

# Лекция 8. Перемещения при изгибе (Расчет упругой линии балки)

## 8.1. Простые решения

# Рис. 1. Характеристики изогнутой балки

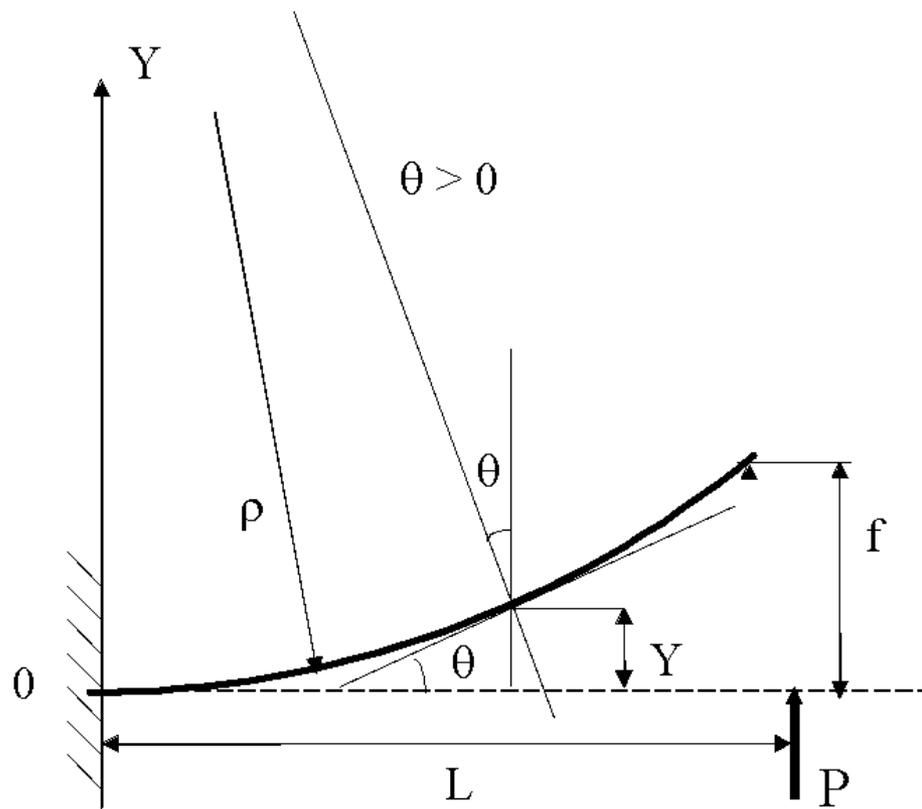
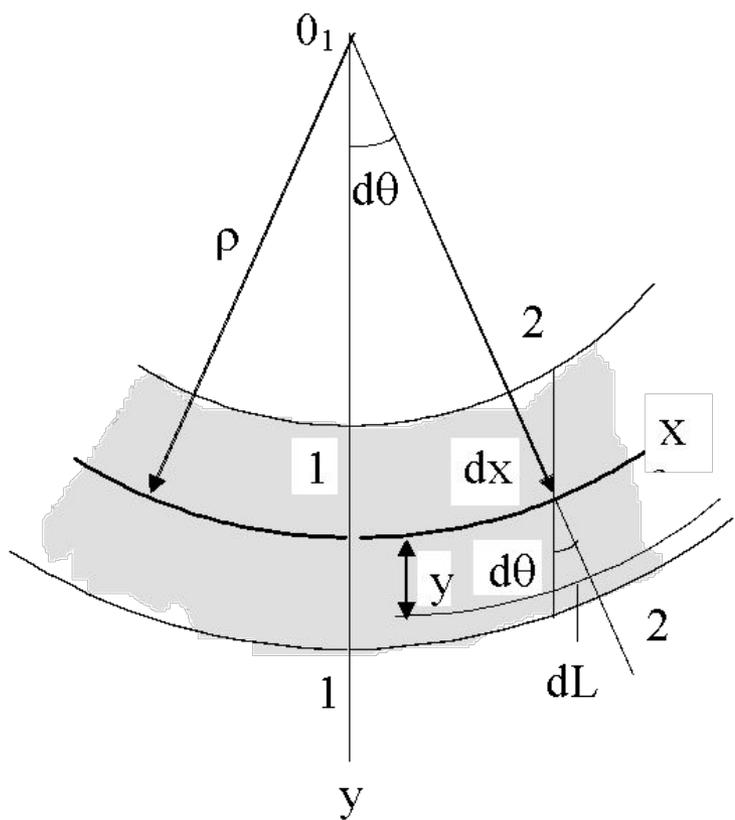


Рис. 2а. Простая балка ↑

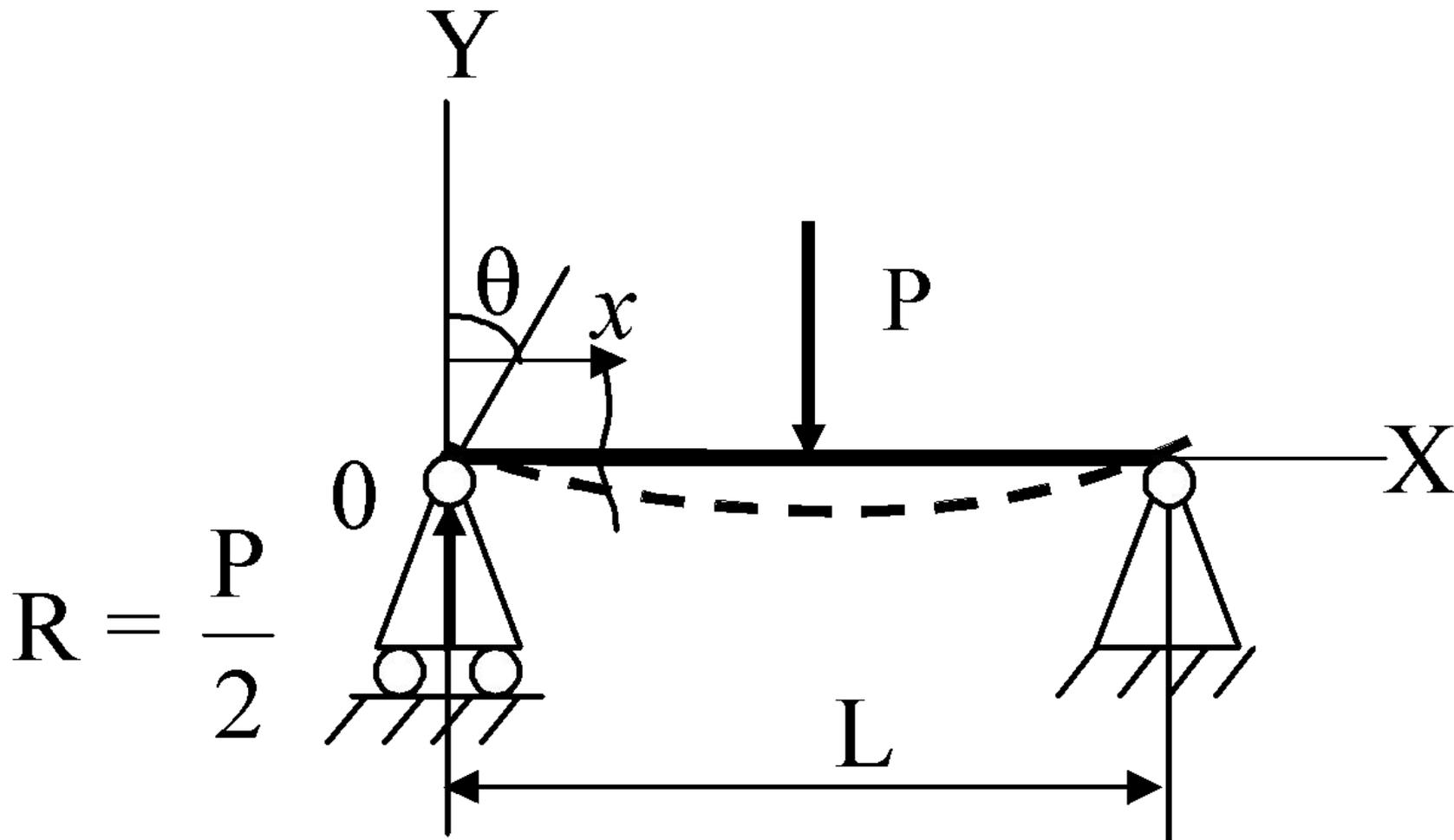
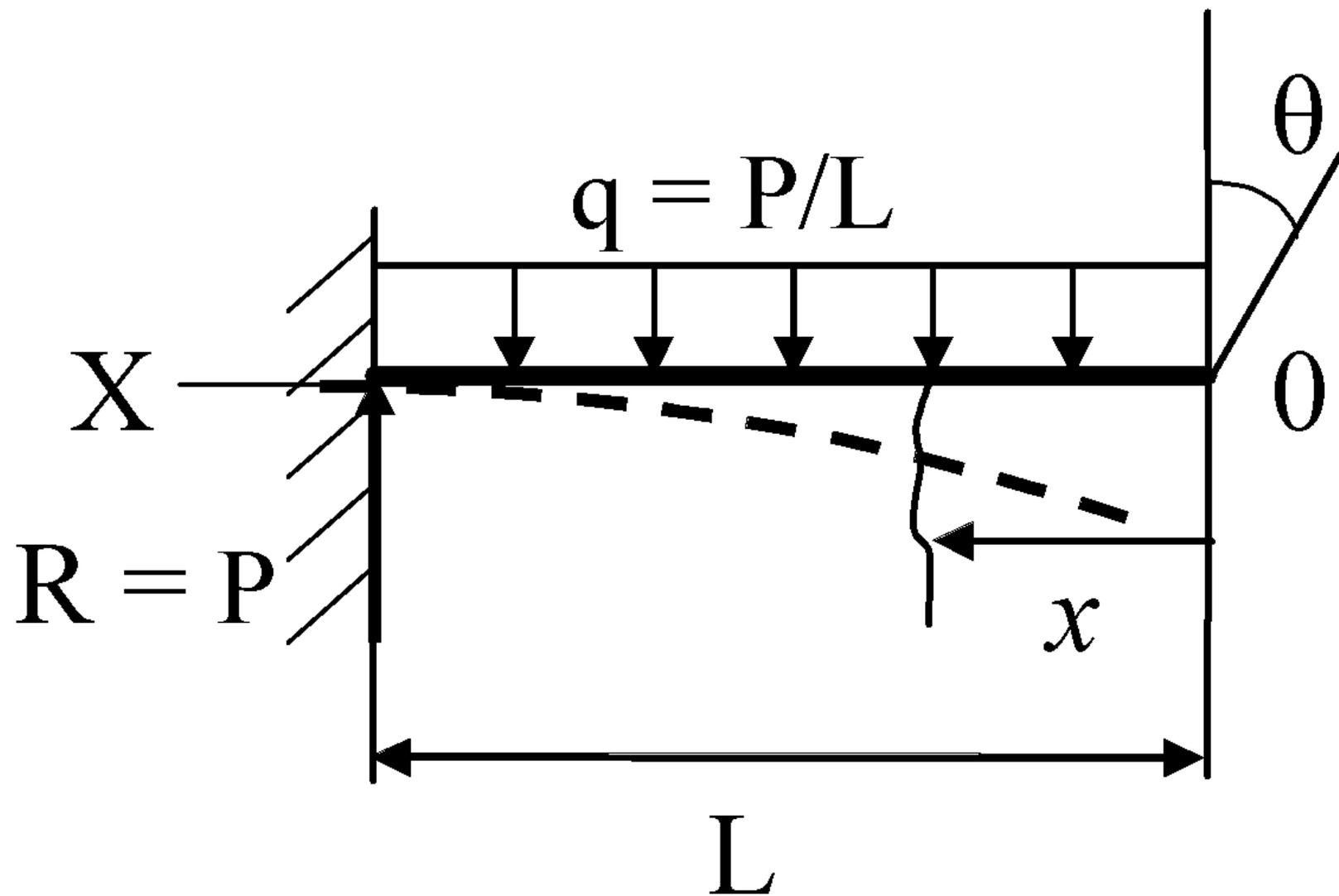
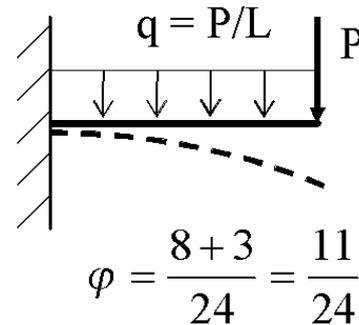
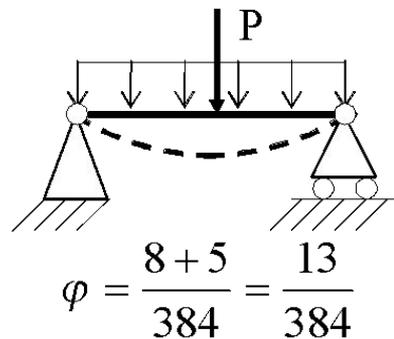
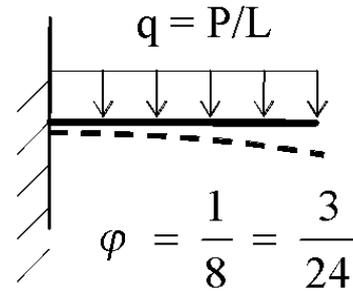
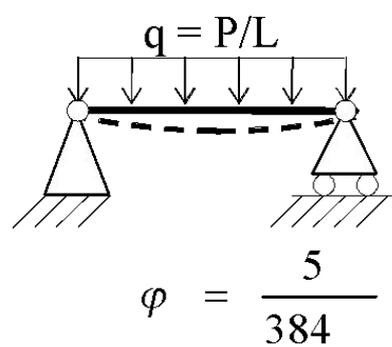
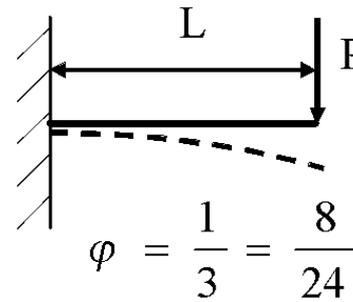
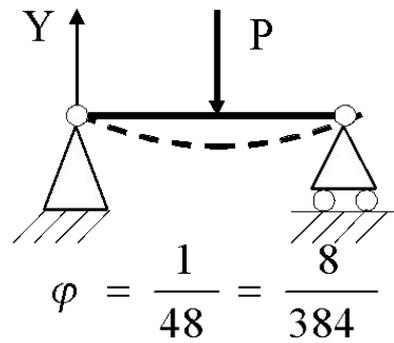


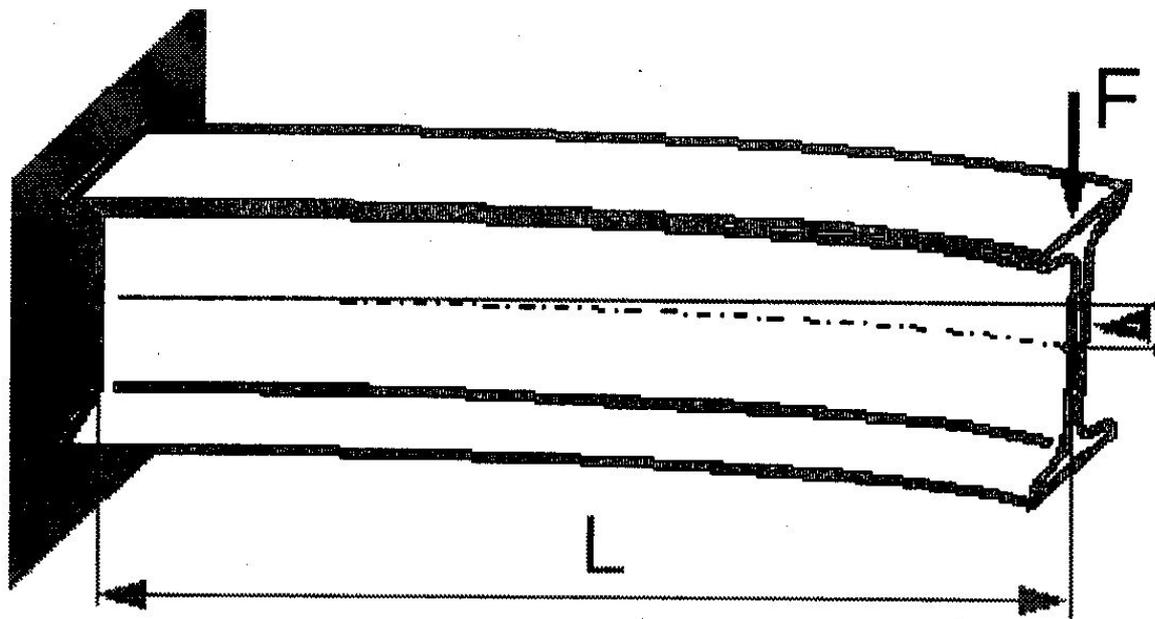
Рис. 2б. Консоль



# Рис. 3. Роль опор и схемы нагружения



# Стрела прогиба



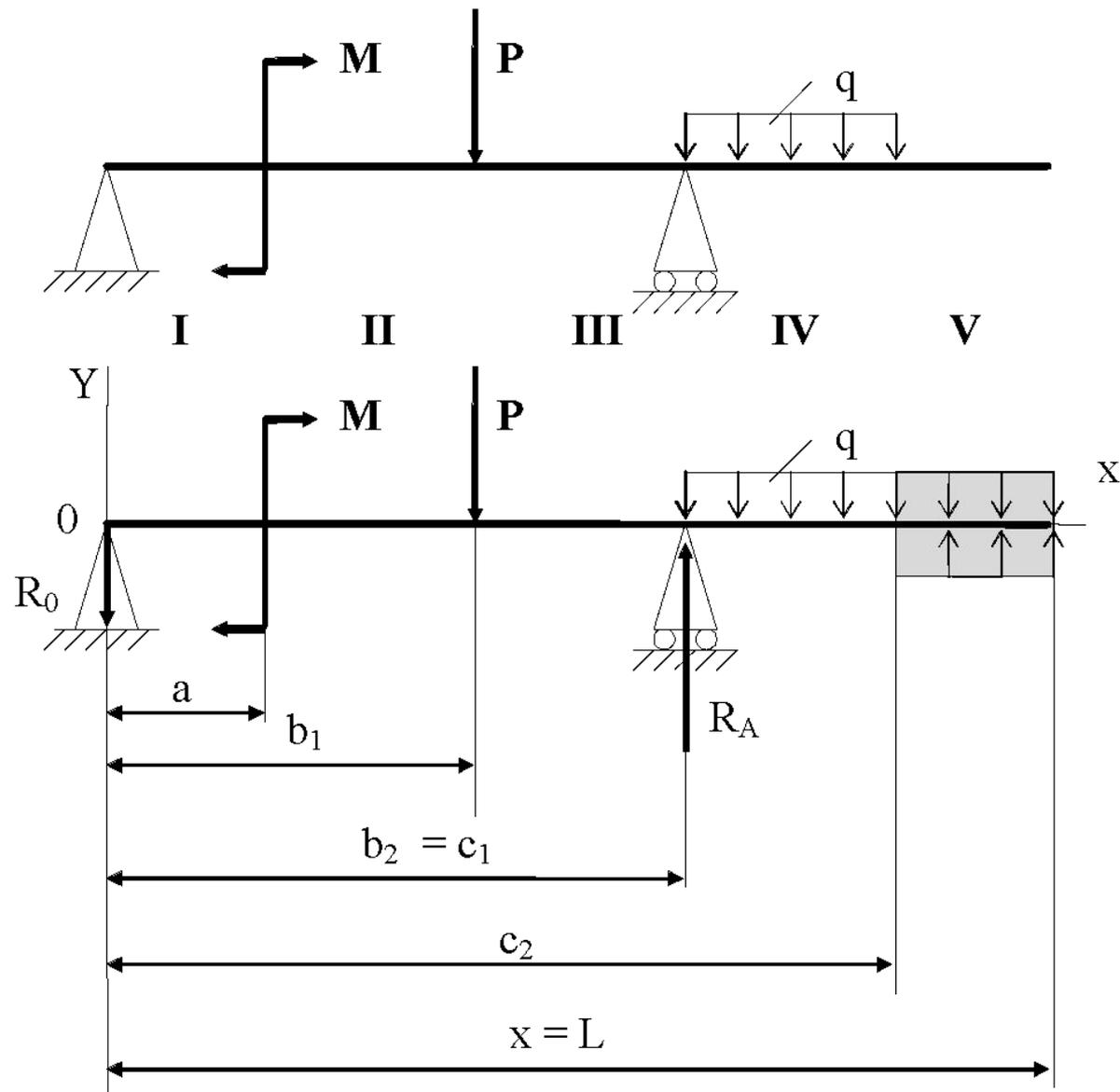
## 8.2. Метод начальных параметров

## Универсальная формула

$$EI_z Y(x) = EI_z Y_0 + EI_z \theta_0 x + \sum \frac{M(x-a)^2}{2} + \sum \frac{P(x-b)^3}{6} + \sum \frac{q(x-c)^4}{24}$$

$$EI_z Y' = EI_z \theta(x) = EI_z \theta_0 + \sum M(x-a) + \sum \frac{P(x-b)^2}{2} + \sum \frac{q(x-c)^3}{6}$$

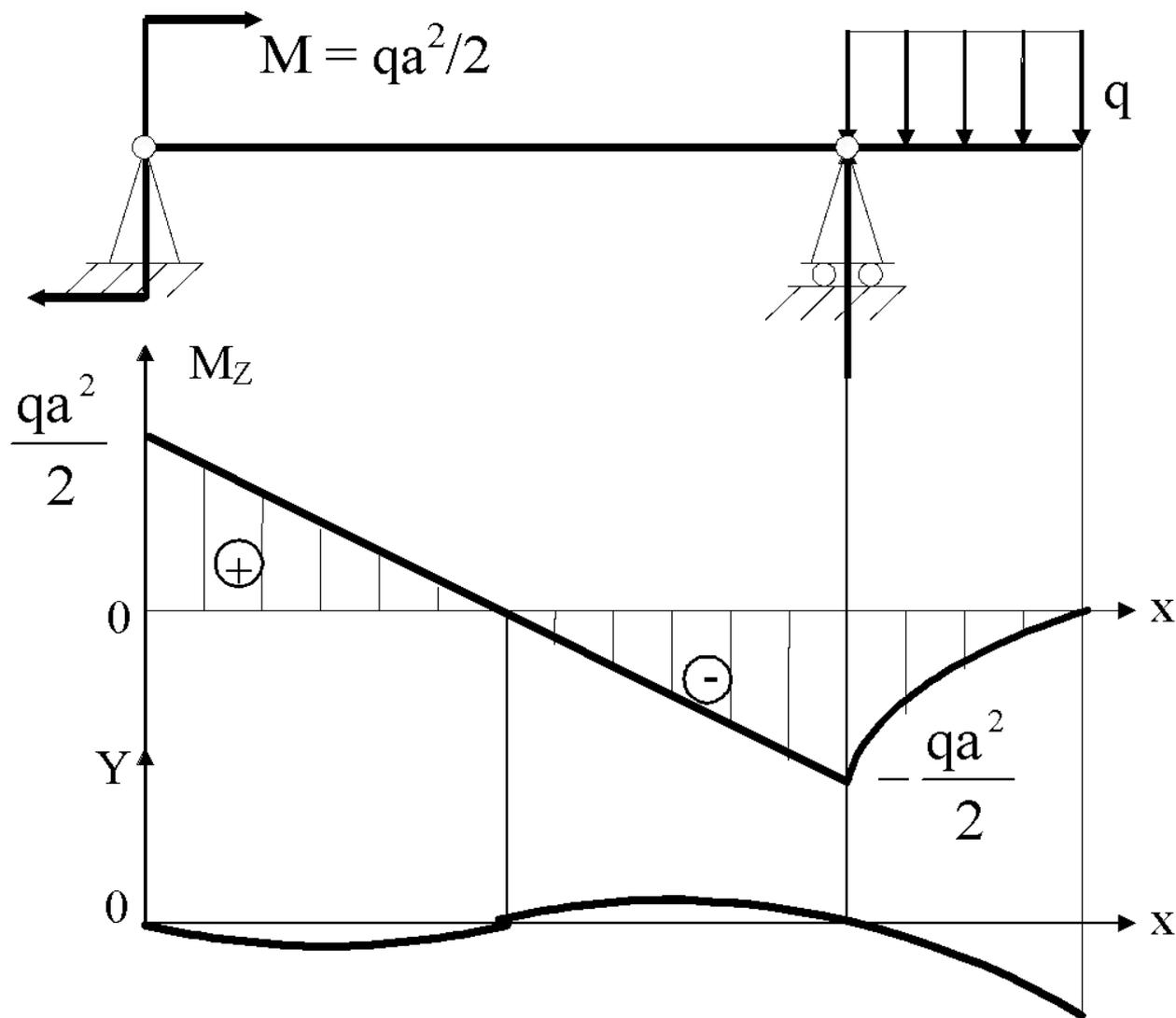
Рис. 4. Расчет по универсальной формуле ↑



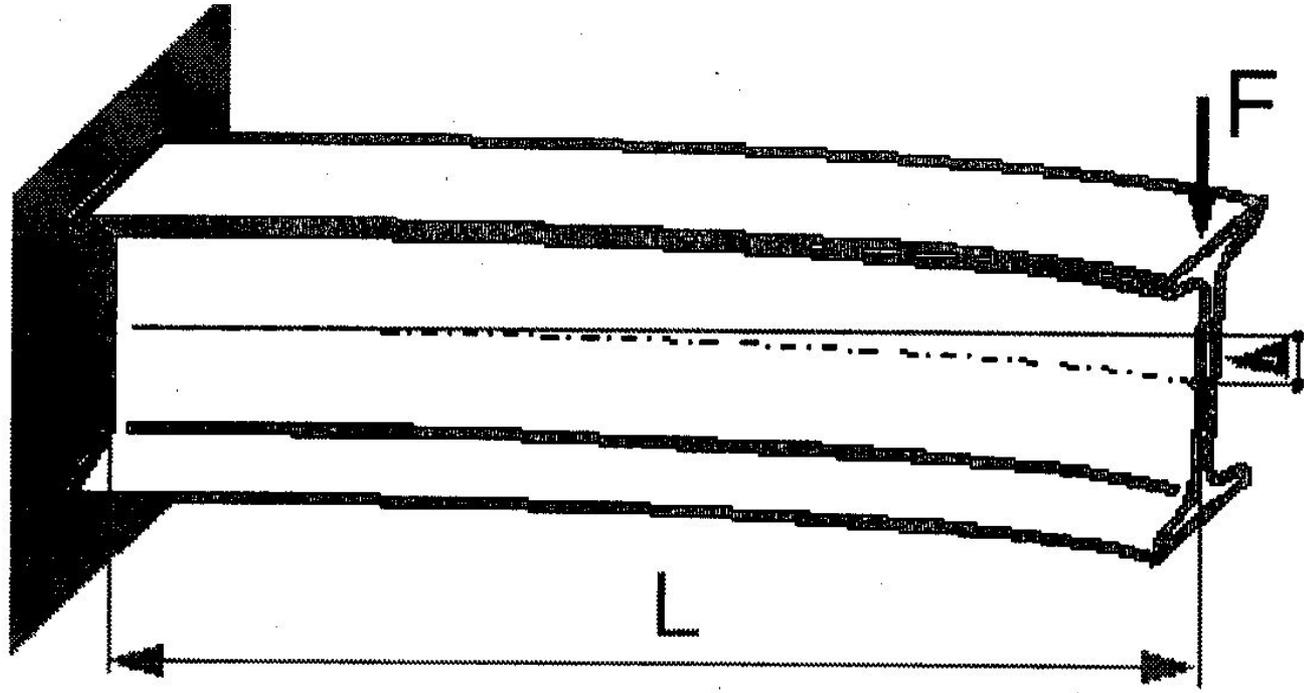
# Начальное значение угла поворота

$$EI_z Y(b_2) = EI_z \theta_0 b_2 - \frac{R_0 b_2^3}{6} + \frac{M(b_2 - a)^2}{2} - \frac{P(b_2 - b_1)^3}{6} = 0.$$
$$EI_z \theta_0 = \frac{1}{b_2} \left[ \frac{R_0 b_2^3}{6} - \frac{M(b_2 - a)^2}{2} + \frac{P(b_2 - b_1)^3}{6} \right].$$

# Изогнутая ось балки



# Стрела прогиба



Во сколько раз увеличится прогиб для балки, если удвоить ее длину?

## 8.3. Метод Мора

# Перемещения: прогиб или угол поворота

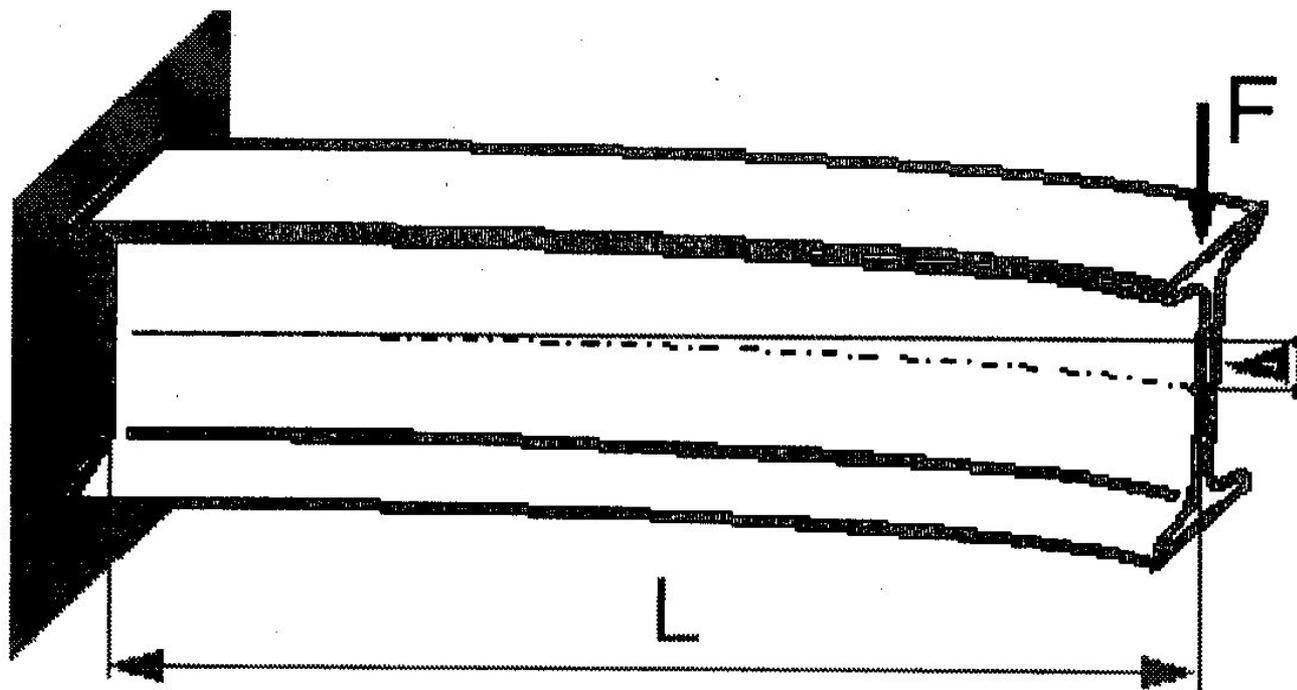
$$\delta = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \frac{M_z \bar{M}_i dx}{EI_{z_i}},$$

где  $M_z$  – изгибающий момент в заданном сечении,

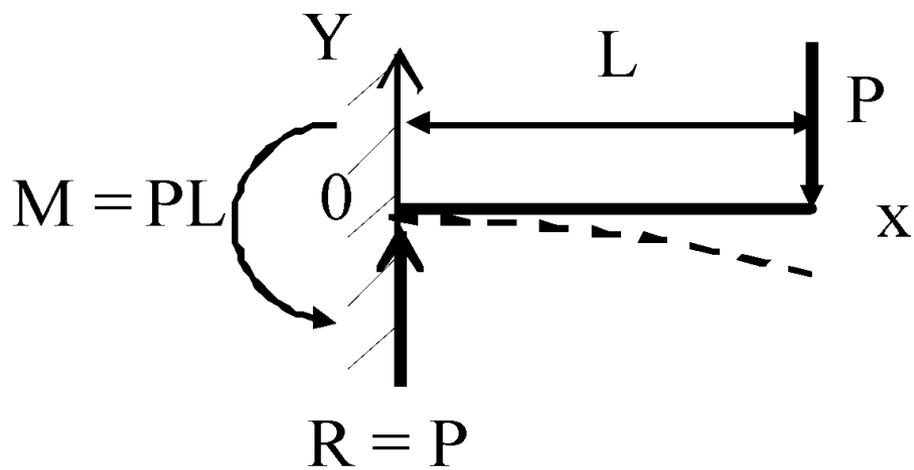
$$\bar{M}_i = \frac{M_p}{P_\phi} = \bar{M}_p = \frac{\text{изгибающий момент от фиктивной силы } P_\phi}{\text{сама фиктивная сила } P_\phi},$$

**или**

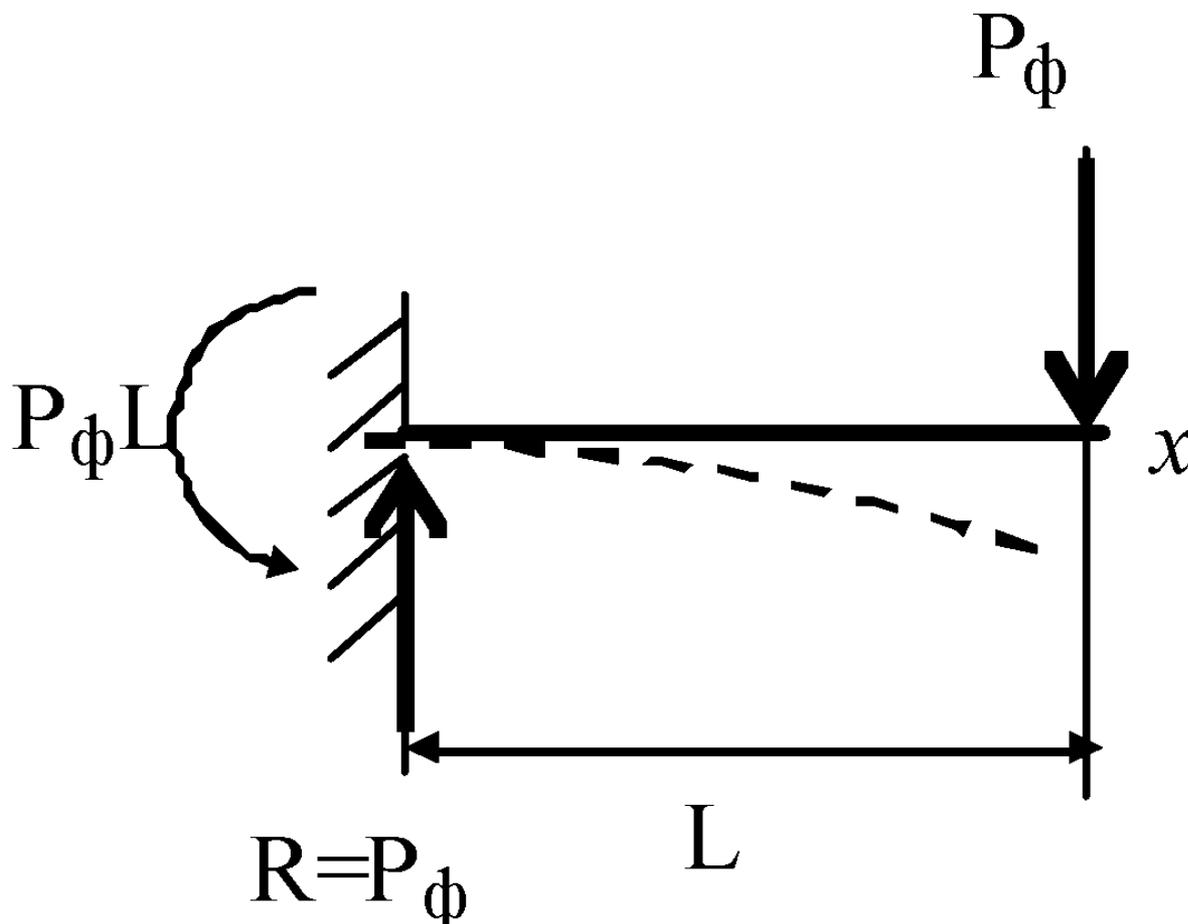
$$\bar{M}_i = \frac{M_m}{M_\phi} = \bar{M}_m = \frac{\text{изгибающий момент от фиктивного момента } M_\phi}{\text{сам фиктивный момент } M_\phi}.$$



# Примерчик 1



# Примерчик 2



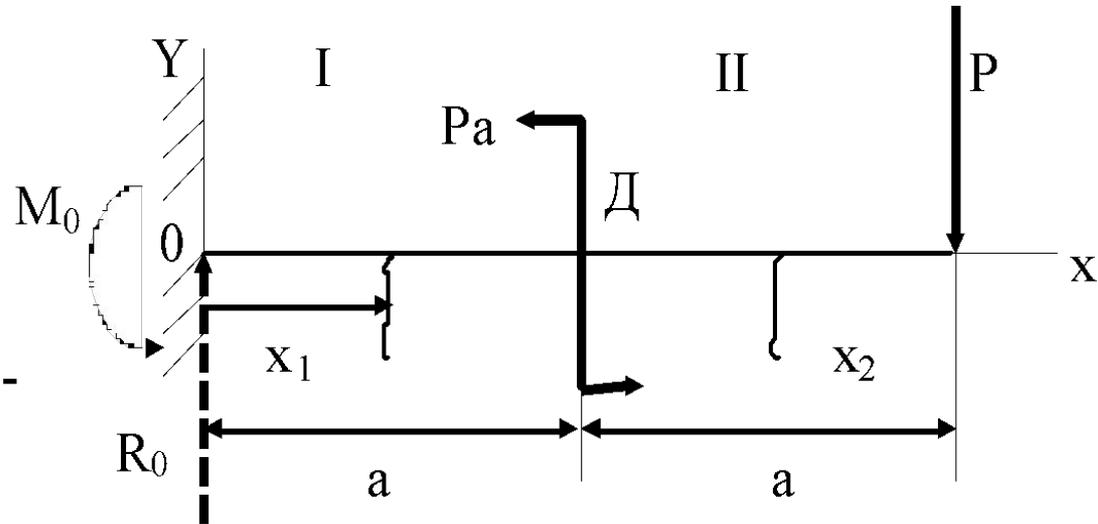


# Универсальная формула

$$EI_z Y(x) = \frac{-PL(x-0)^2}{2} + \frac{P(x-0)^3}{6}$$

$$EI_z Y(L) = -\frac{PL^3}{2} + \frac{PL^3}{6} = -\frac{PL^3}{3}$$

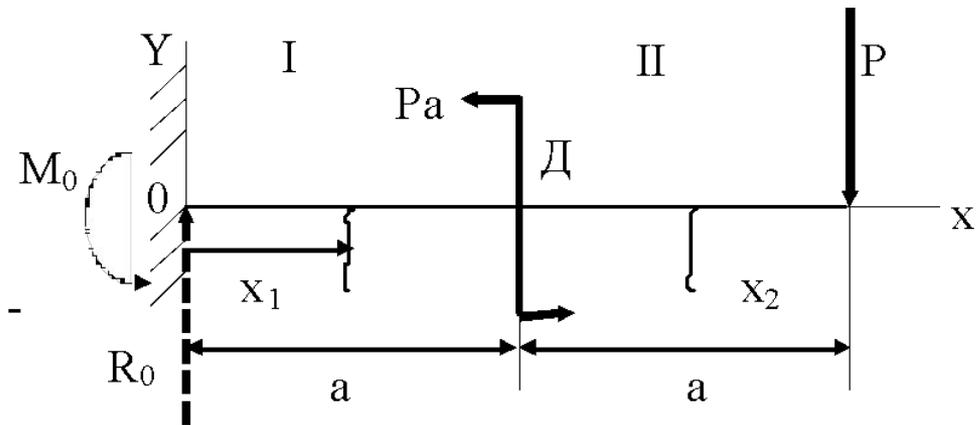
# Пример «Дубль»



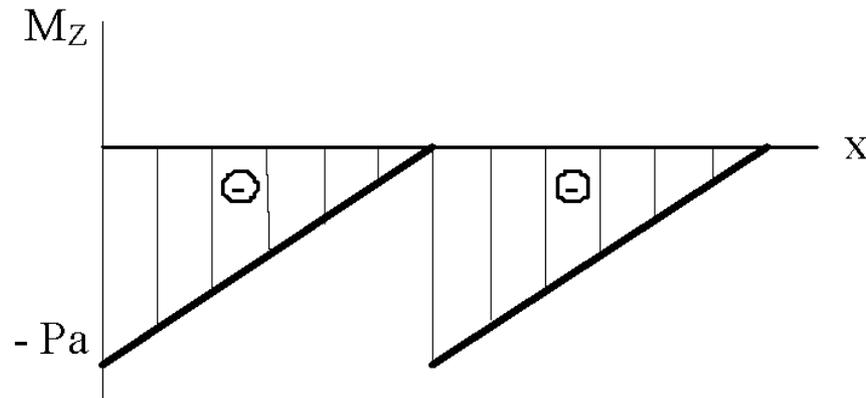
$$P = 600 \text{ кН}$$

$$a = 2 \text{ м}$$

Материал – сталь 20



$P = 600 \text{ кН}$   
 $a = 2 \text{ м}$   
 Материал – сталь 20



# Метод Мора

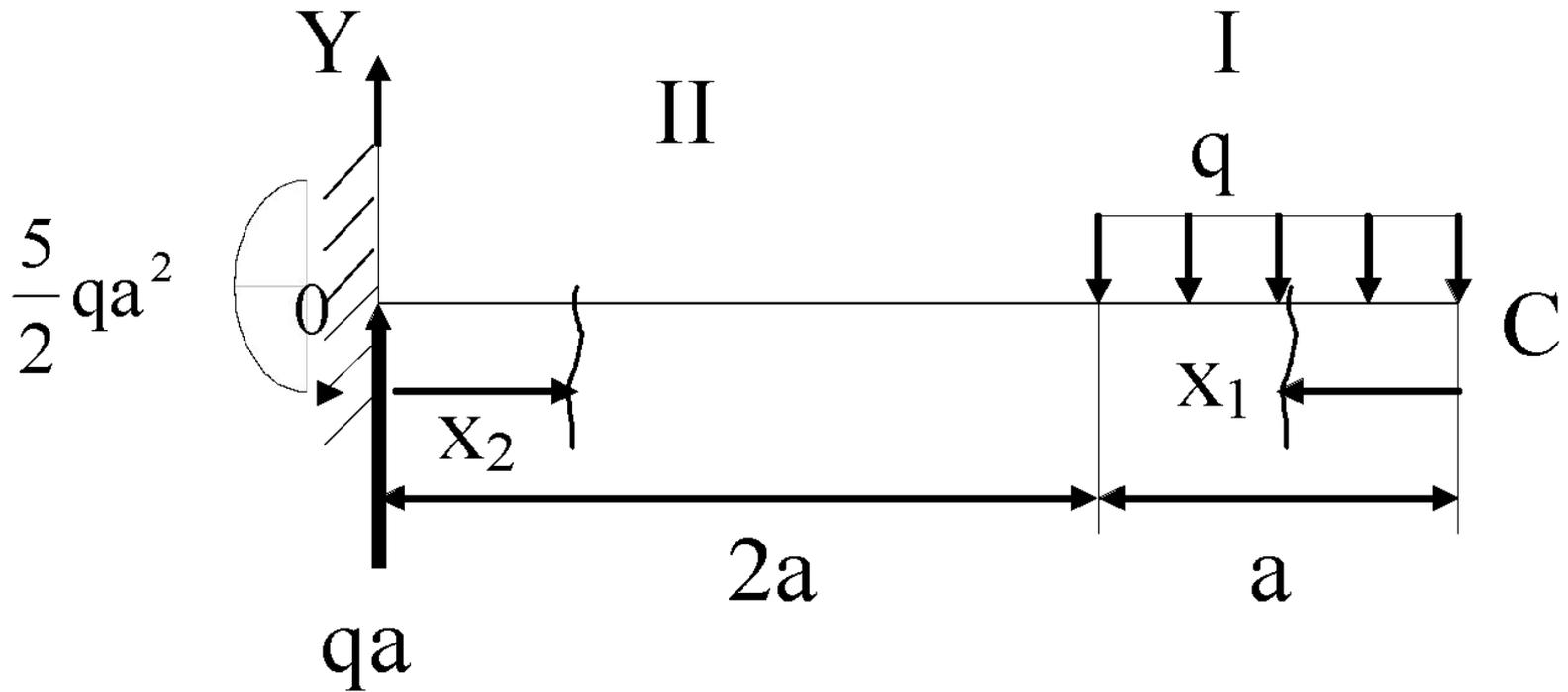
$$M_z = -PL + Px,$$

$$M_p = -P_\phi L + P_\phi x; \quad \bar{M}_p = -L + x;$$

$$\delta = \int_0^L (-L + x) \cdot (-L + x) dx = P \int_0^L (L^2 - 2Lx + x^2) dx =$$

$$= P \left( L^2 x - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^L = P \left( L^3 - L^3 + \frac{L^3}{3} \right) = \frac{PL^3}{3}$$

Рис. 5. Консоль с распределенной нагрузкой ↑



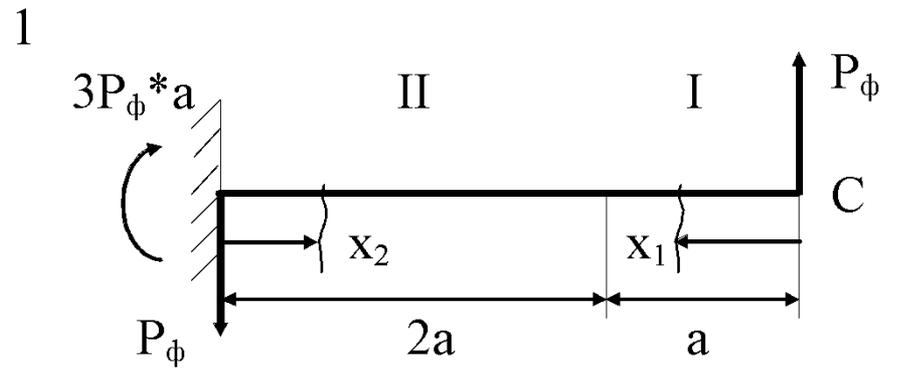
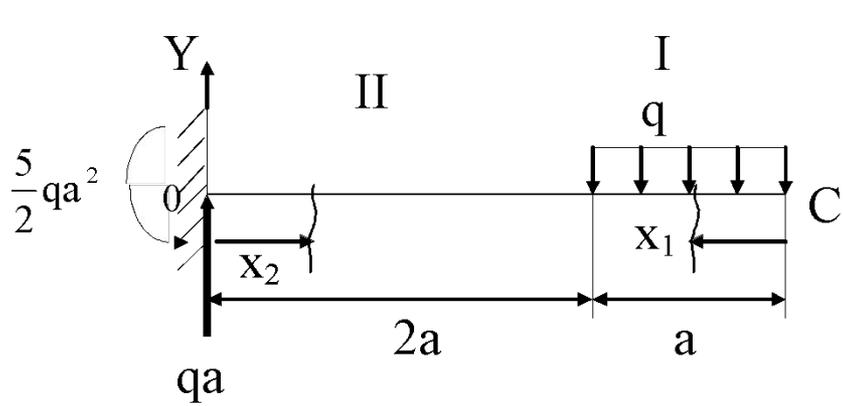


Таблица 175Г

Функции интеграла Мора

Уча- сток	$M_z$	$M_P$	$\bar{M}_P$	$EI_z Y_i$
--------------	-------	-------	-------------	------------

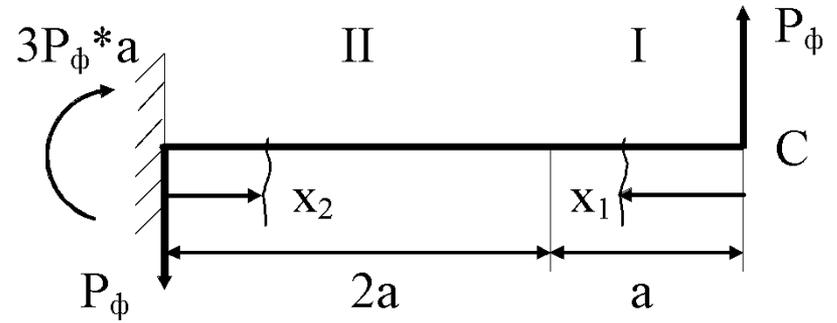
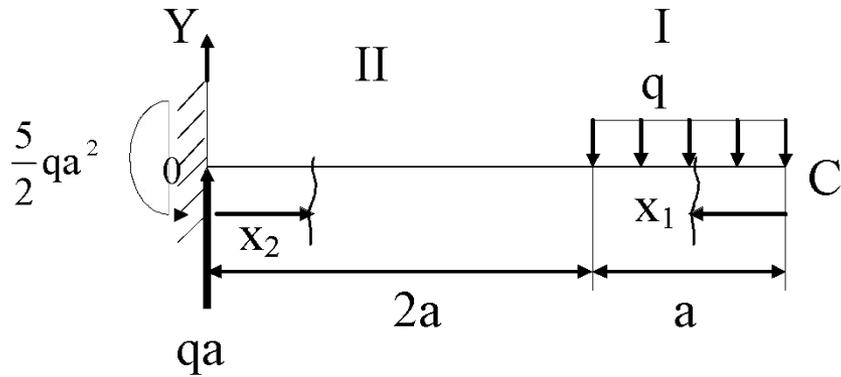


Таблица 175Т

## Функции интеграла Мора

Уча- сток	$M_z$	$M_P$	$\bar{M}_P$	$EI_z Y_i$
I	$-\frac{q x_1^2}{2}$	$+ P_\phi x_1$	$+ x_1$	$\int_0^a \left( -\frac{q x_1^2}{2} \right) x_1 dx_1$
II	$-\frac{5}{2} qa^2 + qax_2$	$+ 3P_\phi a - P_\phi x_2$	$+ 3a - x_2$	$\int_0^{2a} \left( -\frac{5}{2} qa^2 + qax_2 \right) (3a - x_2) dx_2$

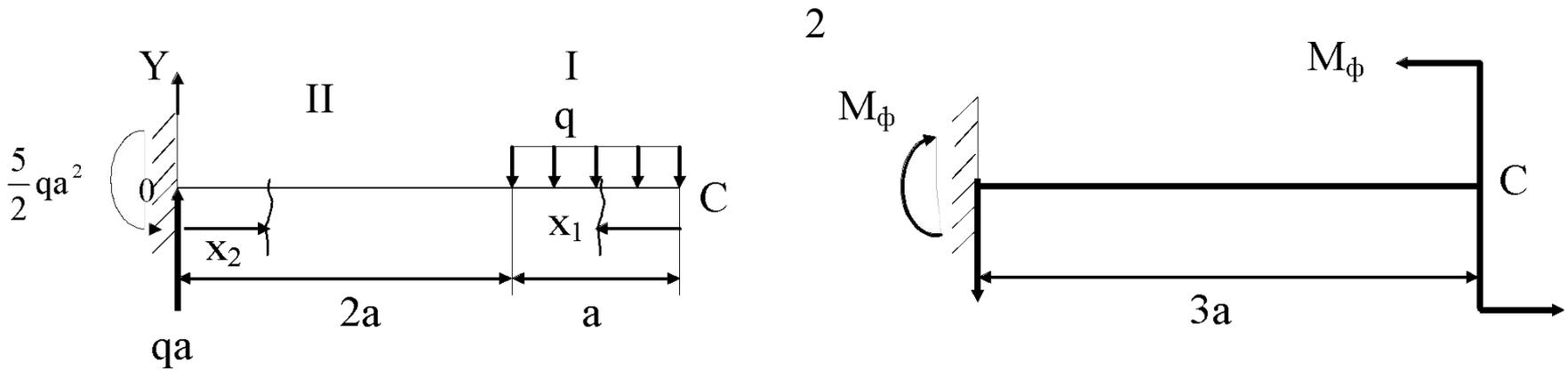


Таблица 175Г

Функции интеграла Мора

Уча- сток	$M_z$	$M_\phi$	$\bar{M}_\phi$	$EI_z\theta_i$
--------------	-------	----------	----------------	----------------

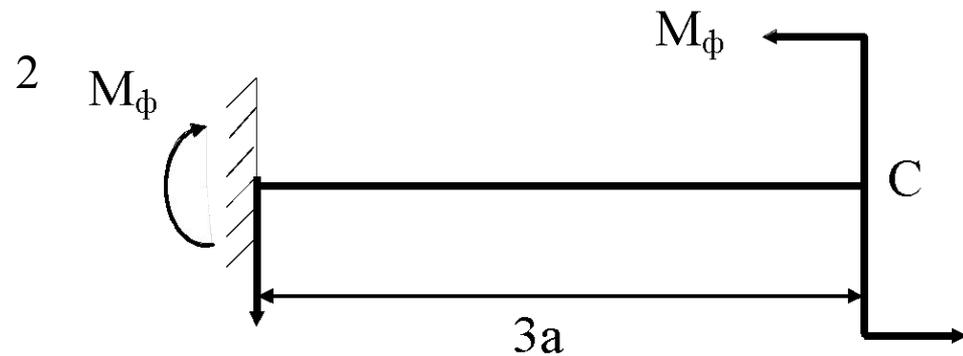
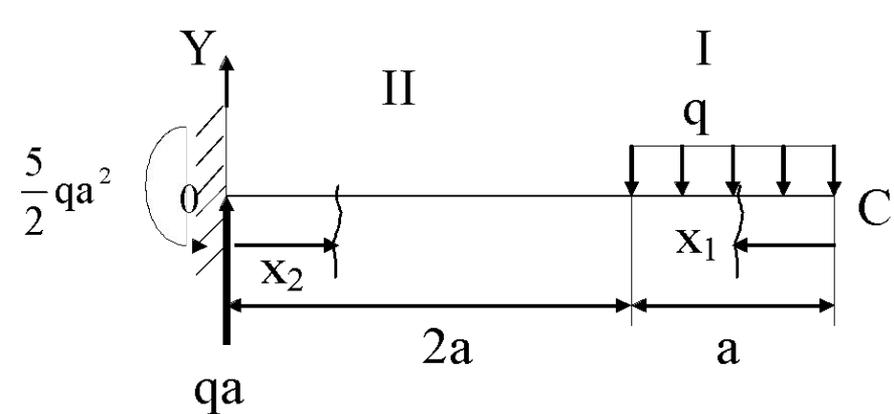


Таблица 175Т

Функции интеграла Мора

Уча- сток	$M_Z$	$M_\Phi$	$\bar{M}_\Phi$	$EI_Z\theta_i$
I	$-\frac{q x_1^2}{2}$	$M_\Phi$	1	$\int_0^a \left( -\frac{q x_1^2}{2} \right) dx_1$
II	$-\frac{5}{2} qa^2 + qax_2$	$M_\Phi$	1	$\int_0^{2a} \left( -\frac{5}{2} qa^2 + qax_2 \right) dx_2$

3

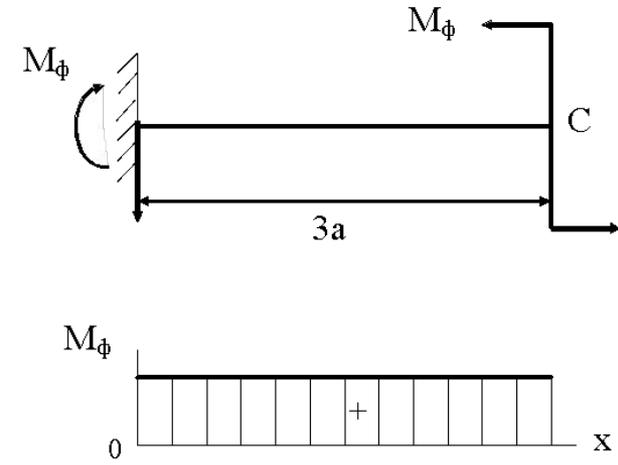
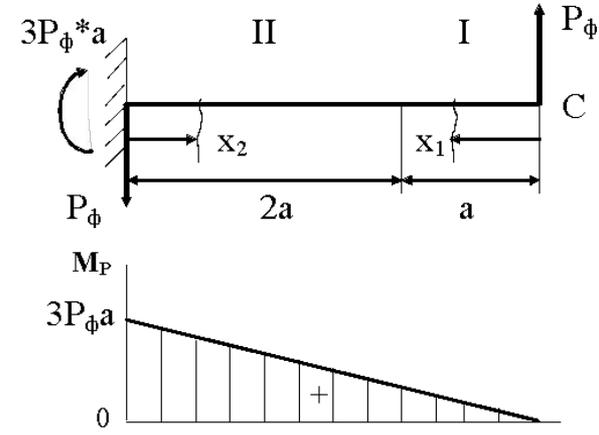
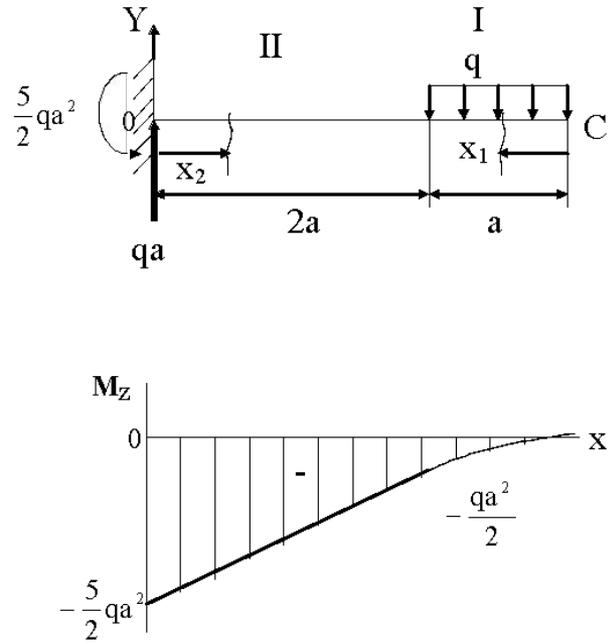
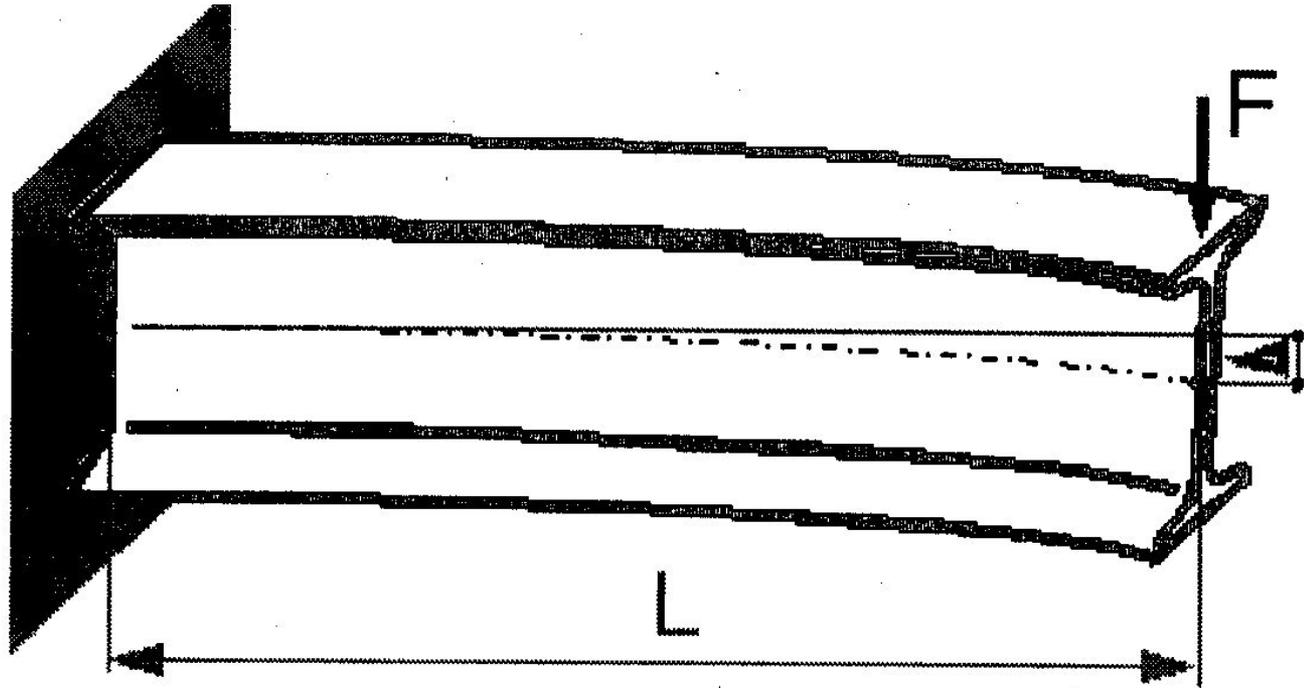


Таблица 175Т

Функции интеграла Мора

Уча- сток	$M_z$	$M_p$	$\bar{M}_p$	$EI_z Y_i$	$M_\phi$	$\bar{M}_\phi$	$EI_z \theta_i$
I	$-\frac{q x_1^2}{2}$	$+ P_\phi x_1$	$+ x_1$	$\int_0^a \left( -\frac{q x_1^2}{2} \right) x_1 dx_1$	$M_\phi$	1	$\int_0^a \left( -\frac{q x_1^2}{2} \right) dx_1$
II	$-\frac{5}{2} q a^2 + q a x_2$	$+ 3P_\phi a - P_\phi x_2$	$+ 3a - x_2$	$\int_0^{2a} \left( -\frac{5}{2} q a^2 + q a x_2 \right) (3a - x_2) dx_2$	$M_\phi$	1	$\int_0^{2a} \left( -\frac{5}{2} q a^2 + q a x_2 \right) dx_2$

# Упражнение 1



Во сколько раз увеличится прогиб для балки, если удвоить ее длину?

Упражнение 2:  
определить стрелу прогиба

