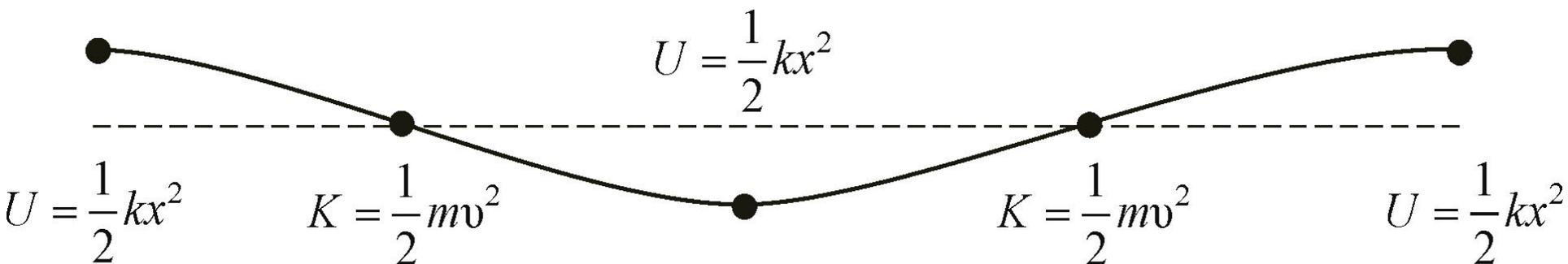
$$K = 0$$

$$U = 0$$

$$K = LI^2 / 2$$

$$U = q^2 / 2C$$

$$K = 0$$



Если энергия конденсатора равна нулю (потенц. энергия), то энергия магнитного поля максимальна (кинетич.) и наоборот...

Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что:

- **энергия электрического поля** $U = \frac{q^2}{2C}$
аналогична потенциальной энергии упругой деформации
- **энергия магнитного поля аналогична кинетической энергии;**
- **Индуктивность L играет роль массы m**
- **$1/C$ – роль коэффициента жесткости k**
- **Заряду q соответствует смещение маятника x**
- **Силе тока $I \sim$ скорость v**
- **Напряжению $U \sim$ ускорение a**

В соответствии с законом Кирхгофа (и законом сохранения энергии)

$$R = 0 \quad \frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt} \quad (4.2.1)$$

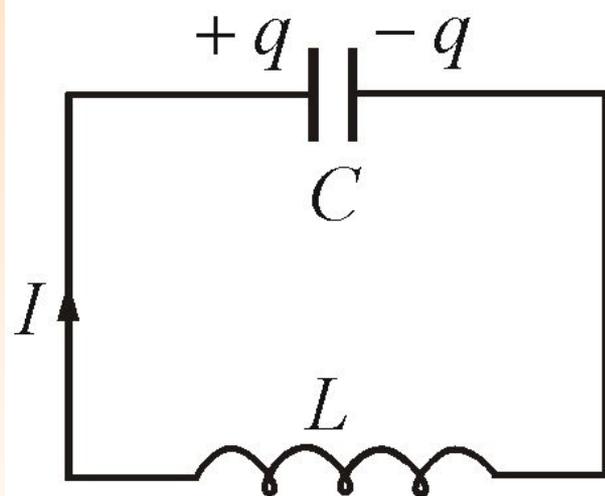
$$I = \frac{dq}{dt}, \quad \mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt}, \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Вновь мы получили **диф. ур. второго порядка:**

$$(4.2.2) \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{Собственная частота контура}$$

Решение уравнения - гармоническая функция:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (4.2.3)$$



$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Таким образом, заряд на обкладке конденсатора **изменяется** по гармоническому закону с частотой ω_0 – *собственная частота контура*.

Период колебаний определяется по **формуле Томсона**:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (4.2.4)$$

$$U = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

*Напряжение
на
конденсаторе*

$$U_m = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}$$

*Закон Ома
для контура*

*– волновое
сопротивл.
[Ом].*

Ток в цепи:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_m = \omega_0 q_m$$

Амплитуда тока

На емкости ток опережает напряжение на $\pi/2$.

На индуктивности наоборот напряжение опережает ток на $\pi/2$.

4.3 Свободные затухающие электрические колебания

Всякий реальный контур обладает *активным сопротивлением* R . Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего колебания затухают.

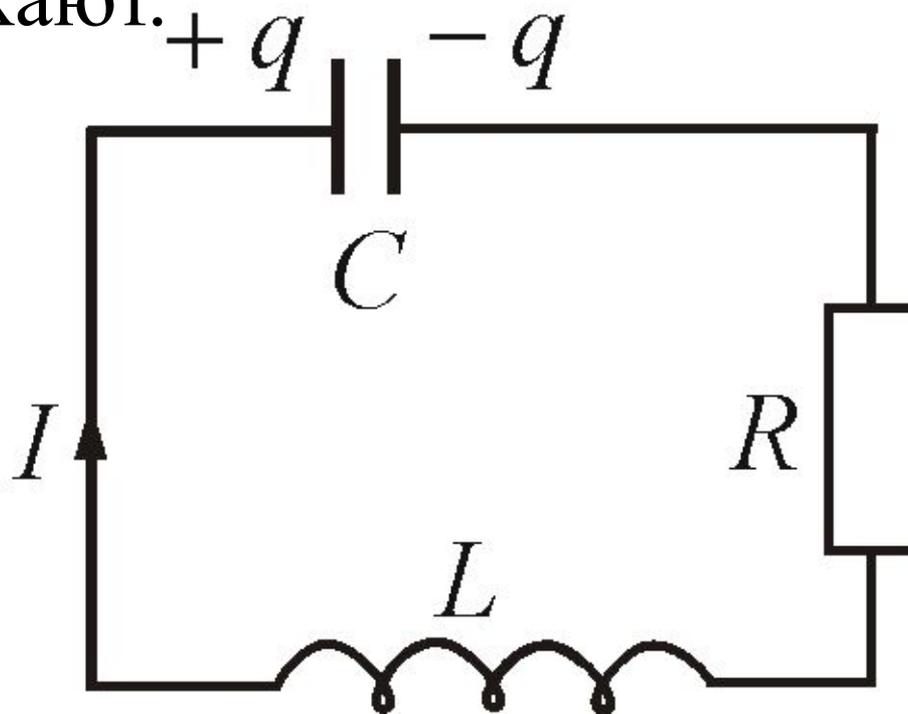


Рисунок 3

По второму закону Кирхгофа $IR + \frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt}$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

Уравнение свободных
затухающих колебаний в
контуре R, L и C

решение этого уравнения имеет вид:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

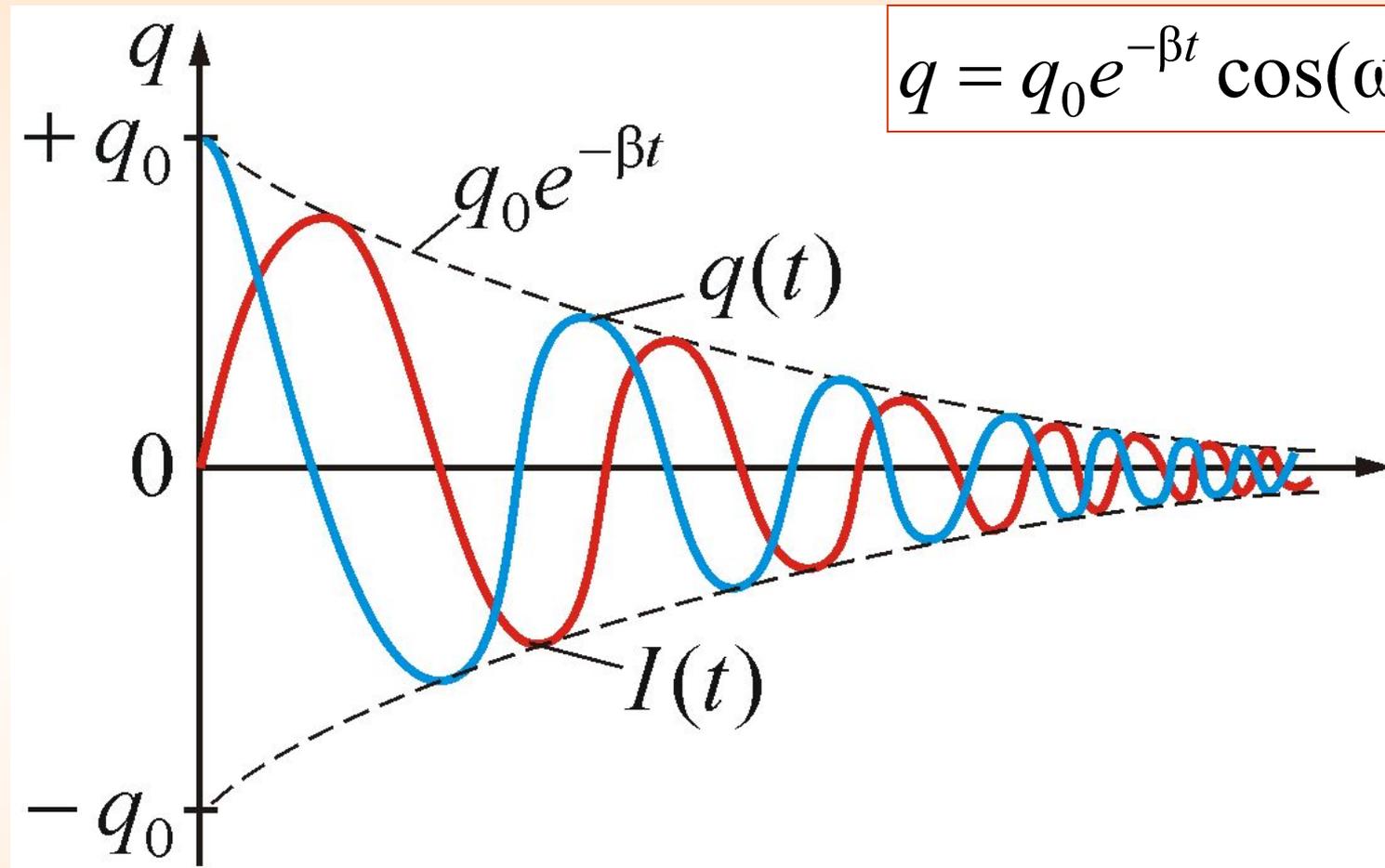
$\beta = R / 2L$, - коэффициент затухания

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - собственная частота контура

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad \text{или} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

*Частота
затухающих
колебаний* ¹⁹

Вид затухающих колебаний заряда q и тока I :



$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

- Колебаниям q соответствует x – смещение маятника из положения равновесия,
- силе тока I – скорость v .

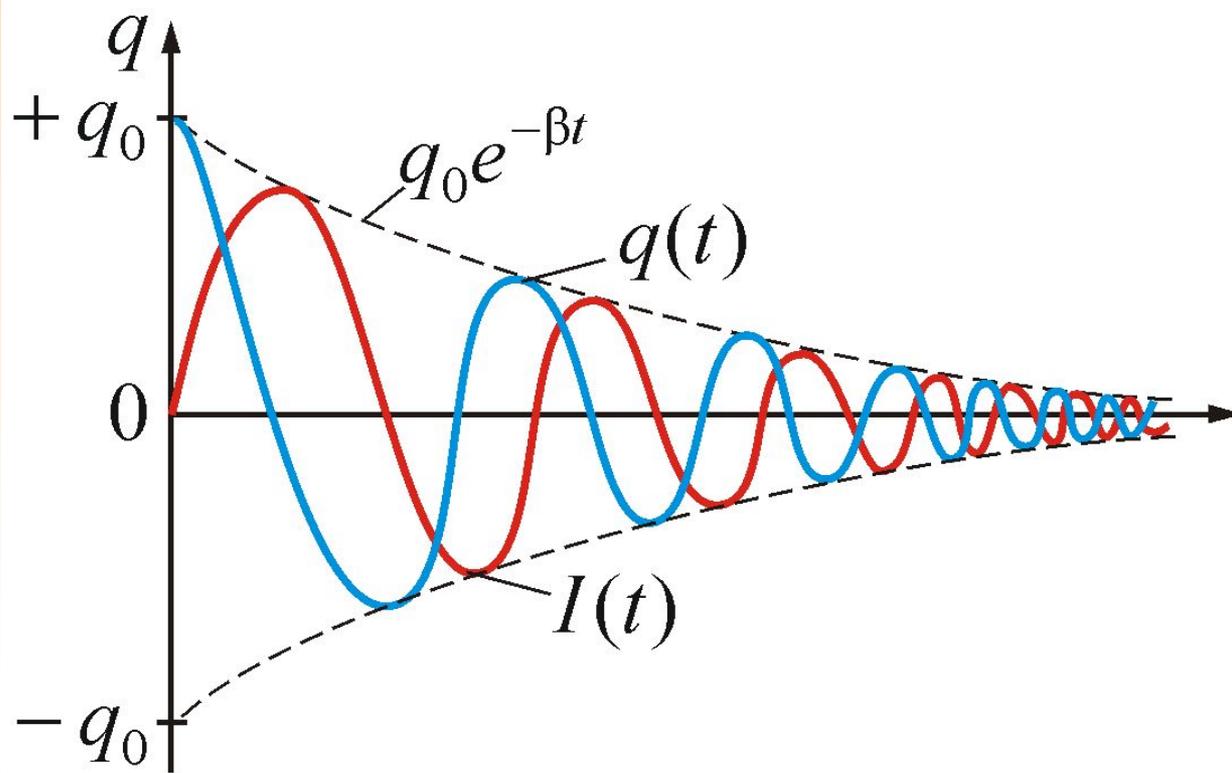


Рисунок 4

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T} \quad \text{Декремент затухания}$$

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

Логарифмический декремент затухания

Т.к. коэффициент затухания $\beta = \frac{R}{2L}$

Период затух. колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$;

Тогда $\chi = \beta T = \frac{\pi R}{L\omega}$

R , L , ω – определяются параметрами контура, следовательно, и χ является характеристикой контура.

Если затухание невелико $\beta^2 \ll \omega_0^2$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\chi = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Добротность колебательного контура Q

определяется как величина обратно пропорциональная χ (*Чем меньше затухание, тем выше добротность*)

$$Q = \frac{\pi}{\chi}$$

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

Время затухания – время за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}$$

Число колебаний совершаемых за время затухания

$$\chi = \frac{1}{N_e}$$

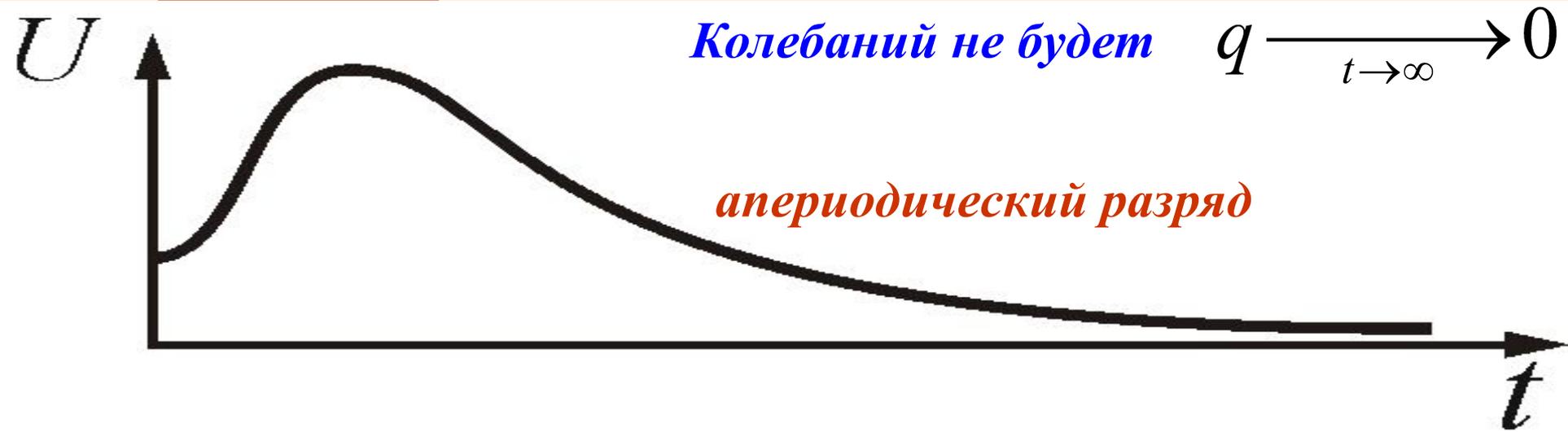
то

$$Q = \pi N_e$$

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}$$

W – энергия контура в данный момент,
 ΔW – убыль энергии за один период, следующий за этим моментом

При $\beta^2 \geq \omega_0^2$, т.е. при $R^2 / 4L^2 \geq 1 / LC$ ($T \rightarrow \infty$):



Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в аперiodический, называется *критическим сопротивлением*:

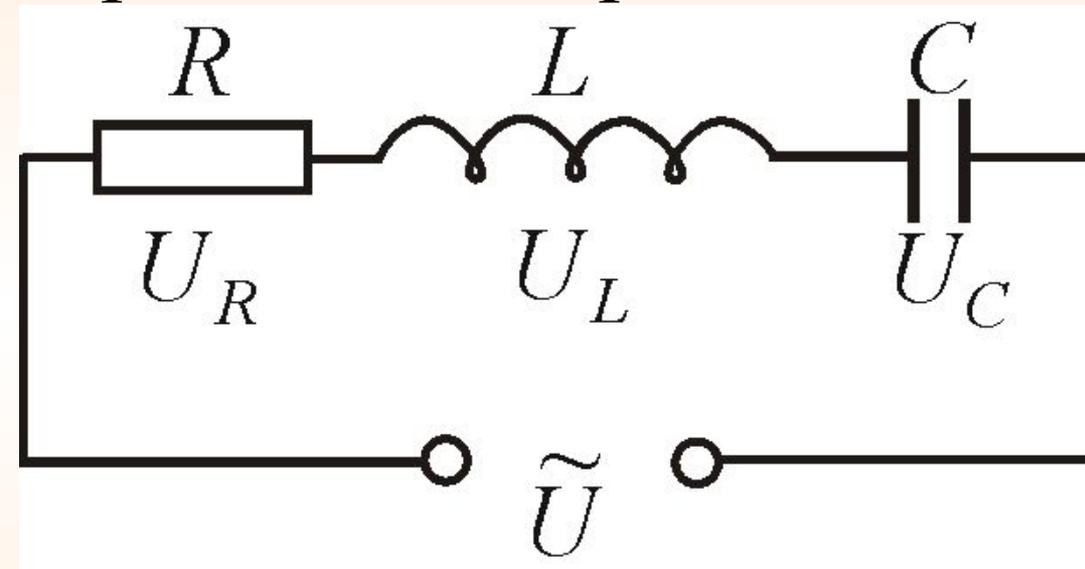
$$\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$$

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2R_{\text{волн}}$$

*Критическое
сопротивление*

4.4 Вынужденные электрические колебания

К контуру, изображенному на рис. подадим переменное напряжение U : $U = U_m \cos \omega t$ (4.4.1)



$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t \quad (4.4.2)$$

уравнение вынужденных электрических колебаний

совпадает с вынужденными механическими колебаниями.

Это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением механических колебаний.

Решение уравнения при больших t :

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi)$$

(4.4.3)

Здесь амплитуда колебаний заряда:

$$q_m = U_m / \omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = U_m / \omega \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$$

Как мы уже говорили величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

называется **полным сопротивлением цепи** (**импеданс**)

а величина

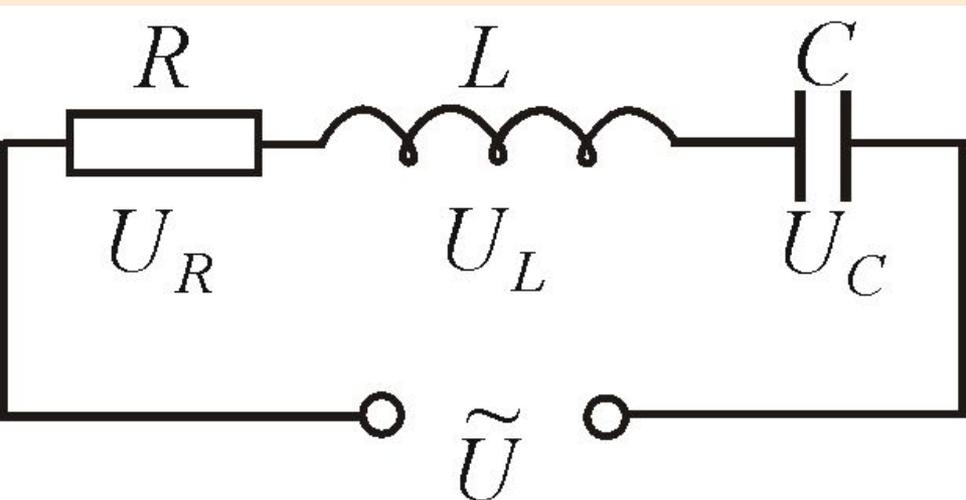
$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

– **реактивным сопротивлением.**

R – активное сопротивление отвечает за потерю мощности в цепи.

X – реактивное сопротивление, определяет величину энергии пульсирующей в цепи с частотой 2ω .

Резонанс напряжений (последовательный резонанс)



При последовательном соединении R, L, C , при

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

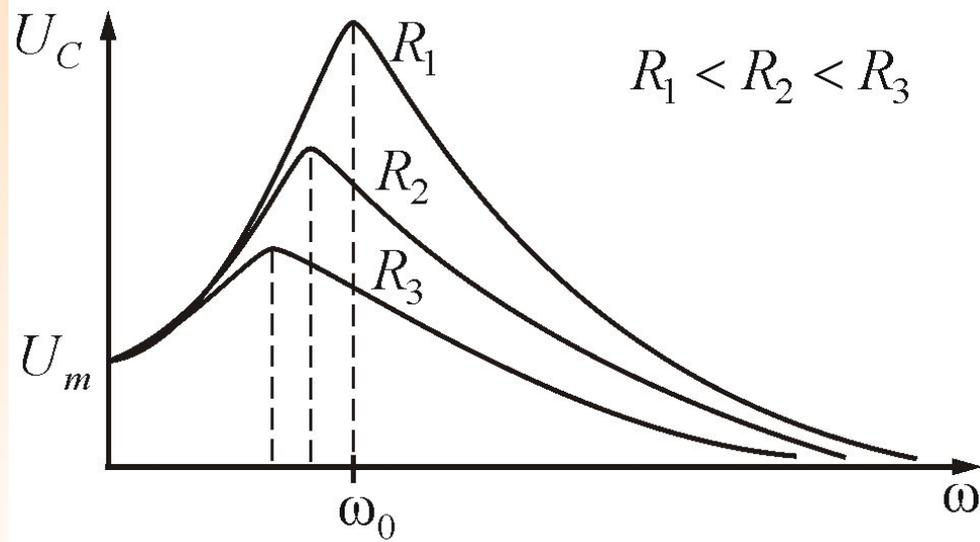
– наблюдается **резонанс**.

При этом угол сдвига фаз между током и напряжением обращается в нуль ($\varphi = 0$) и

$$Z = R$$

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Тогда $U = U_R$, а U_C и U_L одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Такой вид резонанса называется **резонансом напряжений** или **последовательным резонансом**.



$$U_{L \text{ рез}} = U_{C \text{ рез}} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_m = Q U_m$$

Таким образом, *при последовательном резонансе*, на ёмкости можно получить напряжение с амплитудой

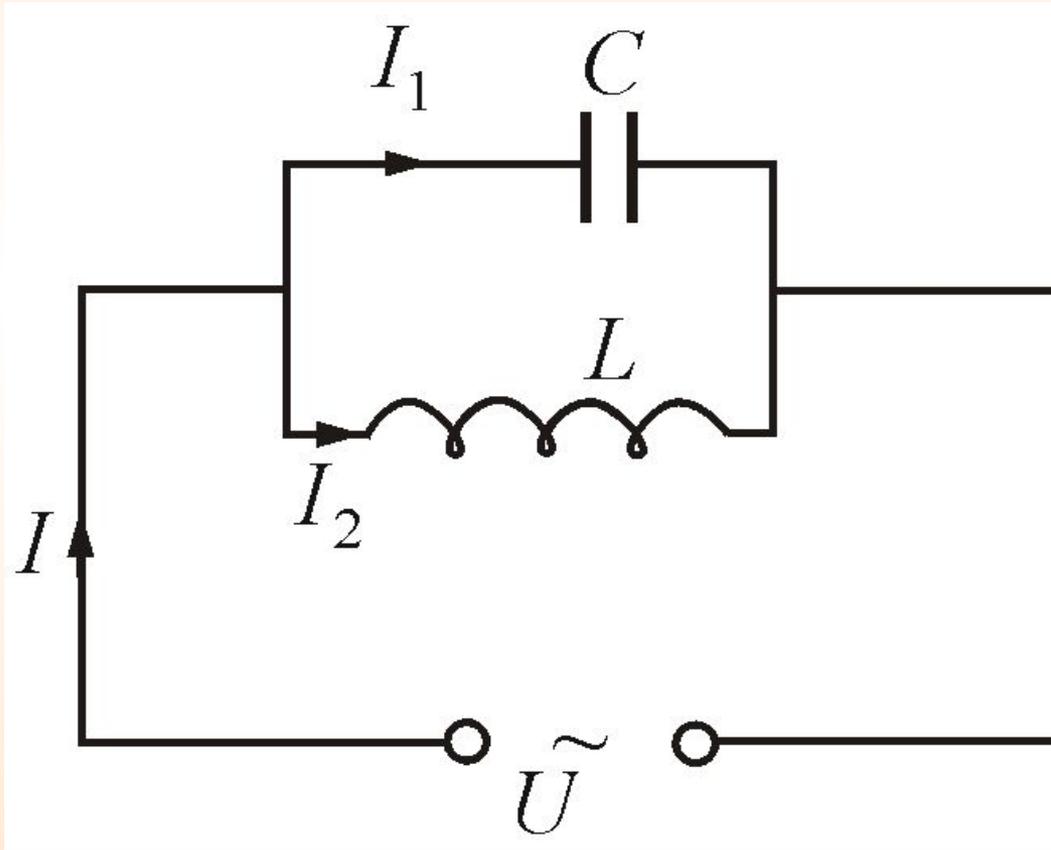
$$QU \gg U$$

в узком диапазоне частот.

Этот эффект *широко используется в различных усилительных устройствах.*

Резонансом токов параллельный резонанс.

В цепях переменного тока содержащих параллельно включенные ёмкость и индуктивность наблюдается **другой тип резонанса:**



$$I_1 = I_{m1} \cos(\omega t - \varphi_1)$$

$$I_2 = I_{m2} \cos(\omega t - \varphi_2)$$

$$\omega \rightarrow \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$$

$$I_m \rightarrow 0$$

$$I_{mL} \rightarrow \infty$$

При $R = 0, L = 0$: $I_1 = I_{m1} \cos(\omega t - \varphi_1)$ (4.4.6.)

$$I_{m1} = \frac{U_m}{1/\omega C} \quad \text{тг } \varphi_1 = -\infty \quad \text{т.к. } \varphi_1 = (2n + 3/2)\pi,$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$

Аналогично, при $R = 0, C = \infty$: $I_2 = I_{m2} \cos(\omega t - \varphi_2)$ (4.4.7)

$$I_{m2} = U/\omega L \quad \text{тг } \varphi_2 = +\infty, \quad \text{т.е. } \varphi_2 = (2n + 1/2)\pi$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$$

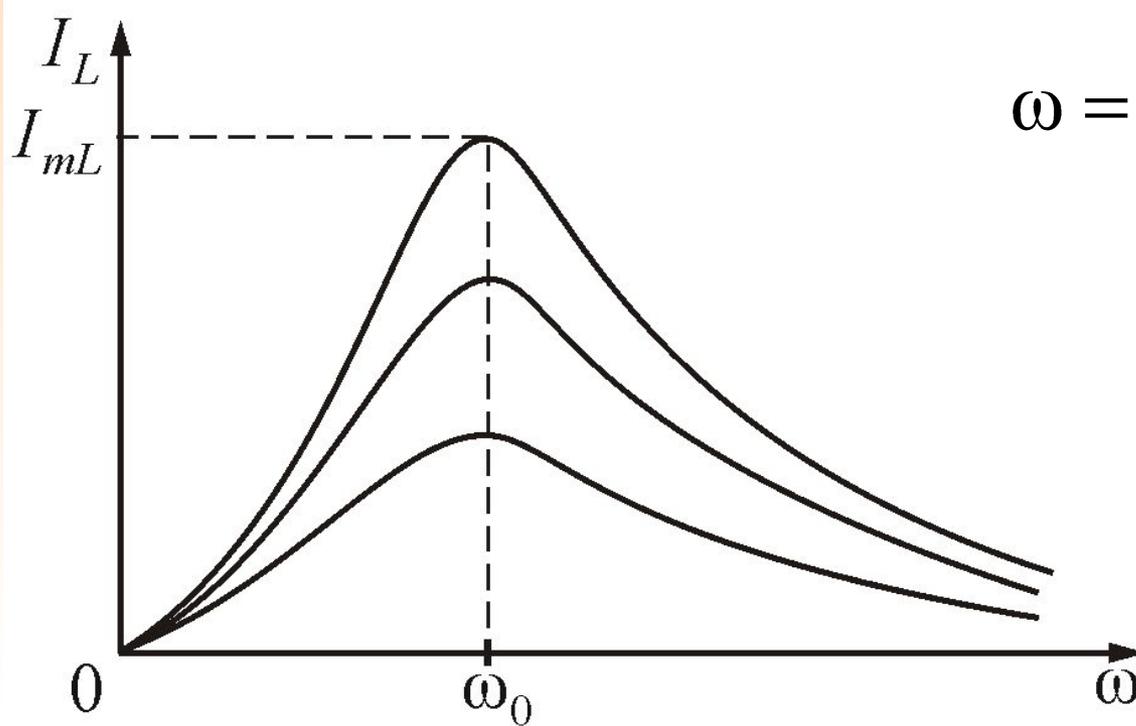
Из сравнения (4.4.6) и (4.4.7) вытекает, что разность фаз в ветвях цепи $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ т.е. токи противоположны по фазе

$$I_m = |I_{m1} - I_{m2}| = U_m \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right| \quad (4.4.8)$$

$$\text{Если } \omega = \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\text{то } I_{m1} = I_{m2} \quad \text{и} \quad I_m \rightarrow 0$$

Ёмкость конденсатора можно подобрать так, что **в результате резонанса ток в подводящих цепях резко уменьшается, зато ток через индуктивность возрастёт**



$$\omega = \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Явление уменьшения амплитуды тока во внешней цепи и резкого увеличения тока в катушке индуктивности, при приближении частоты приложенного напряжения ω к $\omega_{\text{рез}}$ называется **резонансом токов**, или **параллельным резонансом**

(Используется в резонансных усилителях, приемниках, а также в **индукционных печах** для разогрева металла)₃₃

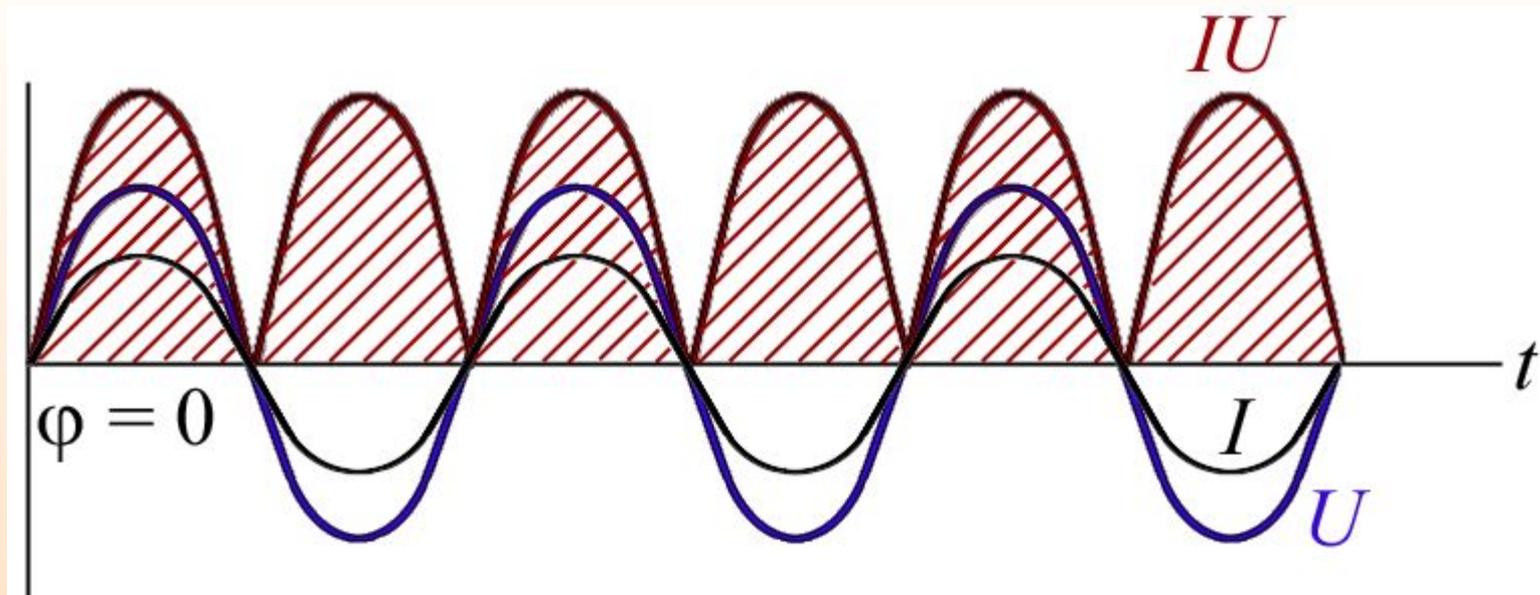
4.5 Работа и мощность переменного тока

1. При наличии только активного сопротивления:
(вся работа переходит в тепло):

Напряжение на концах участка цепи: $U = U_0 \sin \omega t$

Переменный ток в цепи: $I = I_0 \sin \omega t$

Мгновенное значение мощности: $P_t = IU = I_0 U_0 \sin^2 \omega t$



Работа переменного тока за dt :

$$A = P_t dt = I_m U_m \sin^2 \omega t dt$$

Работа переменного тока за период T :

$$A = \frac{1}{2} I_m U_m T$$

Средняя мощность $\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_m^2$$

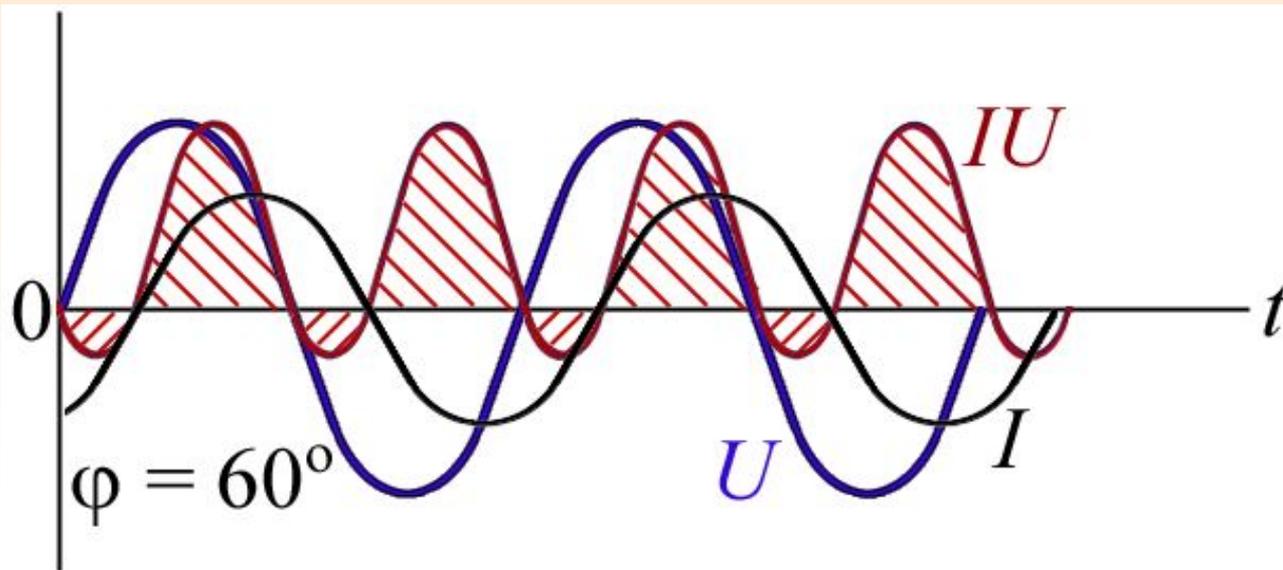
Действующие (или эффективные) значения тока и

напряжения:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

При наличии реактивного сопротивления



- колебания
мгновенной
мощности с
переменной знака
(средняя
мощность
уменьшается)

Работа переменного тока за период T : $A = \frac{1}{2} I_m U_m T \cos \varphi$

Средняя мощность: $\langle P \rangle = \frac{A_T}{T} = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi$

$\cos \varphi$ - коэффициент мощности.

При $\cos \varphi = 0$ $P = 0$

ЛЕКЦИЯ ОКОНЧЕНА!

