

**Колебания и волны.
Геометрическая и волновая оптика**

**Кузнецов Сергей Иванович
доцент кафедры
ОФ ЕНМФ ТПУ**

Тема 5 УПРУГИЕ ВОЛНЫ

5.1 Распространение волн в упругой среде

**5.2 Уравнение плоской и сферической
волны**

5.3 Фазовая скорость

**5.4 Принцип суперпозиции. Групповая
скорость**

5.5 Стоячие волны

5.6 Волновое уравнение

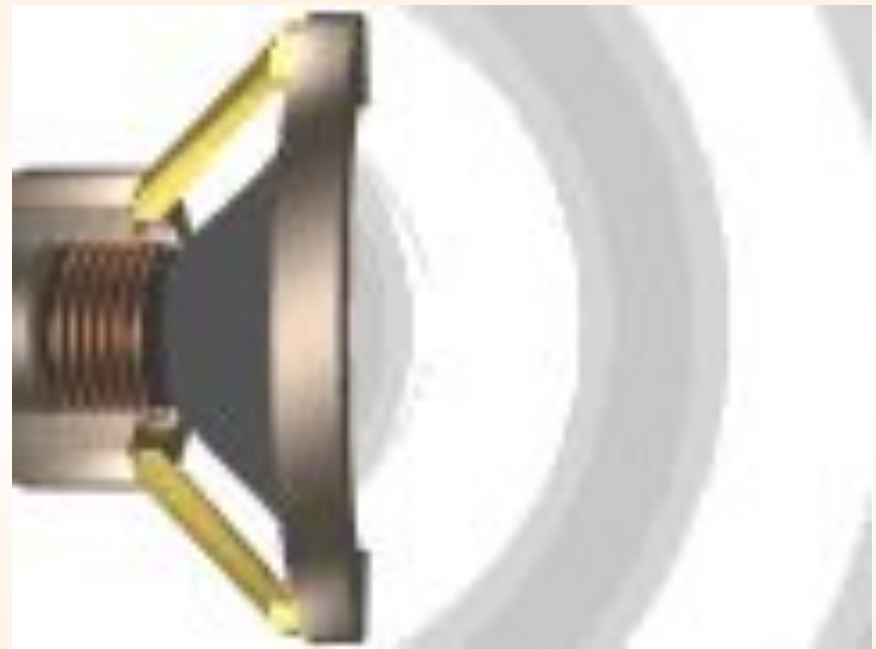
5.7 Эффект Доплера

5.1 Распространение волн в упругой среде

Колеблющееся тело, помещенное в упругую среду, является источником колебаний, распространяющихся от него во все стороны.



Круговая волна на поверхности жидкости, возбуждаемая точечным источником



Генерация акустической волны громкоговорителем.

Процесс распространения колебаний в пространстве называется волной

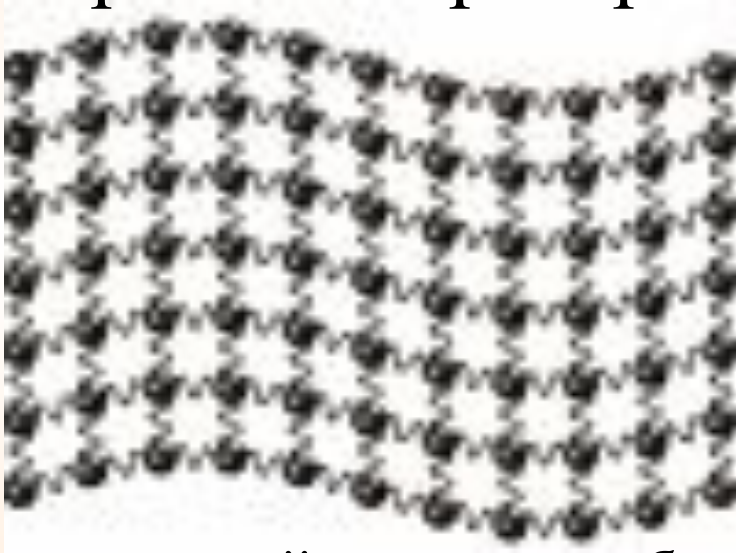
При распространении волны, частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия.



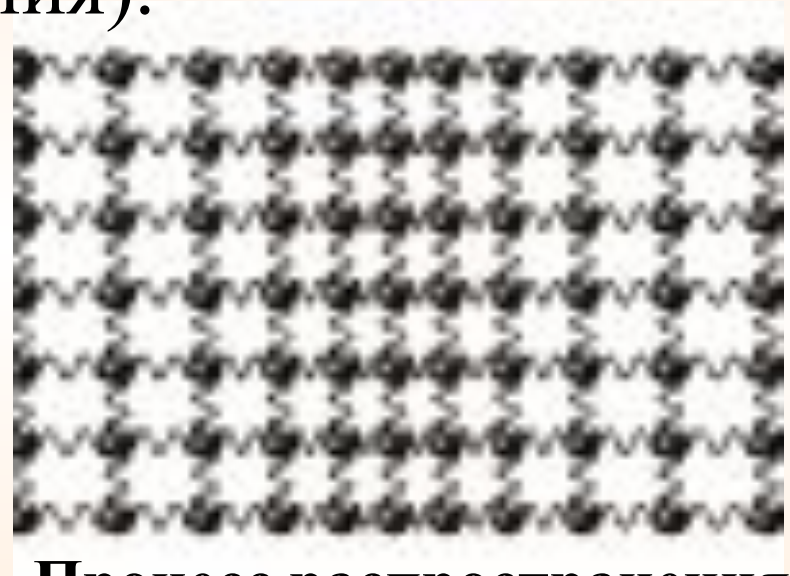
Вместе с волной от частицы к частице, передается лишь состояние колебательного движения и его энергия. Поэтому **основным свойством всех волн независимо от их природы является перенос энергии без переноса вещества.**

Волны бывают поперечными (колебания

происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения), и **продольными** (сгущение и разряжение частиц среды происходят в направлении распространения).



В поперечной волне колебания происходят в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны



Процесс распространения продольной упругой волны

Если взаимосвязь между частицами среды осуществляется **силами упругости**, возникающими вследствие **деформации среды** при передаче колебаний от одних частиц к другим, то волны называются **упругими** (звуковые, ультразвуковые, сейсмические и др. волны).

Упругие поперечные волны возникают в среде, обладающей сопротивлением сдвигу,

вследствие этого:

- **в жидкой и газообразной** средах возможно возникновение только **продольных** волн;
- **в твердой** среде возможно возникновение **как продольных, так и поперечных волн.**

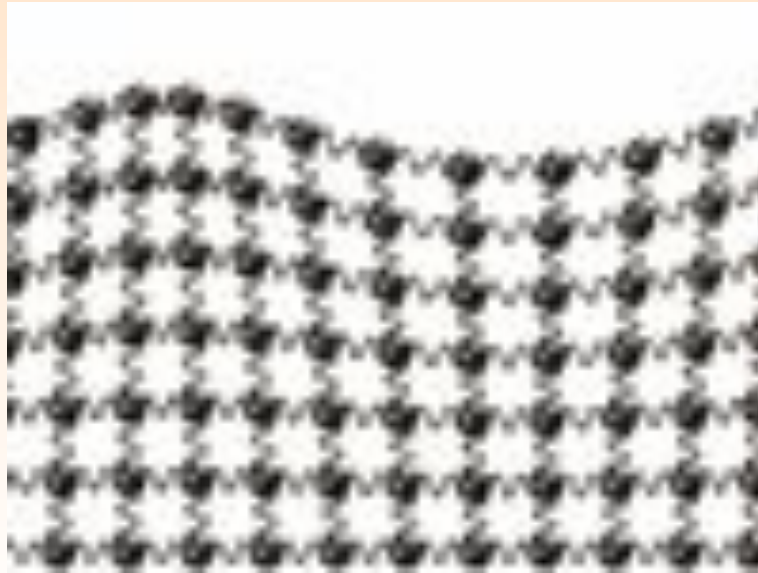


Наложение продольной и поперечной волн равной амплитуды, сдвинутых по фазе на $\pi/2$.

В результате каждая масса совершает круговые движения.



Волна на поверхности жидкости - суперпозиция
продольного и поперечного движения молекул

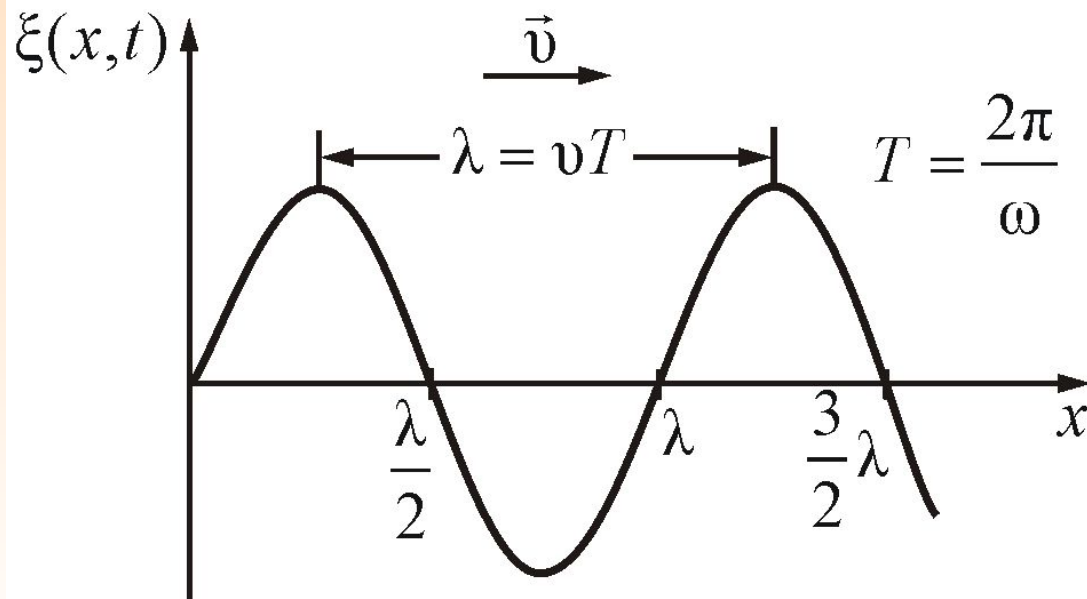


Движение молекул в волне на поверхности жидкости

У поверхностных волн взаимосвязь между соседними молекулами при передаче колебаний осуществляется **не силами упругости, а силами поверхностного натяжения и тяжести**. В случае малой амплитуды волны каждая молекула движется по окружности, радиус которой **убывает с расстоянием от поверхности**. Нижние молекулы находятся в покое

Волновая функция

$$\xi = \xi(x, y, z, t)$$



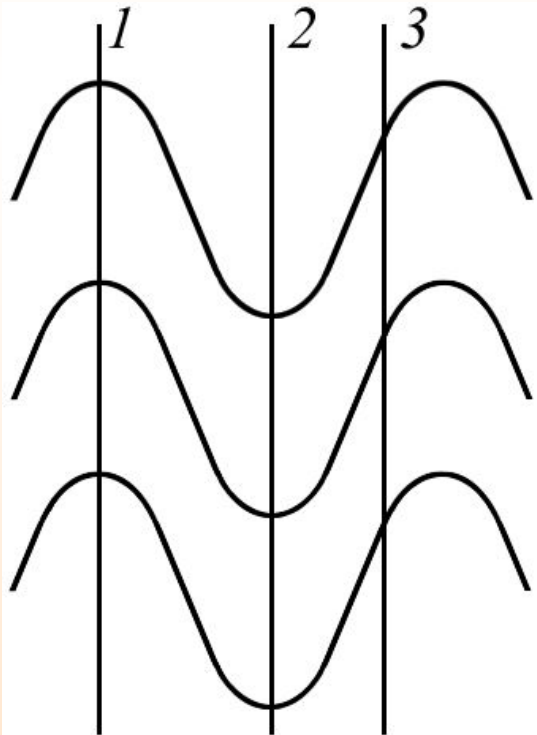
Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется **длиной волны λ** : $\lambda = vT$

v – частота $T = \frac{1}{v}$ – период

$v = \lambda\nu$ – скорость распространения волны :

В среде без дисперсии **скорость распространения волны есть фазовая скорость**, или **скорость распространения поверхности постоянной фазы**.

□ **Фронт волны** – геометрическое место точек, до которых доходит возмущение в момент времени t : это та поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебаний еще не возникли. (В однородной среде направление распространения перпендикулярно фронту волны)



□ **Волновая поверхность** – геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

□ Число волновых поверхностей – бесконечно.

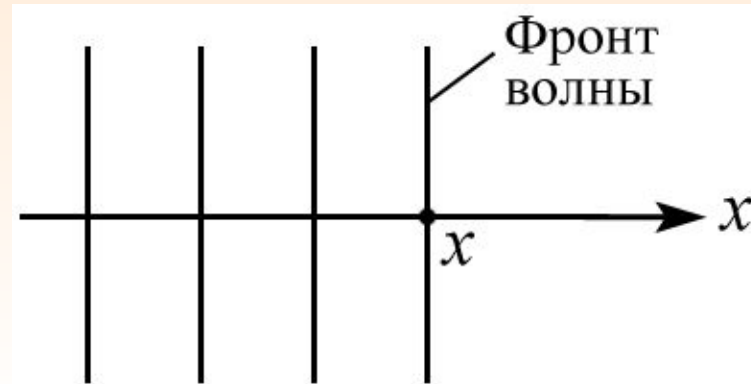
□ Фронт волны – один.

□ Волновые поверхности неподвижны,

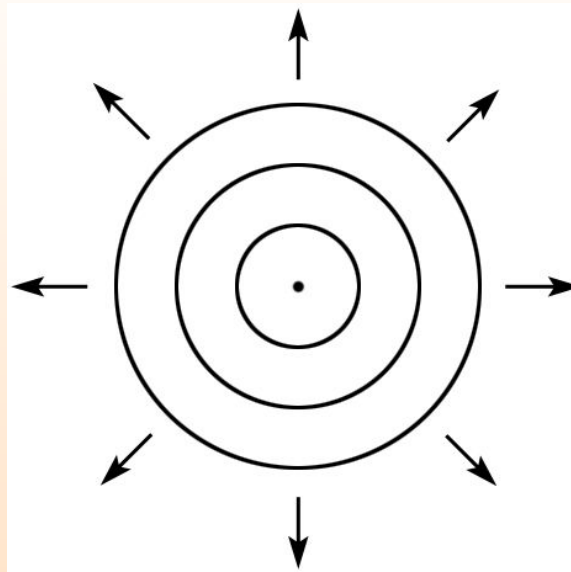
□ Фронт волны все время перемещается

В зависимости от формы волновой поверхности различают

- ***плоские волны***: волновые поверхности – параллельные плоскости:



- ***сферические волны***: волновые поверхности – концентрические сферы.



5.2 Уравнение плоской и сферической волны

Уравнением волны – называется выражение, которое дает *смещение колеблющейся точки* как функцию ее координат (x, y, z) и времени t .

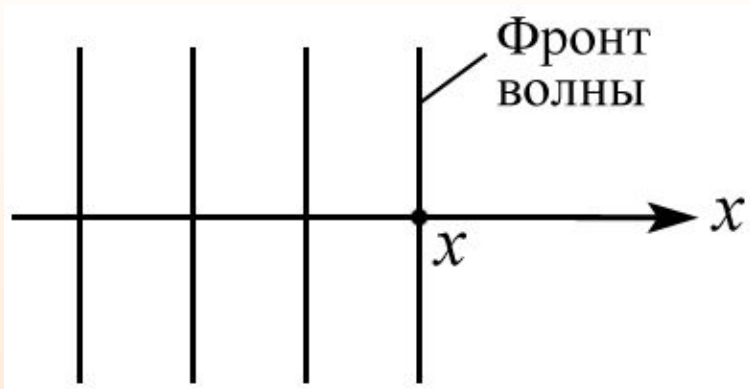
$$\xi = f(x, y, z, t) = \xi(x, y, z, t)$$

Уравнение плоской волны

Найдем вид волновой функции, ξ в случае плоской волны предполагая, что колебания носят гармонический характер: $\xi = A \cos \omega t + \varphi_0$

Пусть $\varphi_0 = 0$ $\xi = \xi(0, t) = A \cos \omega t$

Чтобы пройти путь x необходимо время $\tau = \frac{x}{v}$



$$\xi(x, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

— ЭТО *уравнение плоской волны.*

Введем *волновое число*

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

или в векторной форме $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}$

Так как $\lambda = vT$, то $k = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi v}{v} = \frac{\omega}{v}$

Отсюда

$$v = \frac{\omega}{k}$$

Тогда *уравнение плоской волны* запишется так:

$$\xi = A \cos(\omega t - kx)$$

$$\xi = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

*При поглощении **средой** энергии волны:*

$$\xi = A e^{-\beta t} \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

*-наблюдается **затухание** волны* (уменьшение интенсивности волны по мере удаления от источника колебаний);

β – коэффициент затухания;

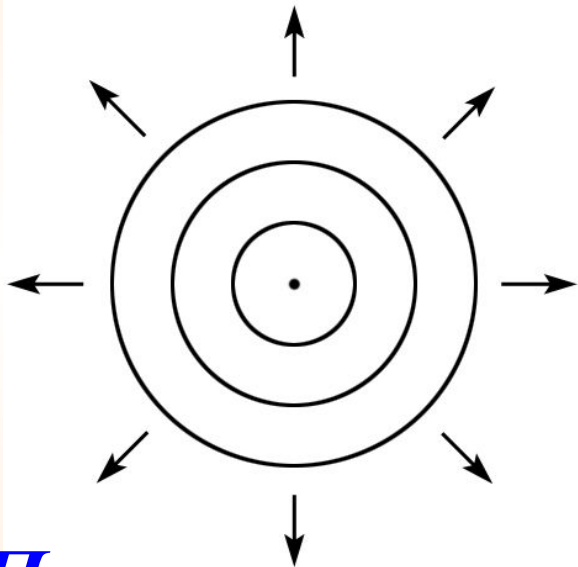
A – амплитуда.

Уравнение сферической волны

Пусть $\varphi_0 = 0$

Амплитуда колебаний убывает по закону $A \sim \frac{1}{r}$

Уравнение сферической волны:



$$\xi = \frac{A}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right)$$

ИЛИ

$$k = \frac{\omega}{v}$$

$$\xi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr)$$

При поглощении средой энергии волны:

$$\xi = \frac{A}{r} e^{-\beta t} \cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

β – коэффициент затухания.

5.6 Волновое уравнение

Распространение волн в однородной среде в общем случае *описывается волновым уравнением* – дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

ИЛИ

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Всякая функция, удовлетворяющая этому уравнению, описывает некоторую волну, причем v – фазовая скорость волны

Решением волнового уравнения

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

является уравнение любой волны, например

сферической: $\xi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr)$

или *плоской*: $\xi = A \cos(\omega t - kr)$

Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x , *волновое уравнение* упрощается:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Напоминаю, что оператор Лапласа:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

5.3 Фазовая скорость

– *это скорость распространения фазы волны.*

$$\frac{dx}{dt} = v$$

– *скорость распространения фазы есть скорость распространения волны.*

Для синусоидальной волны *скорость переноса энергии равна фазовой скорости.*

5.4 Принцип суперпозиции. Групповая скорость

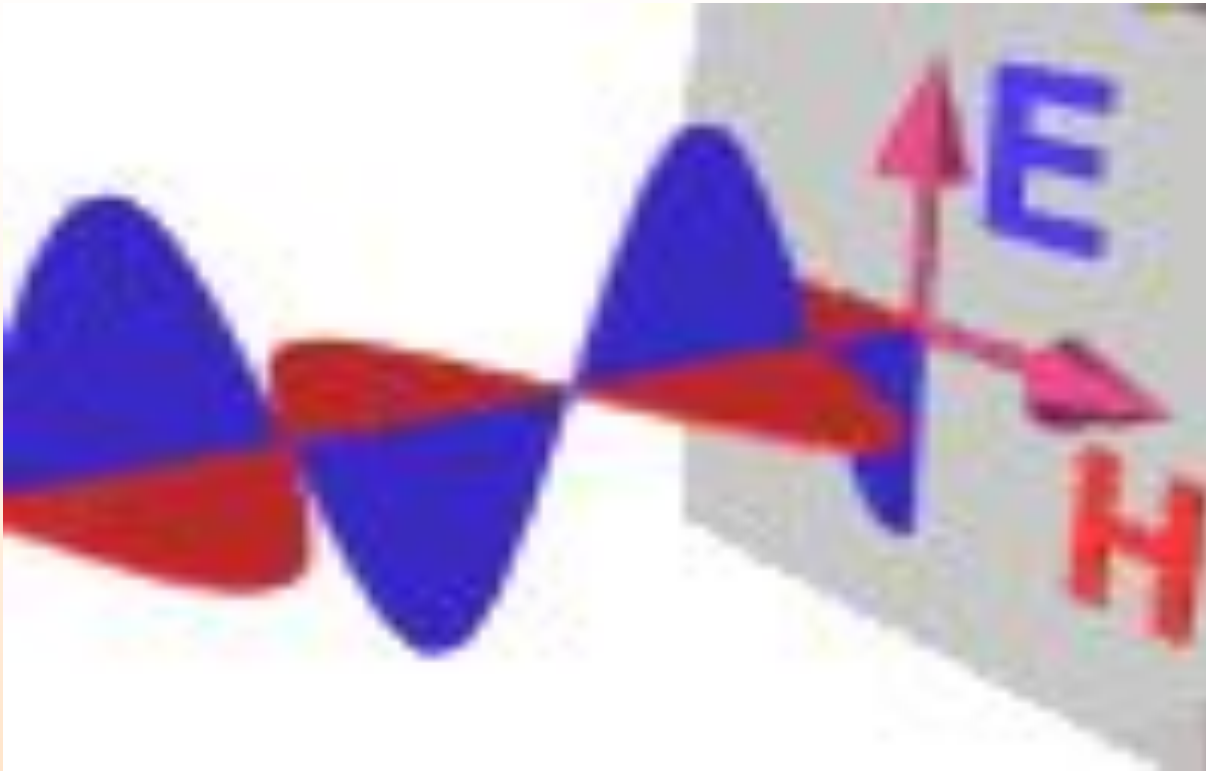
*Принцип суперпозиции (наложения волн): при распространении в среде **нескольких волн** каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды равно **геометрической сумме смещений частиц**.*

*Исходя из этого принципа и разложения Фурье, любая волна может быть представлена в виде **волнового пакета или группы волн**.*

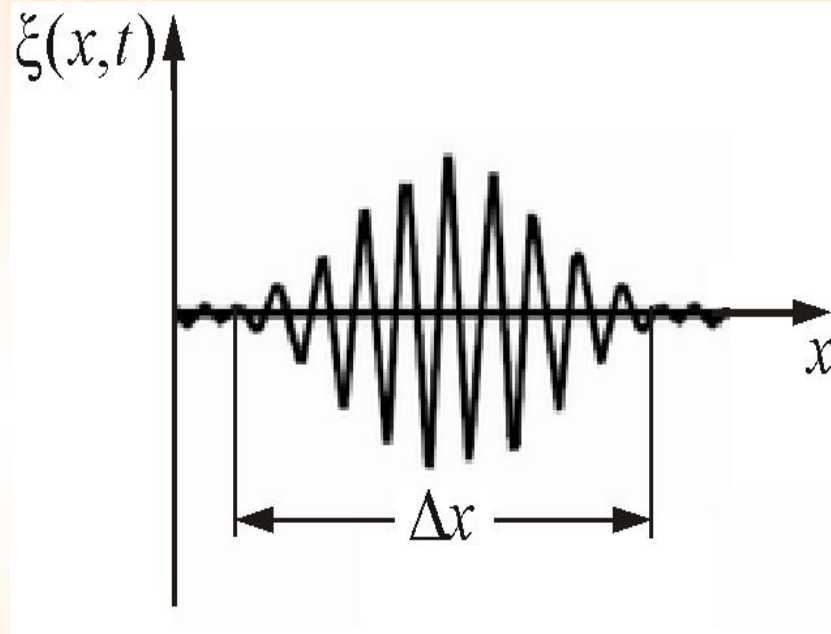
Строго *монохроматическая* волна представляет собой бесконечную во времени и пространстве последовательность «горбов» и «впадин».

$$\xi = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Фазовая скорость этой волны $v = \lambda \nu$ или $v = \frac{\omega}{k}$

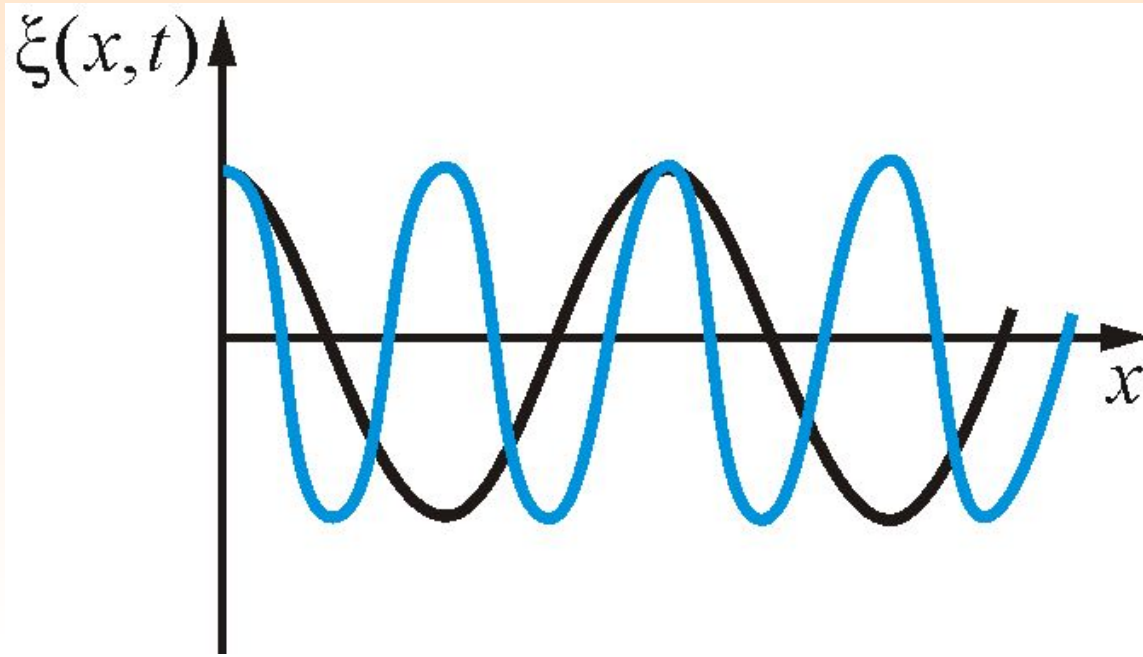


Суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, называется волновым пакетом или группой волн:



Выражение для группы волн:

$$\xi(x, t) = \int_{\omega - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega + \frac{\Delta\omega}{2}} A_{0\omega} \cos(\omega t - k_{\omega} x + \varphi_{\omega}) d\omega$$



Там где фазы совпадают, наблюдается усиление амплитуды, где нет – гашение (результат интерференции).

необходимо условие $\Delta\omega \ll \omega_0$

Дисперсия – это зависимость фазовой скорости в среде от частоты.

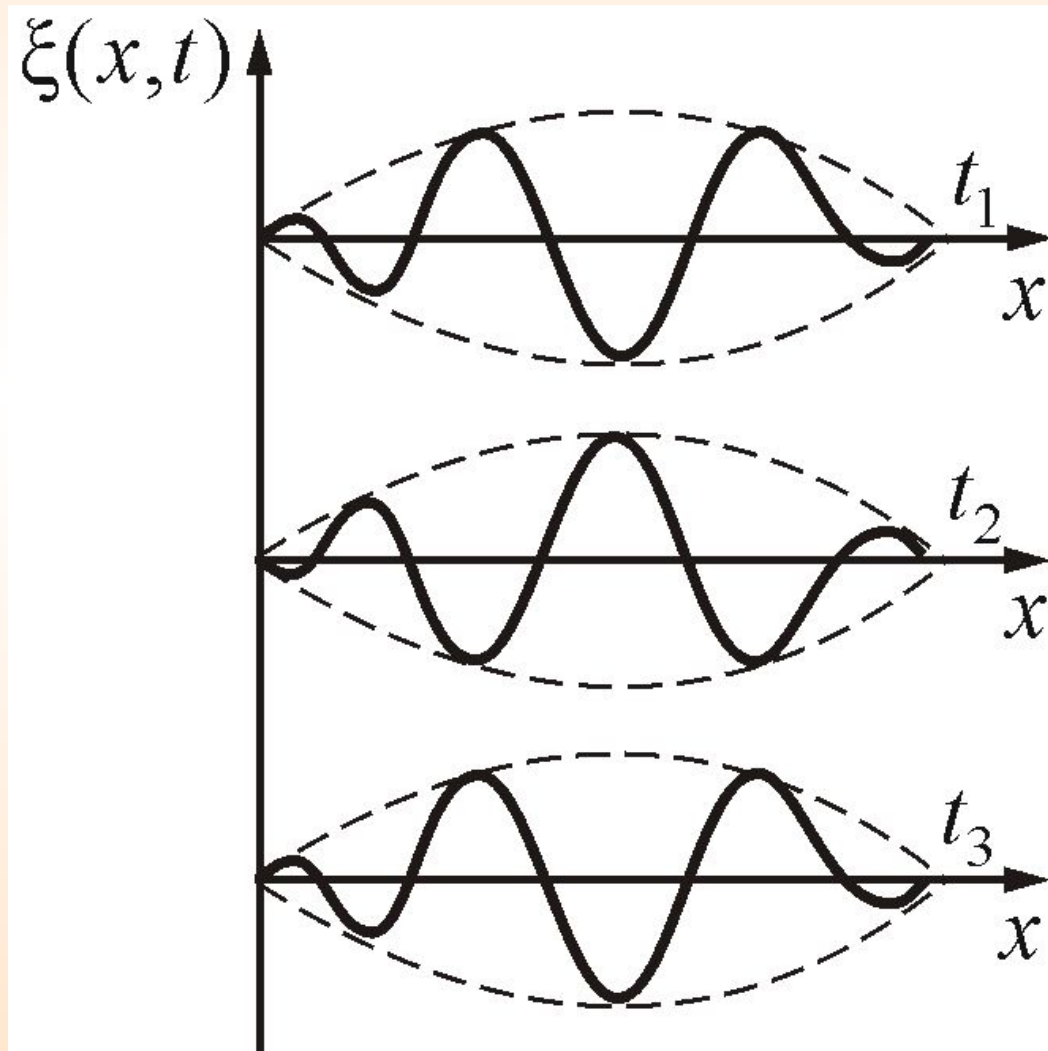
В *недиспергирующей среде* все плоские волны, образующие пакет, распространяются с *одинаковой фазовой скоростью v* .

Скорость перемещения пакета *u* совпадает со скоростью *v* : $u = v$

Скорость, с которой перемещается центр пакета (точка с максимальным значением A), *называется групповой скоростью u* .

В диспергирующей среде $u \neq v$

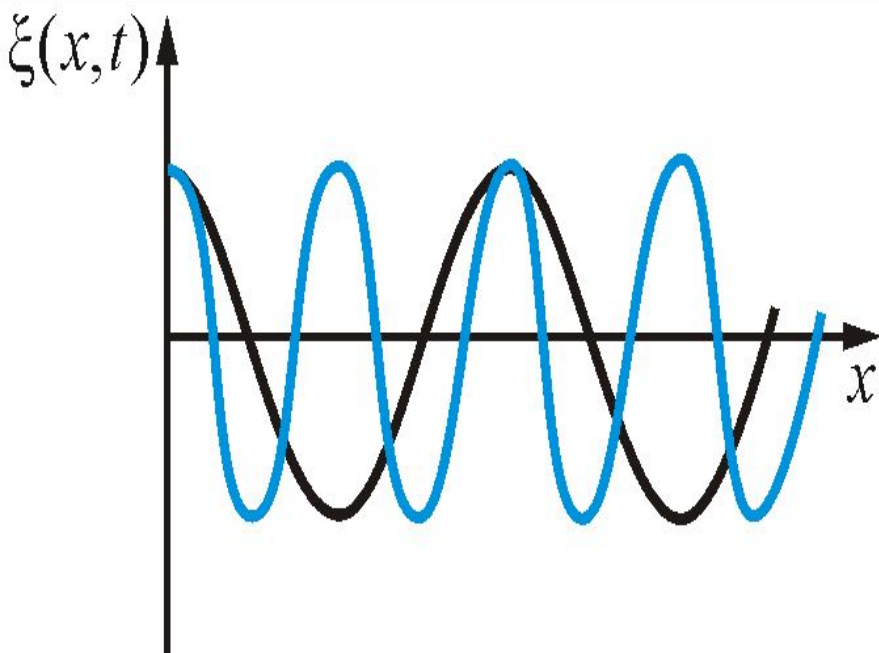
Если дисперсия невелика то скорость перемещения пакета совпадает со скоростью v



Рассмотрим **пример суперпозиции двух волн** с одинаковой амплитудой и близкими длинами волн λ :

$$\xi_1 = A_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$\xi_2 = A_0 \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x]$$



$$k = \frac{\omega}{v_1} \text{ Волновое число первой волны}$$

$$(k + \Delta k) = \frac{\omega + \Delta\omega}{v_2^{27}}$$

В результате **суперпозиции двух волн** получилась **суммарная волна (волновой пакет)**:

$$\xi = \left[2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \right] \cos(\omega t - kx)$$

Эта волна отличается от гармонической тем, что её **амплитуда – есть медленно изменяющаяся функция x и t** :

$$A = \left| 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \right|$$

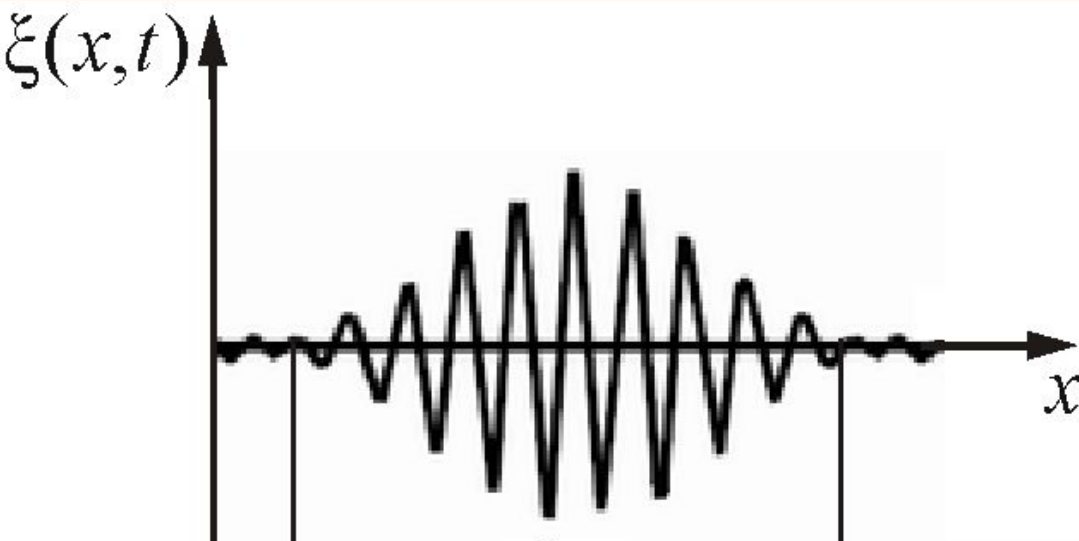
Максимум амплитуды :

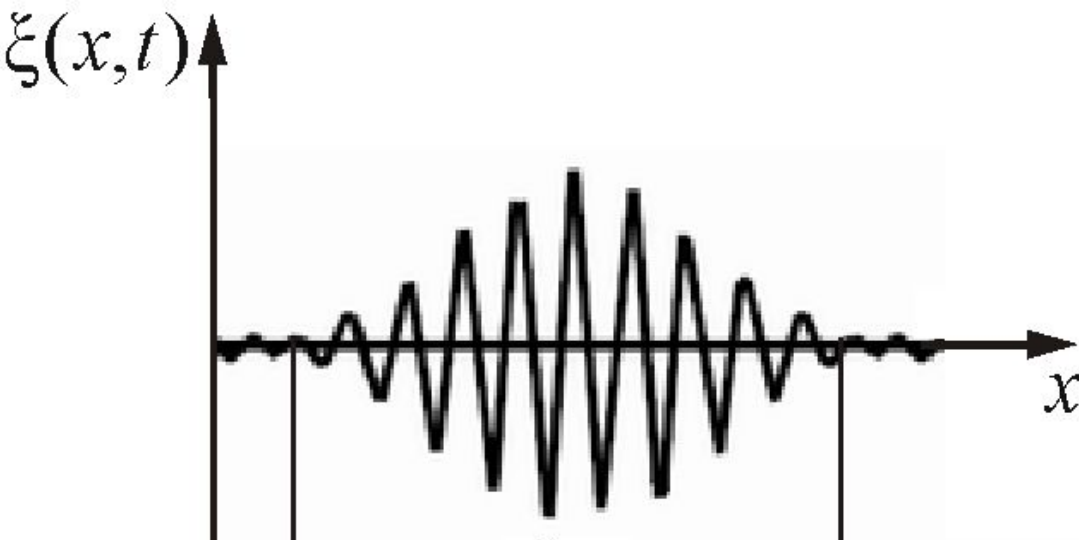
$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x_{\max} = \pm m\pi$$

$$x_{\max} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t + \text{const}$$

28

- **координаты максимума**





За скорость распространения этого волнового пакета u принимают скорость максимума амплитуды, т.е. центра пакета:

$$v = \frac{\omega}{k} \quad \text{— фазовая скорость}$$

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{— групповая скорость}$$

Связь между групповой и фазовой скоростью:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad \text{и может быть как меньше, так и больше } v$$

В недиспергирующей среде:
 $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ поэтому $u = v$

В диспергирующей среде:
 $u \neq v$

Групповая скорость может быть $u > c$ Фазовая скорость $v < c$

5.5 Стоячие волны

Если в среде распространяется несколько волн, то колебания частиц среды оказывается геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности.

Волны накладываются друг на друга не возмущая (не искажая друг друга) - **принцип суперпозиции волн.**

Если две волны, приходящие в какую либо точку пространства, обладают постоянной разностью фаз, такие волны называются когерентными.

При сложении когерентных волн возникает явление интерференции.

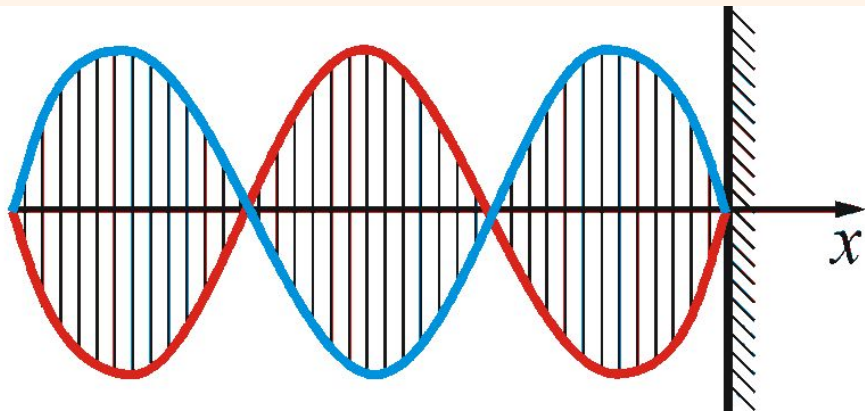
Очень важный *случай интерференции* наблюдается *при наложении двух встречных плоских волн* с одинаковой амплитудой.

Возникающий в результате колебательный процесс называется *стоячей волной*.

Практически стоячие волны возникают при отражении от преград.

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= A \cos(\omega t - kx) \\ \xi_2 &= A \cos(\omega t + kx) \end{aligned} \right\}$$

$$\xi = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \cos \omega t$$



$$\text{или } \xi = A^* \cos \omega t$$

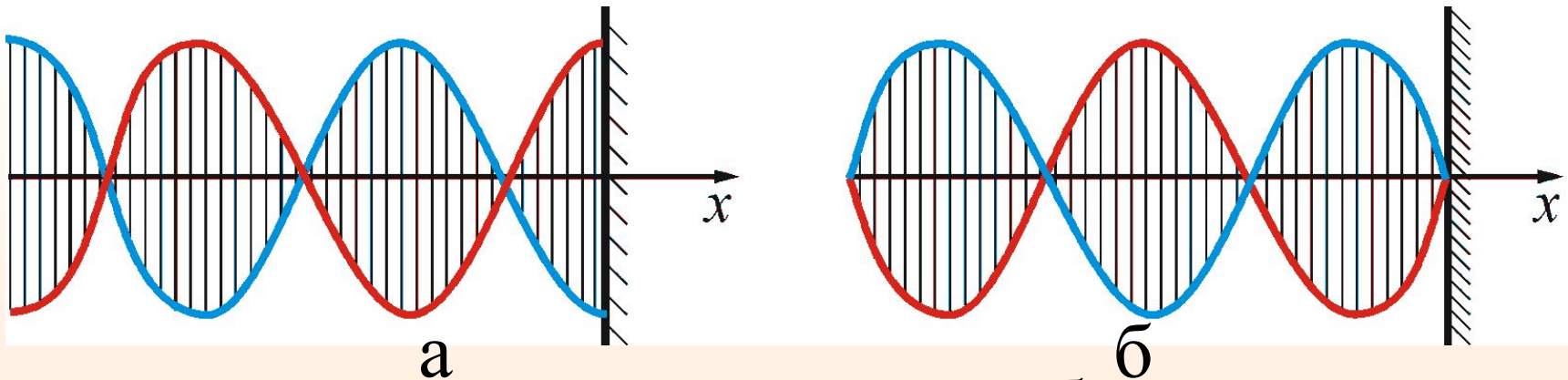
- *уравнение стоячей волны – частный случай интерференции*

$$\xi = A^* \cos \omega t$$

$$A^* = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) - \text{суммарная амплитуда}$$

Когда суммарная амплитуда **равна максимальному** значению $A^* = 2A$ - это **пучности** стоячей волны

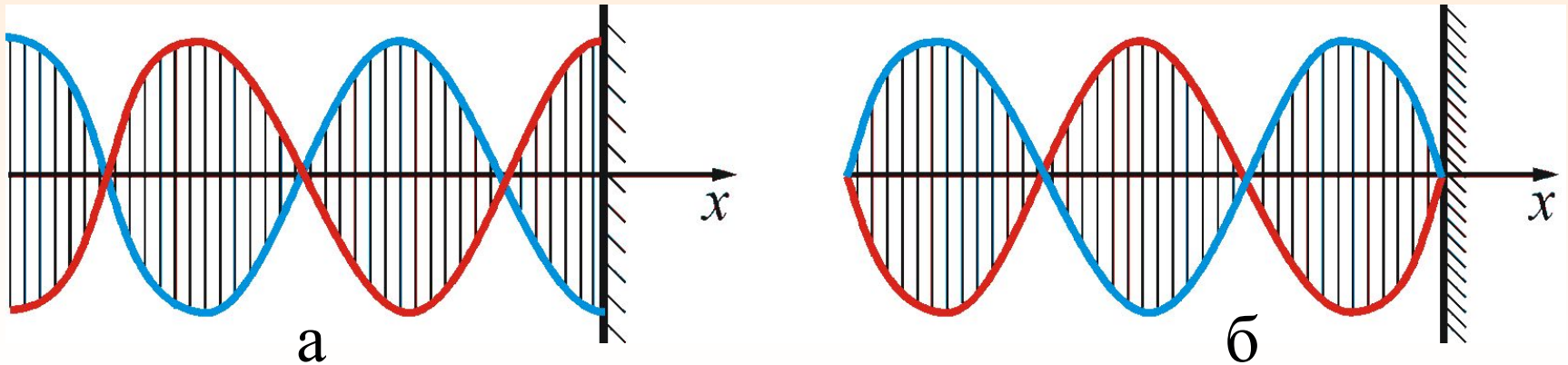
Координаты пучностей: $x_{\text{пучн}} = \pm n\lambda / 2$ ($n=0, 1, 2..$)



Когда суммарная амплитуда колебаний **равна нулю** $A^* = 0$ - это **узлы** стоячей волны.

Координаты узлов: $x_{\text{узл}} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$

Если среда, от которой происходит отражение, **менее плотная**, то в месте отражения возникает **пучность** (а), если **более плотная** – **узел** (б).



Определим **расстояние между соседними узлами (пучностями)**: т.к. $k\Delta x \equiv \pi$ тогда:

$$\Delta x \equiv \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$$

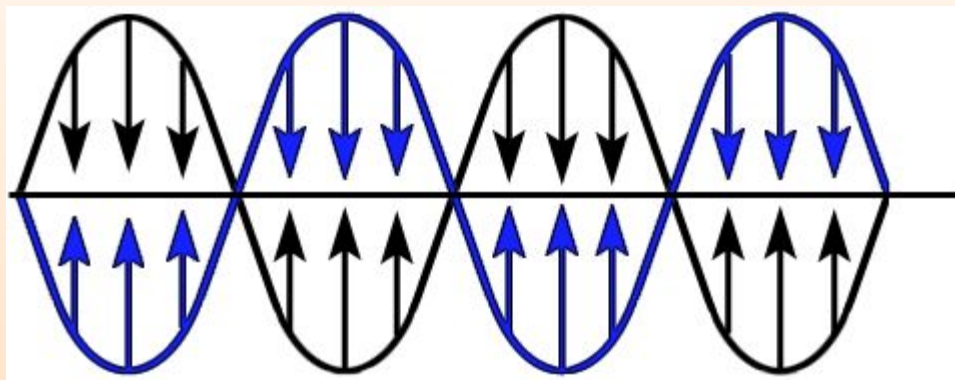
- расстояние между соседними пучностями, как и соседними узлами, одинаково и составляет **половину длины волны**.

Пучности и узлы сдвинуты друг относительно друга на **четверть длины волны**.



Если рассматривать *бегущую волну*, то в направлении ее распространения *переносится энергия* колебательного движения.

В случае же стоячей волны переноса энергии нет, т.к. падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях.



Упругие волны

Рассмотрим продольную плоскую волну в твердой среде:

Деформация среды в плоскости x :

(взят символ частной производной,
т.к. $s = s(x, t)$)

$$\varepsilon = \frac{\partial s}{\partial x}$$

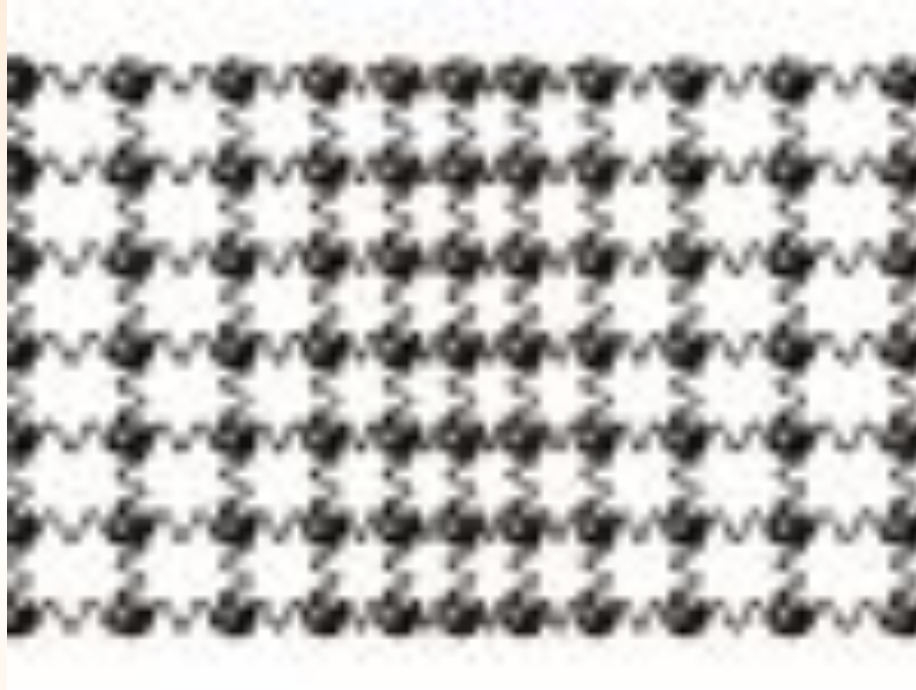
Нормальное напряжение

пропорционально деформации
(для малых деформаций):

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial s}{\partial x}$$

где E – *модуль Юнга* среды.

- В положениях максимального отклонения частиц от положения равновесия ($\partial s / \partial x = 0$) $\varepsilon = 0$, $\sigma = 0$
- В местах прохождения частиц через положения равновесия ε , σ - **максимальны** (с чередованием $\pm\varepsilon$, т.е. растяжений и сжатий)



Процесс распространения продольной
упругой волны

Скорость продольной волны связана с характеристиками среды следующим образом:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \rho - \text{плотность среды.}$$

Скорость поперечной волны

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad G - \text{модуль сдвига.}$$

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi)$$

- **плотность энергии** упругой волны (как поперечной, так и продольной) в каждый момент времени в разных точках пространства различна.

Эффект Доплера

Зависимость длины волны
от относительной скорости
движения

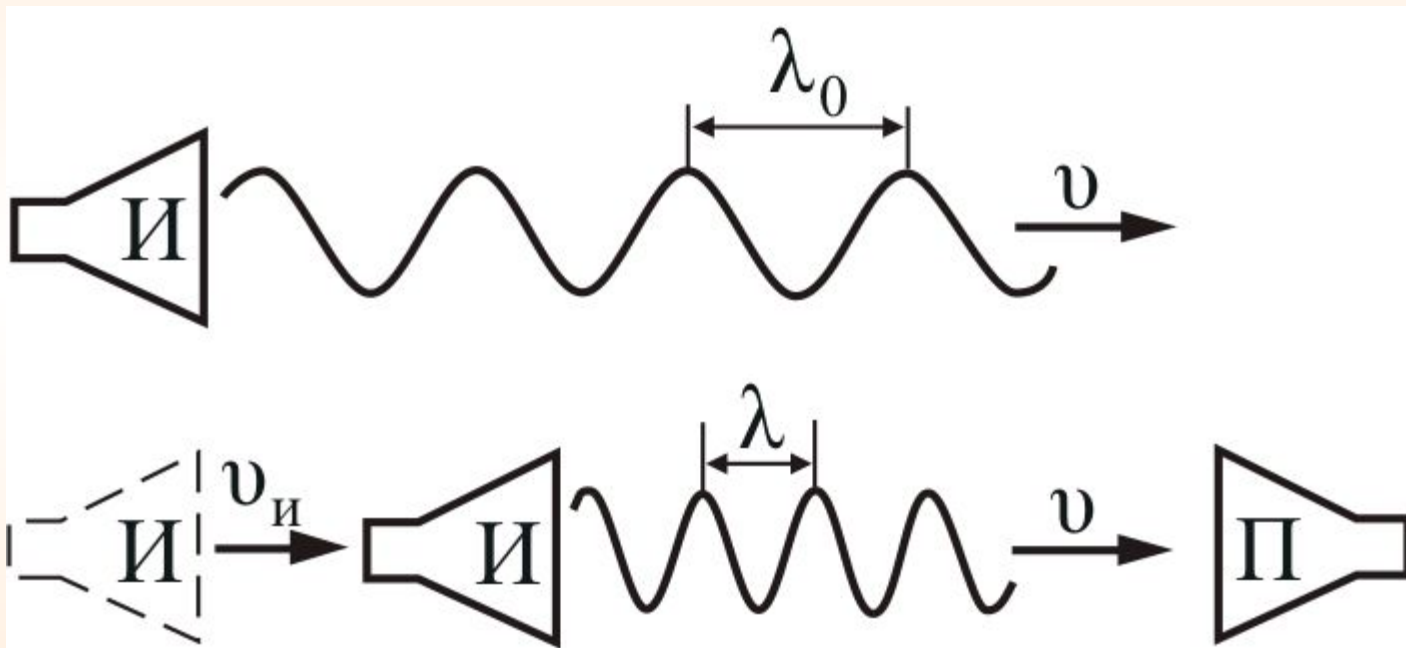
5.7 Эффект Доплера



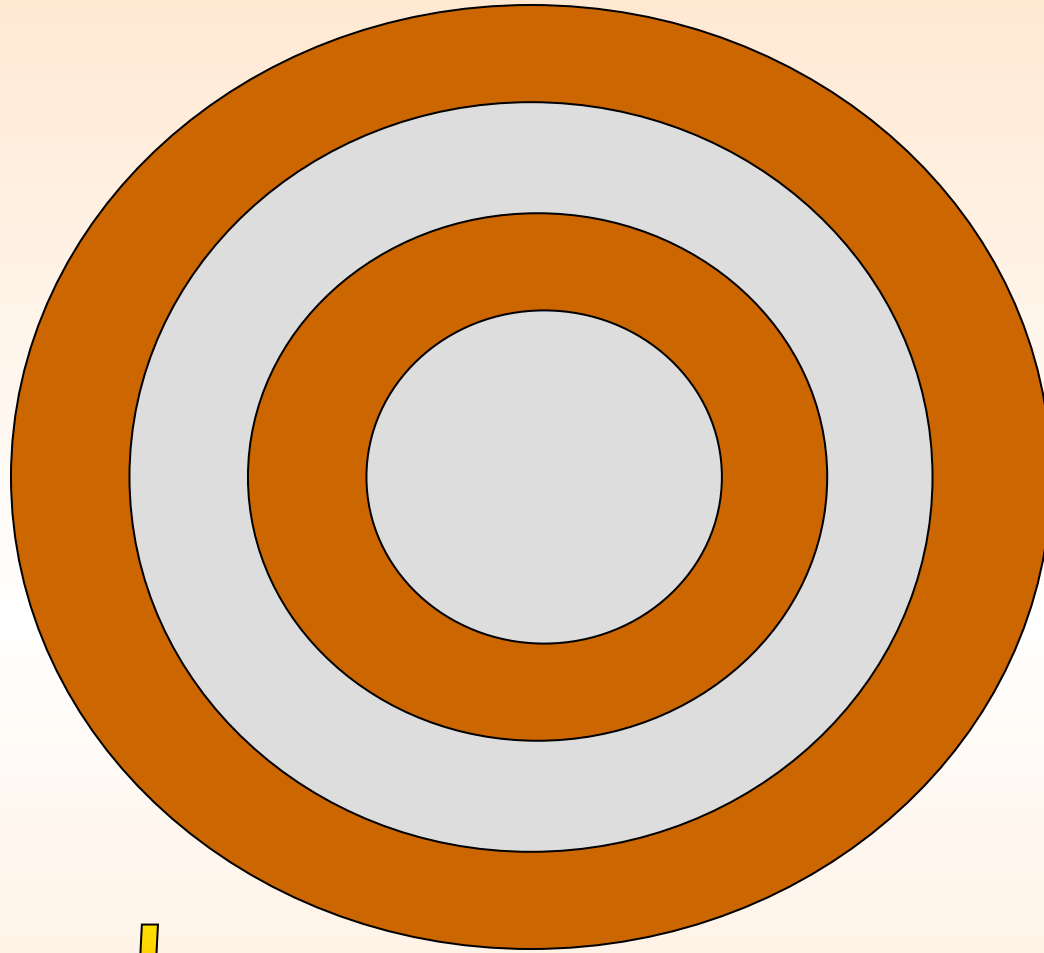
Доплер Христиан (1803 – 1853), австрийский физик и астроном, член Венской АН (1848 г.). Учился в Зальцбурге и Вене. С 1847 г. профессор Горной академии в Хемнице, с 1850 г.

профессор Политехнического института и университета в Вене. Основные труды посвящены абберрации света, теории микроскопа и оптического дальномера, теории цветов и др. В 1842 г. теоретически обосновал зависимость частоты колебаний, воспринимаемых наблюдателем, от скорости и направления движения наблюдателя относительно источника колебаний.

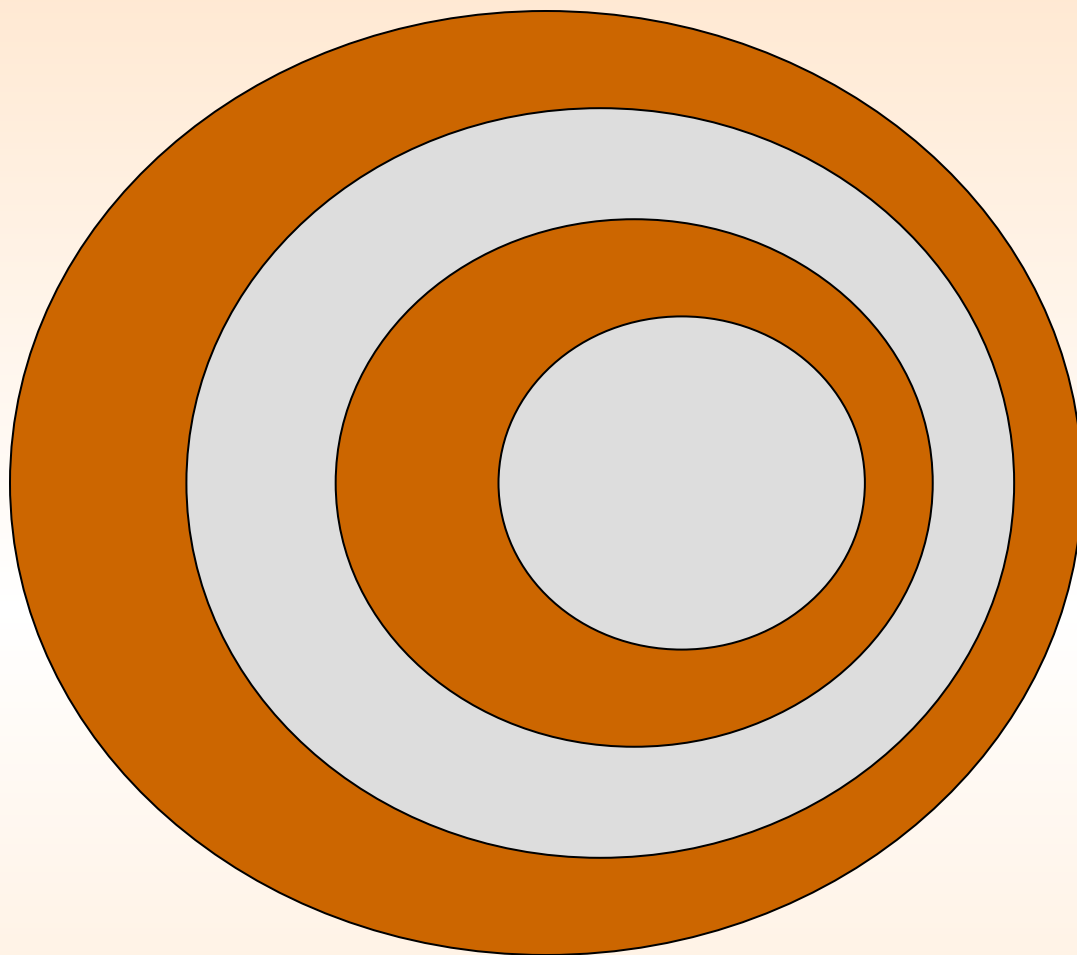
Эффектом Доплера называется изменение частоты волн, регистрируемых приемником, которое происходит вследствие движения источника этих волн и приемника.



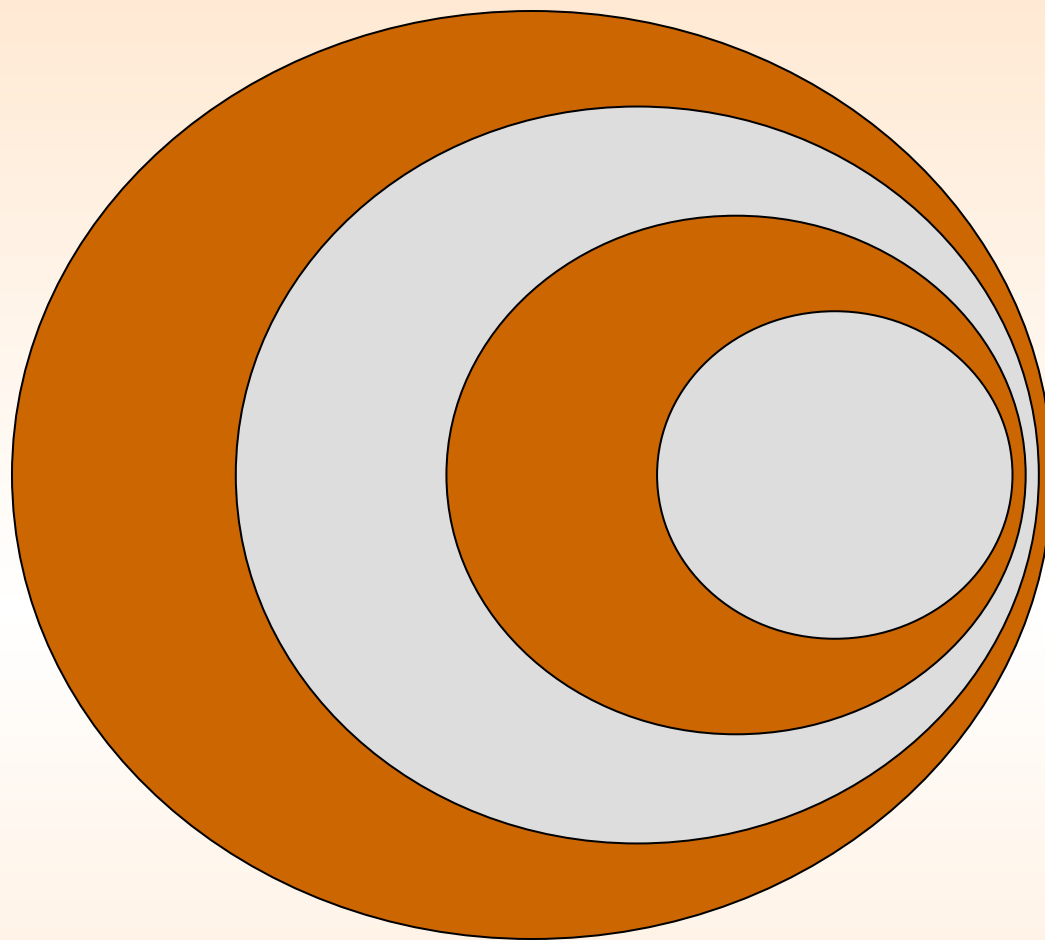
Источник, двигаясь к приемнику как бы сжимает пружину – волну



Волновые фронты неподвижного источника

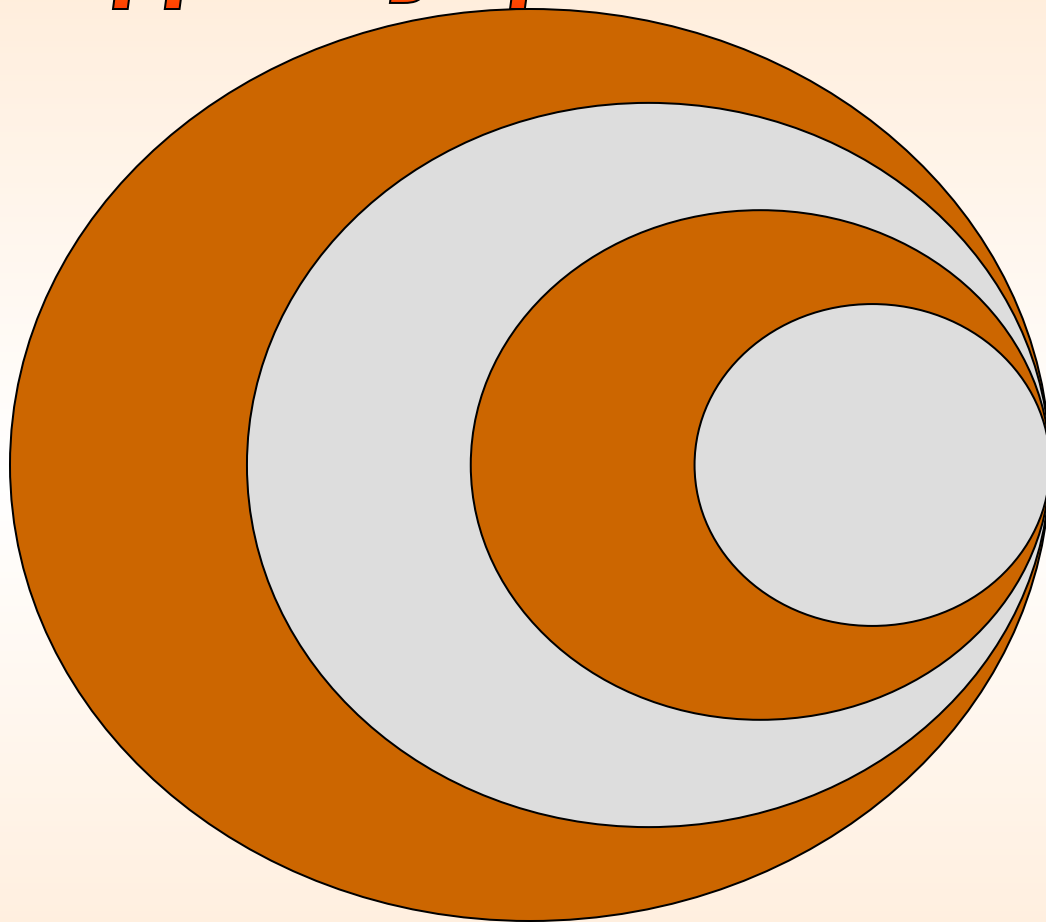


ИСТОЧНИК ДВИЖЕТСЯ ВПРАВО



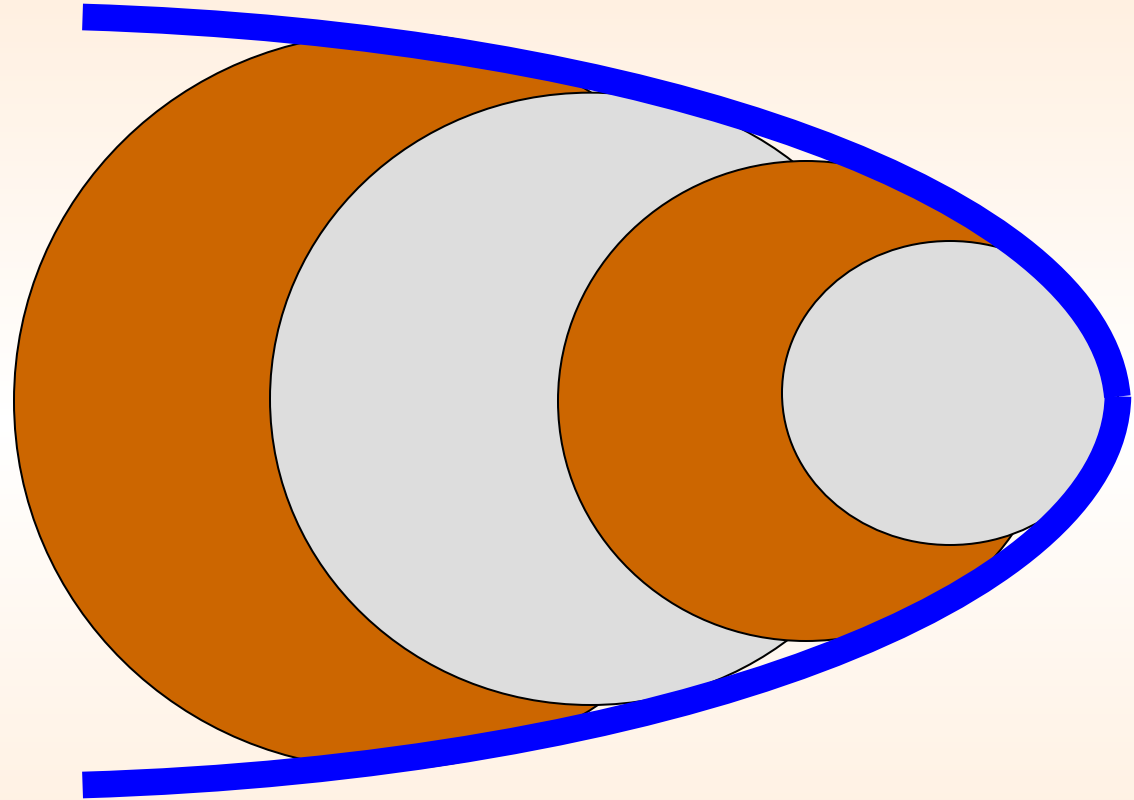
СКОРОСТЬ ДВИЖЕТСЯ ВОЗРОСЛА

СКОРОСТЬ ДВИЖУЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА



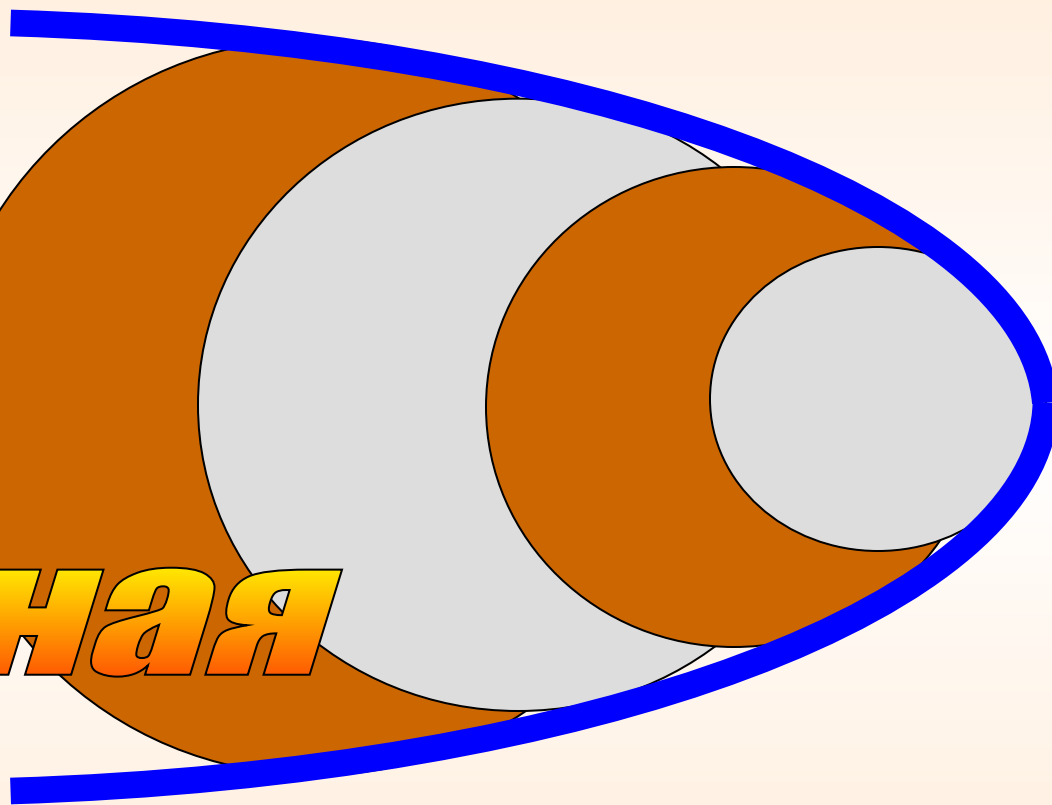
равна фазовой скорости

СКОРОСТЬ ДВИЖУЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА



ВЫШЕ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ

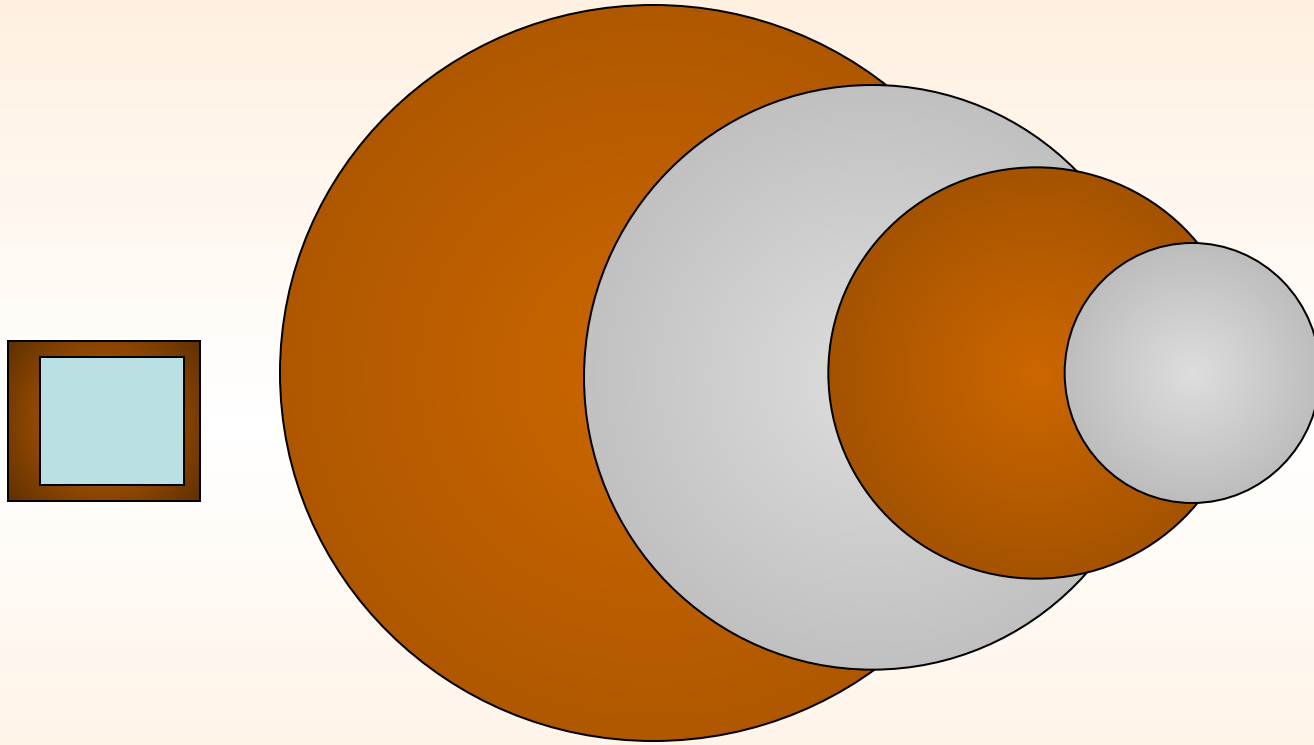
Формируется



Ударная

Волна

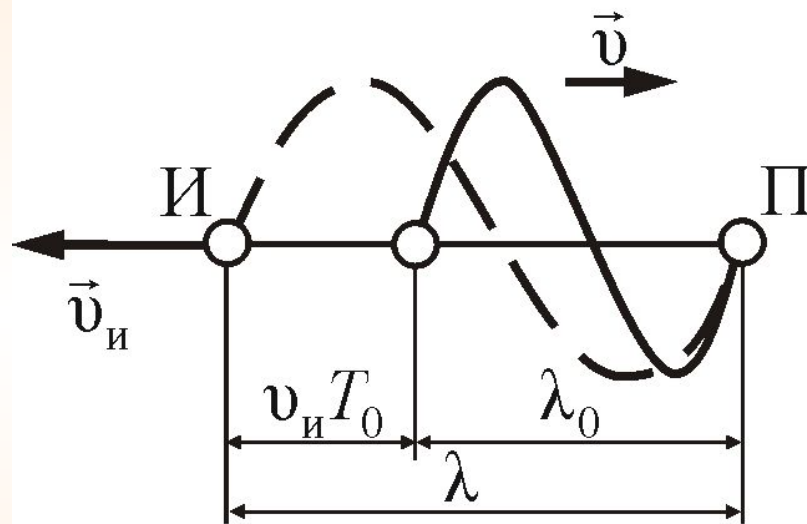
Динамика перехода



к конусу Маха

Акустический эффект Доплера (несколько случаев проявления)

1. Источник движется относительно приемника



Источник смещается в среде за время, равное периоду его колебаний T_0 , на расстояние

$$v_И T_0 = \frac{v_И}{v_0}$$

где v_0 – частота колебаний источника, v – фазовая скорость волны

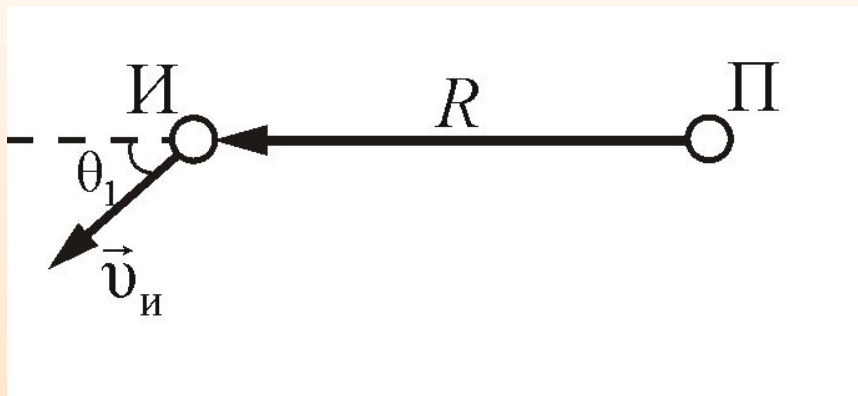
Длина волны, регистрируемая приемником,

$$\lambda = \lambda_0 + v_{\text{и}} T_0 = (v + v_{\text{и}}) T_0 = \frac{(v + v_{\text{и}})}{v_0}$$

$$v = \frac{v}{\lambda} = \frac{v_0}{1 + v_{\text{и}} / v}$$

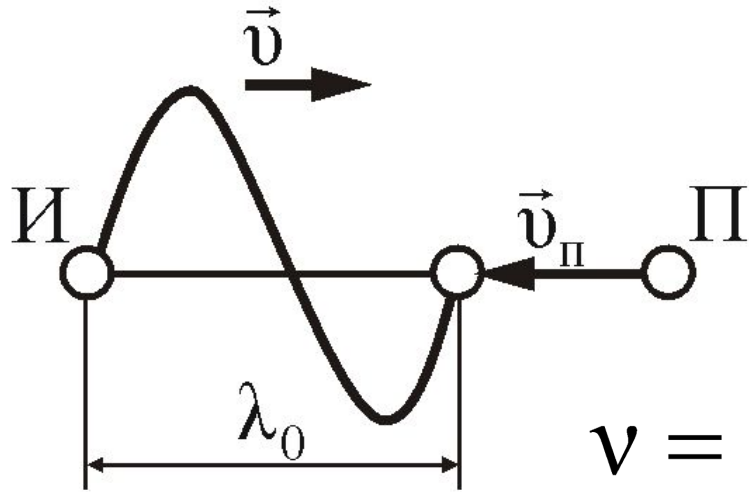
Частота волны,
регистрируемая приемником,

Если вектор $v_{\text{и}}$ скорости источника **направлен под** произвольным **углом** θ_1 к радиус-вектору R



$$v = \frac{v_0}{1 + (v_{\text{и}} / v) \cos \theta_1}$$

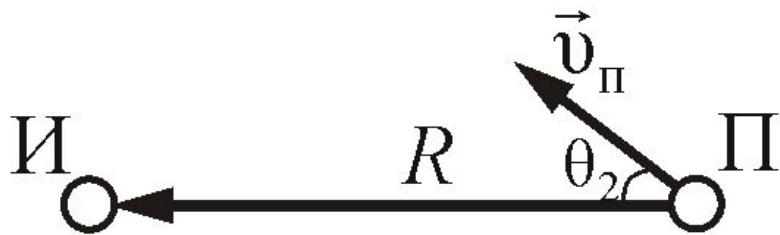
2. Приемник движется относительно источника



Частота волны,
регистрируемая
приемником:

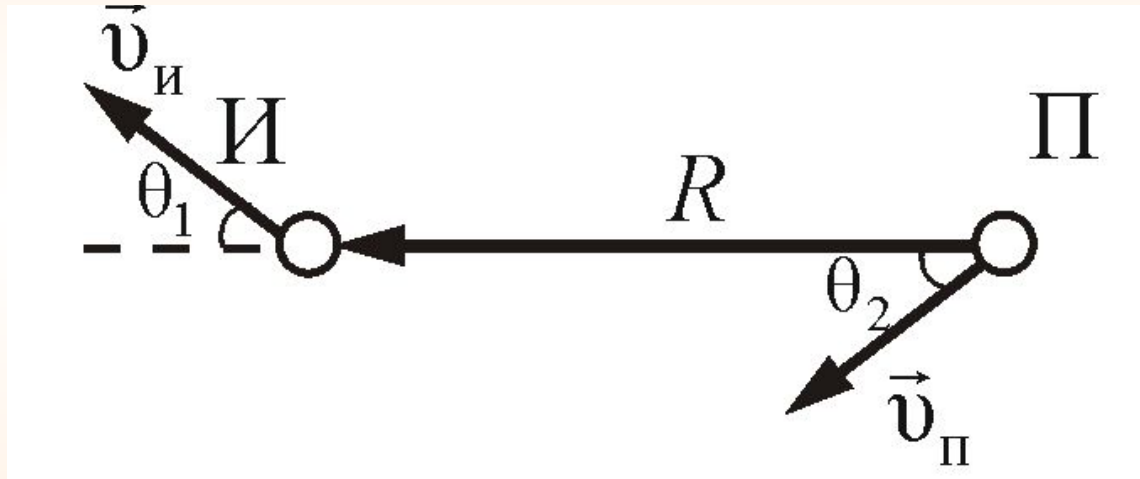
$$\nu = (\nu + \nu_{\text{П}}) / \lambda_0 = \nu_0 (1 + \nu_{\text{П}} / \nu).$$

Если приемник движется относительно
источника под углом:



$$\nu = \nu_0 [1 + (\nu_{\text{П}} / \nu) \cos \theta_2]$$

3. В общем случае, когда и приемник и источник звуковых волн движутся относительно среды с произвольными скоростями



$$v = v_0 \frac{1 + (v_П / v) \cos \theta_2}{1 + (v_И / v) \cos \theta_1}$$

Если $v_{\text{И}} \ll v$

$$v \approx v_0 [1 - (v'/v) \cos \theta]$$

где $\vec{v}' = \vec{v}_{\text{И}} - \vec{v}_{\text{П}}$

– скорость источника волны относительно приемника, а θ – угол между векторами \vec{v}' и \vec{R}

Величина $v' \cos \theta$, равная проекции \vec{v}' на направление \vec{R} , называется ***лучевой скоростью источника.***

Оптический эффект Доплера

Соотношение, описывающее *эффект Доплера для электромагнитных волн* в вакууме, с учетом преобразований Лоренца, имеет вид:

$$\nu = \frac{\nu_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 + (v / c) \cos \theta} \quad (1)$$

Если источник движется относительно приемника вдоль соединяющей их прямой, то наблюдается *продольный эффект Доплера*:

Продольный эффект Доплера

• В случае сближения источника и приемника ($\theta = \pi$)

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} > \nu_0$$

• В случае их взаимного удаления ($\theta = 0$)

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} < \nu_0 \quad (2)$$

Поперечный эффект Доплера

наблюдается при $\theta = \pi/2$ $\theta = 3\pi/2$

$$v = v_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2} < v_0$$

Поперечный эффект пропорционален отношению v^2 / c^2 , следовательно, он значительно слабее продольного, который пропорционален v/c

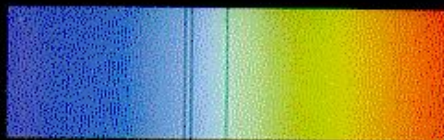
Впервые экспериментальная проверка существования эффекта Доплера и правильности релятивистской формулы (1) была осуществлена американскими физиками Г. Айвсом и Д. Стилуэллом в 30-ых гг.

Эффект Доплера нашел широкое применение в науке и технике. Особенно большую роль это явление играет в *астрофизике*. На основании доплеровского смещения линий поглощения в спектрах звезд и туманностей можно определять лучевые скорости $v \cos \theta$ этих объектов по отношению к Земле: при $v \ll c$ по формуле (1)

$$v \cos \theta \approx (1 - v / v_0) c$$

Американский астроном **Э. Хаббл** обнаружил в 1929 г. явление, получившее название ***космологического красного смещения*** и состоящее в том, что линии в спектрах излучения внегалактических объектов смещены в сторону меньших частот (больших длин волн).

65млн. св. лет



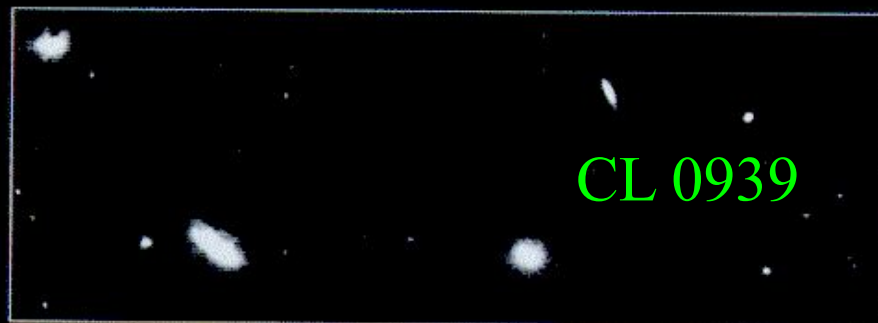
Дева

325млн. св. лет



Персей

4 млрд. св. лет



CL 0939

Космологическое красное смещение есть не что иное, как эффект Доплера. Оно свидетельствует о том, что Метагалактика расширяется, так что внегалактические объекты удаляются от нашей Галактики.

Под метагалактикой понимают совокупность всех звездных систем. В современные телескопы можно наблюдать часть Метагалактики, оптический радиус которой равен

$$R = 1,12 \cdot 10^{23} \text{ км}$$

Хаббл установил закон, согласно которому, *относительное красное смещение z галактик растёт пропорционально расстоянию r до них.*

Закон Хаббла:

$$v \cos \theta \approx cz = Hr$$

$H = 73,2$ км/(~~100~~ ~~млн~~ парсек)ая Хаббла.

1 пк (парсек) – расстояние, которое свет проходит в вакууме за 3,27 лет

$$1 \text{ пк} \approx 3,09 \cdot 10^{16} \text{ м}$$



На эффекте Доплера основаны радиолокационные, лазерные методы измерения скоростей различных объектов на Земле (например, автомобиля, самолета и др.).

ЛЕКЦИЯ ОКОНЧЕНА!

