МАТЕМАТИКА, ч.2

Лекция 1

Лекцию читает

к.т.н., доцент

БОБРОВА

ЛЮДМИЛА ВЛАДИМИРОВНА

Кафедра информатики и компьютерных технологий

Рекомендуемая литература:

1. Ткаченко, Г. Г., Боброва Л.В. Математика, ч. 2. Методы оптимизации: учебно-методический комплекс. – СПб: Изд-во СЗТУ, 2009.

2. Ткаченко Г.Г. Математика, ч. 2. Методы оптимизации: учебное пособие. – СПб: Изд-во СЗТУ, 2007.

3. Таха Х.А. Введение в исследование операций. - М.: – Вильямс, 2008.

Оптимизация – это выбор наилучшего в некотором смысле решения.

Математическое (оптимальное) программирование - раздел математики, разрабатывающий теорию и методы оптимизации управленческих и экономических задач.

1. Задача распределения ресурсов

Пример 1

Для производства двух видов продукции фирма использует два вида ресурсов:

ресурс1 – сырье,

ресурс 2 – время изготовления продукции на оборудовании.

Запасы ресурсов, нормы затрат каждого ресурса на единицу каждого продукта и рыночные цены приведены в табл.1.

Таблица 1

Ресурс	Нормы затрат на ед. продукции		Запас ресурса
	продукт1	продукт2	
сырье	$a_{11}=5$	$a_{12}=10$	$b_1=1000$
время изготовления	$a_{21}=0,1$	$a_{22}=0,3$	$b_2=25$
цена за ед. продукции	$c_1=40$	$c_2=100$	

Требуется найти план выпуска продукции, который обеспечивает **максимальную** выручку.

1.1 Построение математической модели

Обозначим: x_1 – план выпуска продукции 1,

x_2 – план выпуска продукции 2.

Тогда затраты сырья и времени изготовления, необходимые для реализации плана x_1, x_2, будут равны соответственно:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 5x_1 + 10x_2$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0{,}1x_1 + 0{,}3x_2$$

Ресурс	Нормы затрат на ед. продукции		Запас ресурса
	продукт1	продукт2	
сырье	a_{11} =5	a_{12} =10	b_1=1000
время изготовления	a_{21} =0,1	a_{22} =0,3	b_2=25
цена за ед. продукции	c_1=40	c_2 =100	

План $X = (x_1, x_2)$ будет **допустимым**,
если затраты каждого ресурса
не превосходят их запасов,
т. е. выполняются неравенства:

$$5x_1 + 10x_2 \le 1000$$

$$0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 \le 25$$

Ресурс	Нормы затрат на ед. продукции		Запас ресурса
	продукт1	продукт2	
сырье	a_{11} =5	a_{12} =10	b_1=1000
время изготовления	a_{21} =0,1	a_{22} =0,3	b_2=25
цена за ед. продукции	c_1=40	c_2 =100	

Целевой функцией будет общая стоимость реализации плана (выручка) x_1, x_2:

$$Z=40x_1+100x_2.$$

Ресурс	Нормы затрат на ед. продукции		Запас ресурса
	продукт1	продукт2	
сырье	a_{11} =5	a_{12} =10	b_1=1000
время изготовления	a_{21} =0,1	a_{22} =0,3	b_2=25
цена за ед. продукции	c_1=40	c_2 =100	

Итак, необходимо найти план выпуска продукции x_1, x_2, который обеспечивает максимальную выручку

$$max\ Z = 40\ x_1 + 100\ x_2,$$

при выполнении ограничений

$$5\ x_1 + 10\ x_2 \le 1000,$$
$$0{,}1\ x_1 + 0{,}3\ x_2 \le 25,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Это **стандартная задача** линейного программирования

Пример 2

Проверить является ли план $x_1=10$, $x_2=100$ допустимым.

Решение. Найдем затраты ресурсов на производство. Для выполнения этого плана потребуется

$5x_1+10x_2 = 5\cdot 10 + 10\cdot 100 =$ **1050** кг сырья и

$0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 = 0{,}1\cdot 10 + 0{,}3\cdot 100 =$ **31** час работы оборудования.

Такой план выпуска **недопустим**, так как для его выполнения недостаточно ресурсов.

$$5x_1 + 10x_2 \le \mathbf{1000},$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 \le \mathbf{25},$$

Самостоятельная работа 1

Задание. В условиях *Примера 1* проверить допустимость плана решения при $x_1=20$, $x_2= 50$

Варианты ответов:

А. Допустимый.

В. Недопустимый.

$$5\,x_1 + 10\,x_2 \le \mathbf{1000},$$
$$0{,}1\,x_1 + 0{,}3\,x_2 \le \mathbf{25},$$

Сверим ответы?

$x_1=20, \quad x_2=50$

Для выполнения этого плана потребуется

$5x_1+10x_2 = 5\cdot 20+10\cdot 50 = \mathbf{600}$ кг сырья и

$0{,}1x_1+0{,}3x_2 = 0{,}1\cdot 20+0{,}3\cdot 50 = \mathbf{17}$ час работы оборудования.

План выпуска **допустим**,
для его выполнения достаточно ресурсов.

$$5x_1 + 10x_2 \le \mathbf{1000},$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 \le \mathbf{25},$$

Пример 3

Для задачи Примера 1 найти выручку от реализации плана x_1=10, x_2= 100.

Решение.

Выручка определяется целевой функцией

$$Z=40x_1+100x_2.$$

Значит,

Z=40*10+100*100 = 10400 (у.е.).

Самостоятельная работа 2

Задание. В условиях *Примера 1* найти выручку от реализации плана $x_1=20$, $x_2=50$

Варианты ответов:

A. 3000 **B. 3800**

C. 5800 **D. 2900**

$$Z=40x_1+100x_2$$

Сверим ответы?

$x_1 = 20, \quad x_2 = 50$

Выручка определяется целевой функцией:

$$Z = 40 * 20 + 100 * 50 = 5800 \text{ (у.е.)}.$$

$$Z = 40x_1 + 100x_2$$

Пример 4

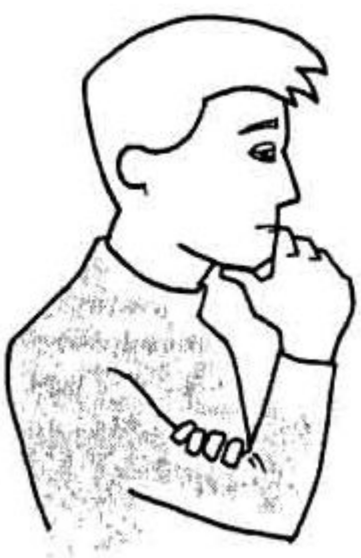
Для задачи Примера 1 найти остаток ресурсов при плане $x_1=50$, $x_2= 50$.

Решение

Для выполнения этого плана потребуется

$5x_1+10x_2 = 5\cdot 50 +10\cdot 50 = \mathbf{750}$ кг сырья и

$0{,}1x1+ 0{,}3x2 = 0{,}1\cdot 50 + 0{,}3\cdot 50 = \mathbf{20}$ час работы оборудования.



Остатки ресурсов:

$s_1= 1000 – 750 = 250$

$s_2 = 25 – 20 = 5$

$$5\,x_1 +10\,x_2 \le 1000,$$
$$0{,}1\,x_1 + 0{,}3\,x_2 \le 25,$$
$$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0.$$

Самостоятельная работа 3

Задание. В условиях *Примера 1* найти остаток ресурсов при плане $x_1=30$, $x_2=70$

Варианты ответов:

A. 150; 3
B. 150; 1
C. 250; 1
D. 250; 3

$$5x_1 + 10x_2 \le 1000,$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 \le 25,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Сверим ответы?

$x_1 = 30, \quad x_2 = 70$

Для выполнения этого плана потребуется

$5x_1 + 10x_2 = 5 \cdot 30 + 10 \cdot 70 =$ **850** кг сырья и

$0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 = 0{,}1 \cdot 30 + 0{,}3 \cdot 70 =$ **24** час работы оборудования.

Остатки ресурсов:

$s_1 = 1000 - 850 = 150$

$s_2 = 25 - 24 = 1$

$$5x_1 + 10x_2 \le 1000,$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 \le 25,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

1.2. Определение оптимального плана производства графическим методом

Построим множество допустимых решений.

Проведем прямые

$5\ x_1+10\ x_2 = 1000$: $(x_1=0,\quad x_2=1000/10=100,$

$x_2=0,\ \ x_1=1000/5=200.)$

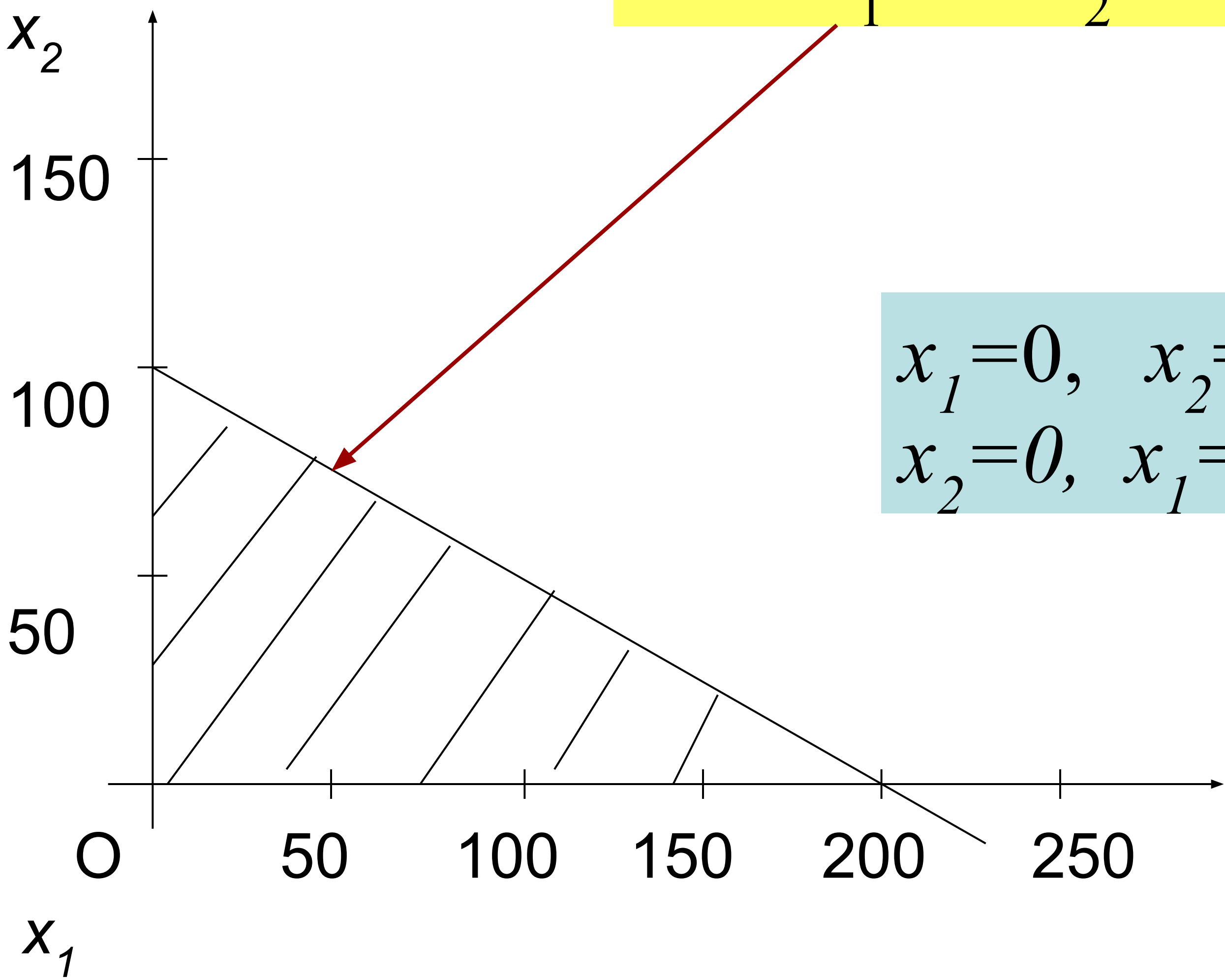
$0{,}1\ x_1+0{,}3\ x_2 = 25$: $(x_1=0,\quad x_2=25/0{,}3=250/3=83{,}3,$

$x_2=0,\ \ x_1=25/0{,}1=250).$

$$5\ x_1 +10\ x_2 \le 1000,$$
$$0{,}1\ x_1 + 0{,}3\ x_2 \le 25,$$
$$x_1\ge 0, \quad x_2\ge 0.$$

Строим прямую

$$5\,x_1 + 10\,x_2 = 1000$$



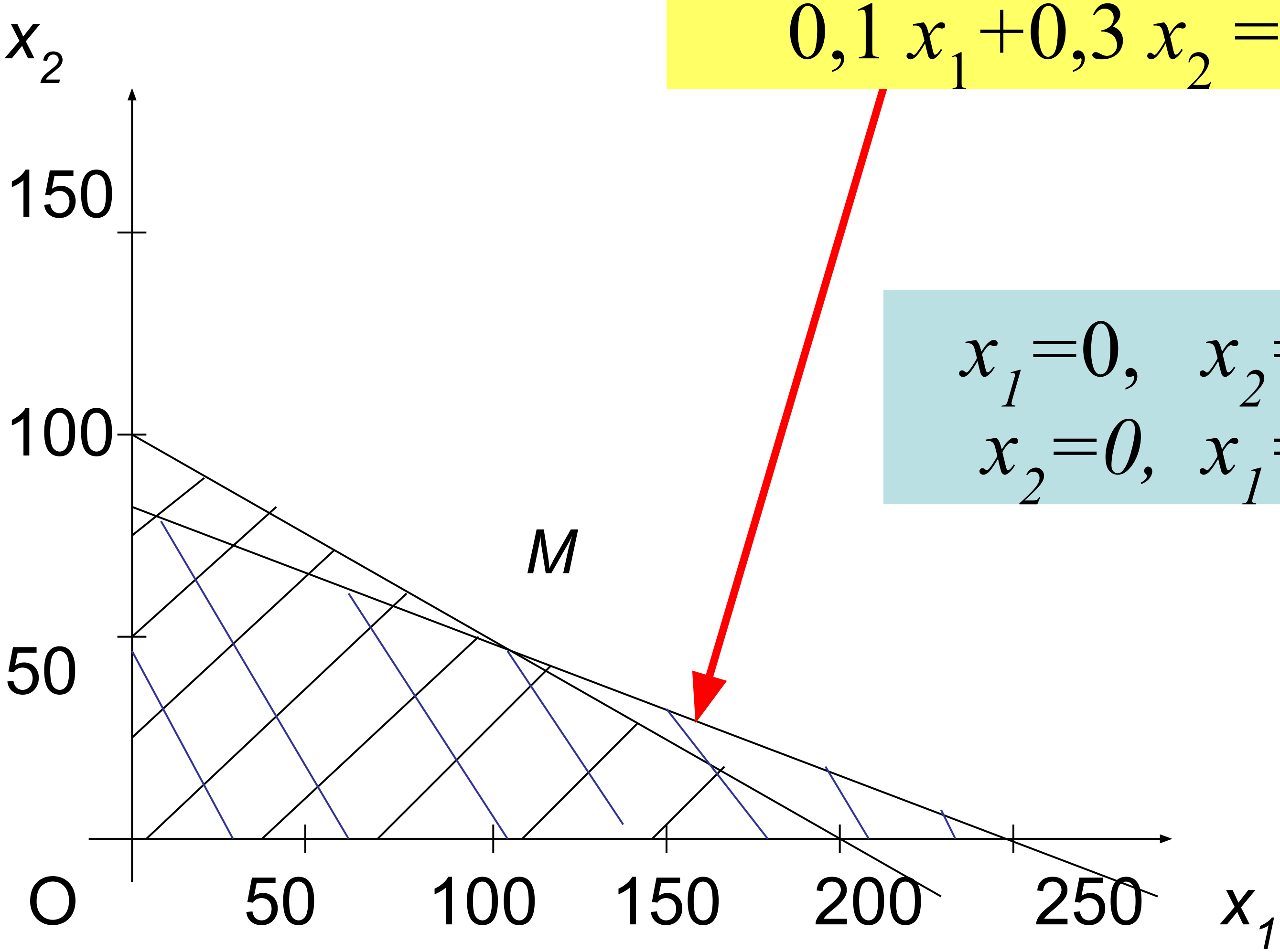
$x_1 = 0, \quad x_2 = 100,$

$x_2 = 0, \quad x_1 = 200.$

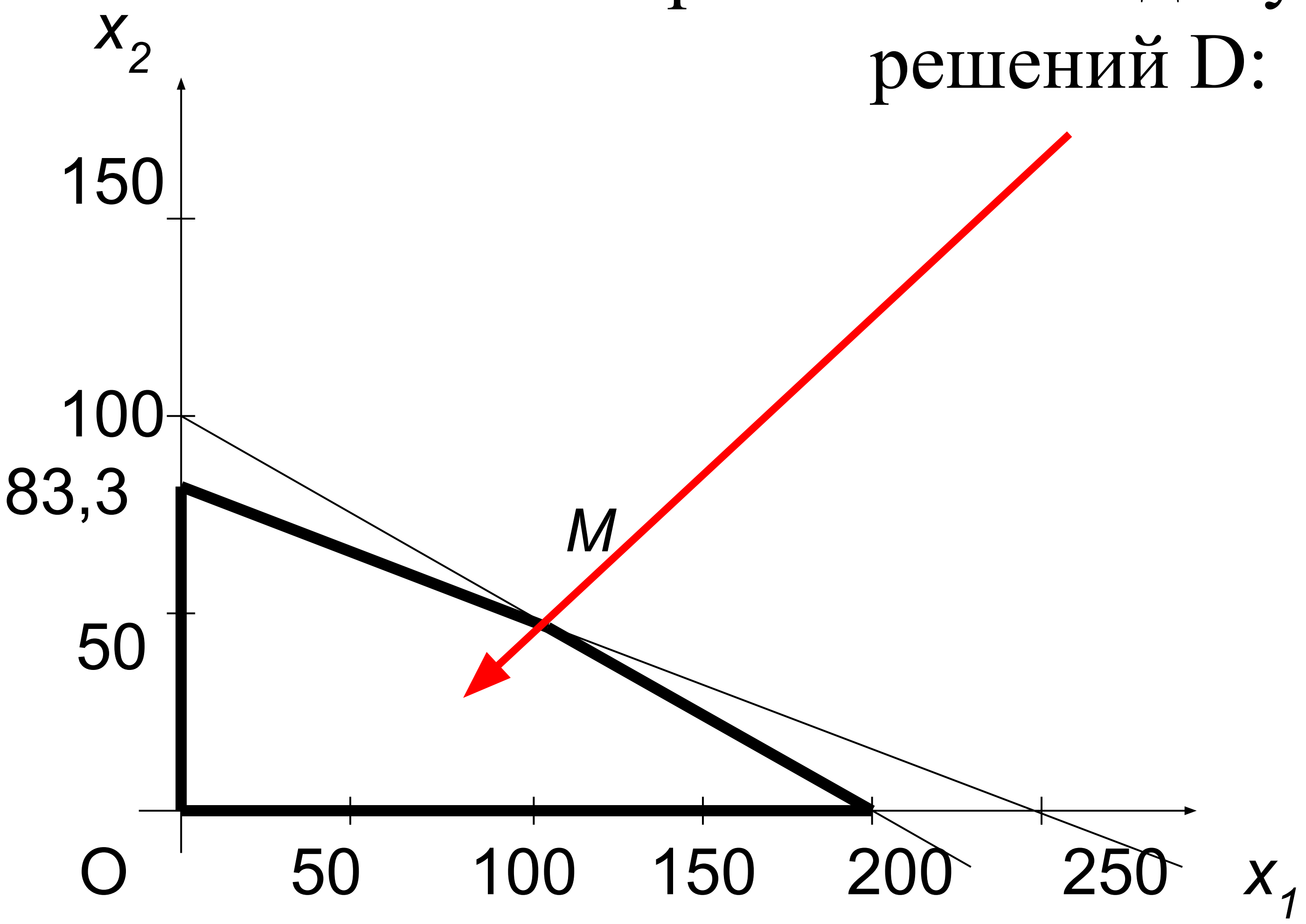
Строим прямую

$$0{,}1\ x_1 + 0{,}3\ x_2 = 25$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 83{,}3,$$
$$x_2 = 0, \quad x_1 = 250.$$



Строим область допустимых решений D:



Для нахождения оптимального решения:

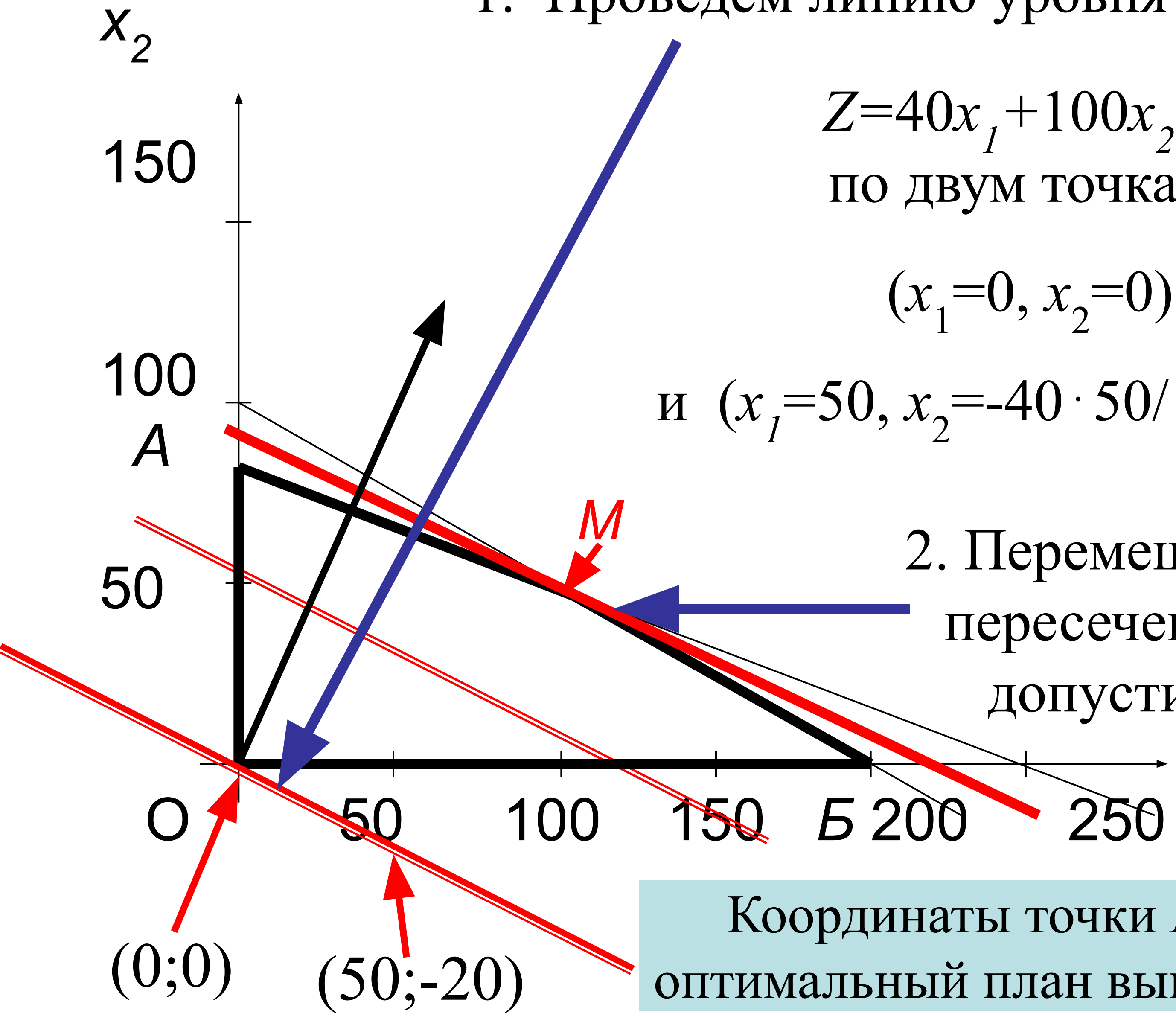
1. Проведем линию уровня

$Z=40x_1+100x_2=0$
по двум точкам:

$(x_1=0,\ x_2=0)$

и $(x_1=50,\ x_2=-40\cdot 50/100=-20)$.

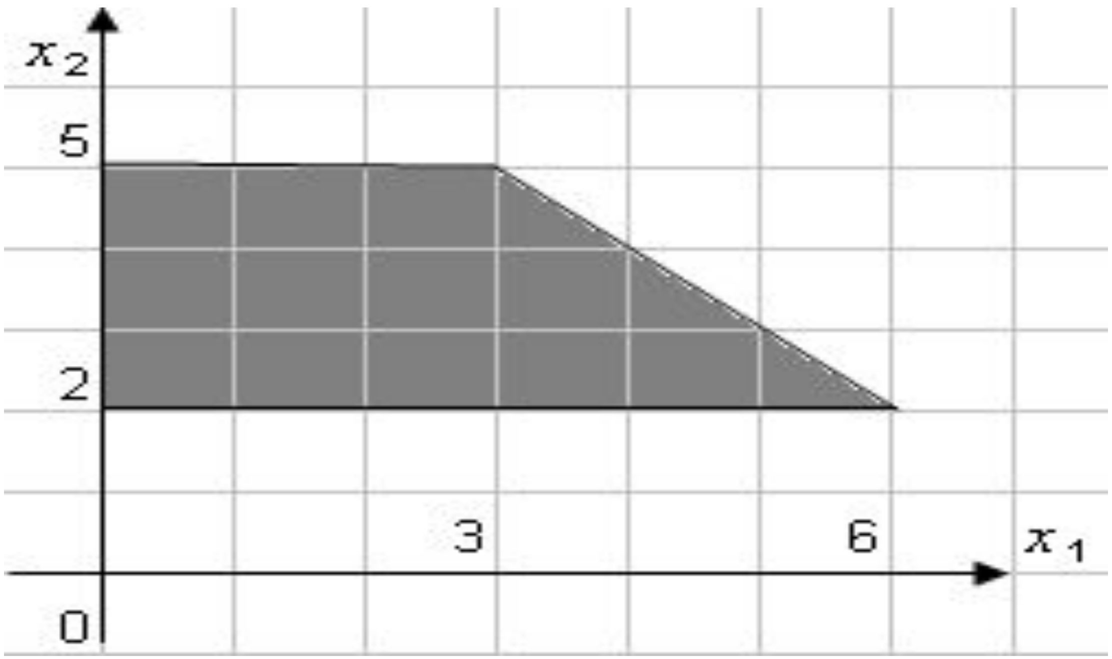
2. Перемещаем ее вверх до пересечения с границей допустимой области



Координаты точки M определяют оптимальный план выпуска продукции.

Самостоятельная работа 4

Задание. Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид:



Тогда максимальное значение функции $Z = 2x_1 + 2x_2$ равно: **A**. 11. **B**. 13. **C**. 16. **D.** 8.

1.3. Приведение задачи Примера 1 к канонической форме.

Для этого введем две дополнительные переменные: s_1 и s_2
(s_1 - остаток сырья, s_2- остаток времени изготовления).

Тогда получим **каноническую форму** задачи:
найти план x_1, x_2, s_1, s_2 , который дает максимальную выручку

$$Z=40 \cdot x_1+100 \cdot x_2+0 \cdot s_1+0 \cdot s_2 \quad (1)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} &5x_1 + 10x_2 + s_1 = 1000 \\ &0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 + s_2 = 25 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &5\,x_1 + 10\,x_2 \leq 1000, \\ &0{,}1\,x_1 + 0{,}3\,x_2 \leq 25, \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$Z=40x_1+100x_2$$

1.4.Определение всех базисных решений

Ограничения (2) образуют систему **двух** уравнений с **четырьмя неизвестными.**

Среди бесконечного множества решений этой системы ***базисные решения*** получаются следующим образом.

Две переменных приравняем к 0.

Эти переменные назовем ***свободными***.

Значения остальных переменных получаем из решения системы.

Эти переменные назовем ***базисными***.

Базисное решение называется ***допустимым***, если оно неотрицательно.

1. Пусть x_1, x_2 – свободные переменные.
Подставляя значения $x_1 = 0$, $x_2 = 0$
в (2) , получаем систему уравнений:

$$s_1 = 1000$$
$$s_2 = 25$$

.

Следовательно, базисное решение имеет вид:

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 1\,000$, $s_2 = 25$.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 + s_1 &= 1000 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 + s_2 &= 25 \end{aligned} \qquad (2)$$

$$Z = 40x_1 + 100x_2$$

Базисное решение означает, что первой и второй продукт не производятся.

Это базисное решение ***является допустимым***

Выручка от реализации этого плана составит

$$Z = 40\ x_1 + 100\ x_2 = 0.$$

$$Z=40x_1+100x_2$$

$$\boldsymbol{x_1 = 0,\ \ x_2 = 0,\ \ s_1 = 1\,000,\ \ \ s_2 = 25.}$$

2. Пусть x_1, s_1 – свободные переменные.

Подставляя значения $x_1 = 0$, $s_1 = 0$ в (2), получаем систему

$$10x_2 = 1000$$
$$0,3x_2 + s_2 = 25$$

Следовательно, базисное решение имеет вид

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 100, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = -5.$$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 + s_1 &= 1000 \\ 0,1x_1 + 0,3x_2 + s_2 &= 25 \end{aligned} \qquad (2)$$

Это базисное решение означает,
что первый продукт не производится,
второго продукта производится 100.

Сырье полностью используется в производстве,
Для производства не хватает
5 часов работы оборудования.
Это базисное решение ***не является допустимым***.

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = 100,\ \ s_1 = 0,\ \ s_2 = -5.$$

3. Пусть x_1, s_2 - свободные переменные.
Подставляя значения $\boldsymbol{x_1=0}$, $\boldsymbol{s_2=0}$ в (2) , получаем систему

$$10x_2 + s_1 = 1000$$
$$0{,}3x_2 \;= 25$$

Следовательно, базисное решение имеет вид

$\boldsymbol{x_1 = 0}$, $\boldsymbol{x_2 = 250/3 = 83\ 1/3}$, $\boldsymbol{s_1 = 166\ 2/3}$, $\boldsymbol{s_2 = 0}$.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 + s_1 &= 1000 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 + s_2 &= 25 \end{aligned} \qquad (2)$$

Это базисное решение означает,
что первый продукт не производится,
второго продукта производится **83 1/3.**

Сырье не полностью используется в производстве и его остаток составляет **166 2/3 кг.**

Время работы оборудования полностью используется в производстве.

Это базисное решение является ***допустимым***.
Выручка от реализации этого плана составит

$$Z = 40x_1 + 130x_2 = 10433\ 1/3.$$

$Z=40x_1+100x_2$

$\boldsymbol{x_1 = 0,\ \ x_2 = 250/3 = 83\ 1/3,\ \ s_1 = 166\ 2/3,\ \ s_2 = 0.}$

4. Пусть x_2, s_1 - свободные переменные.
Подставляя значения $\boldsymbol{x_2 = 0}$, $\boldsymbol{s_1 = 0}$ в (2), получаем систему

$$\begin{aligned} 5x_1 &= 1000, \\ 0{,}3x_2 &= 25 \end{aligned}$$

Следовательно, базисное решение имеет вид

$$\boldsymbol{x_1 = 0,\ x_2 = 250/3 = 83\ 1/3,\ s_1 = 166\ 2/3,\ s_2 = 0.}$$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 + s_1 &= 1000 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 + s_2 &= 25 \end{aligned} \qquad (2)$$

Базисное решение означает,
что первого продукта производится 200,
второй продукт не производится.
Сырье полностью используется в производстве.
Время обработки не полностью используется в производстве.
Это базисное решение является ***допустимым***.
Выручка от реализации этого плана составит

$$Z = 40x_1 + 130x_2 = 8000.$$

$Z = 40x_1 + 100x_2$

$x_1 = 0$, $x_2 = 250/3 = 83\ 1/3$, $s_1 = 166\ 2/3$, $s_2 = 0$.

5. Пусть x_2, s_2 – свободные переменные.
Подставляя значения $x_2 = 0$, $s_2 = 0$ в (2), получаем систему

$$5x_1 + s_1 = 1000$$
$$0{,}1x_1 = 25$$

Следовательно, базисное решение имеет вид

x_1=250, x_2= 0, s_1 =-250, s_2 =0.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 + s_1 &= 1000 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 + s_2 &= 25 \end{aligned} \qquad (2)$$

Это базисное решение означает,
что первого продукта производится 250,
второй продукт не производится.

Не хватает для производства 250 кг сырья,
Время работы оборудования используется полностью.

Это базисное решение ***не является допустимым.***

x_1=250, x_2= 0, s_1 =-250, s_2 =0.

6. Пусть s_1, s_2 – свободные переменные.
Тогда базисные переменные x_1 и x_2
найдем из системы уравнений

$$5x_1 + 10x_2 = 1000$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 = 25$$

Отсюда следует, что базисное решение имеет вид

x_1=100, x_2=50, s_1 =0, s_2 =0.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 + s_1 &= 1000 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 + s_2 &= 25 \end{aligned} \qquad (2)$$

Это базисное решение означает,
что первого продукта производится 100,
второго продукта производится 50.

Сырье и время работы оборудования используются полностью.

Это базисное решение является ***допустимым.***
Выручка от реализации этого плана составит

$$Z = 40\cdot100 + 130\cdot50 = 10500.$$

$Z=40x_1+100x_2$

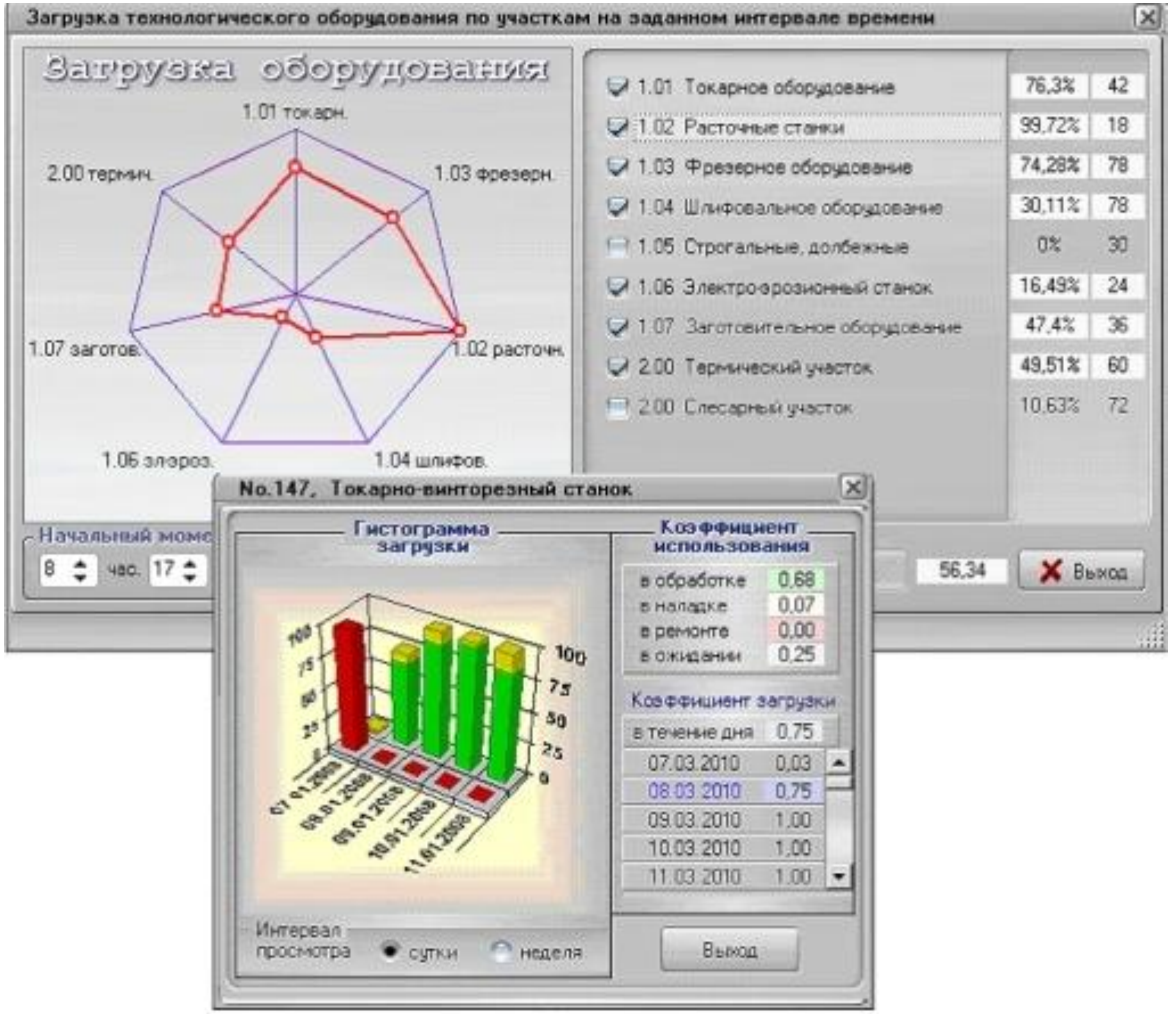
$x_1=100,\ \ x_2=50,\ s_1=0,\ \ s_2=0.$

№	Базисные переменные		Небазисные переменные		Z
1	S_1=1000	S_2=25	X_1=0	X_2=0	0
2	X_2=250/3	S_1=160 2/3	X_1=0	S_2=0	Z=10433 1/3
3	X_1=200	S_2=5	X_2=0	S_1=0	Z=8000
4	X_1=100	X_2=50	S_1=0	S_2=0	Z=10500

Максимальное значение выручки достигается на четвертом базисном решении в этой таблице

$$X^{*}=\{\ x_1=10;\ x_2=50;\ S_{1=}0;\ S_2=0\ \}$$

2.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ



Построение симплекс-таблицы для Примера

$$5x_1 + 10x_2 + s_1 = 1000,$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 + s_2 = 25,$$
$$Z = 40x_1 + 100x_2 + 0S_1 + 0S_2.$$

Таблица 2

БП	Значения b	x_1	x_2	s_1	s_2	
s_1	1000	5	10	1	0	
s_2	25	0,1	0,3	0	1	
Z	0	-40	-100	0	0	

Получили план:

$X^{(0)} = \{x_1=0,\ x_2=0,\ s_1=1000,\ s_2=25\}$.

Анализ оптимальной симплекс-таблицы

1.Значения второго столбца определяют значения БП:

$x_1 = 100$; $x_2 = 50$.

Все переменные, не входящие в первый столбец, являются свободными и равны 0: $s_1 = 0$, $s_2 = 0$.

БП	Значение b'	x_1	x_2	s_1	s_2
x_1	100	1	0	3/5	-20
x_2	50	0	1	-1/5	10
Z	9000	0	0	4	200

Анализ оптимальной симплекс-таблицы

Базисное решение прямой задачи:

$$X^2 = \{x_1 = 100;\ x_2 = 50;\ S_1 = 0;\ S_2 = 0\}$$

БП	Значение b'	x_1	x_2	s_1	s_2
x_1	100	1	0	3/5	-20
x_2	50	0	1	-1/5	10
Z	9000	0	0	4	200

Анализ оптимальной симплекс-таблицы

2. В последней строке определяются:

- значение ЦФ прямой задачи Z=9000;
- значения 0 в столбцах x_1 и x_2 означают,

что производства первого и второго продуктов рентабельны: Δ1=0, Δ2=0.

(при положительных Δ производство нерентабельно)

БП	Значение b'	x_1	x_2	s_1	s_2
x_1	100	1	0	3/5	-20
x_2	50	0	1	-1/5	10
Z	9000	0	0	4	200

Самостоятельная работа

Задание. Оптимальная симплекс-таблица задачи линейного программирования (планирования производства продукции) имеет вид:

№	Базисные переменные	Значения	Коэффициенты			
			x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_2	2,00	1,25	1,00	0,25	0,00
2	x_4	6,00	0,25	0,00	-0,75	1,00
3	Z	8	3	0	1	0

Тогда оптимальный план выпуска продукции равен:

A. $x_1 = 0;\quad x_2 = 2.$ B. $x_1 = 6;\ x_4 = 6.$

C. $x_3 = 1{,}25;\ x_2 = 1.$ **D**. $x_2 = 2;\ x_4 = 6$

Самостоятельная работа

Задание. Оптимальная симплекс-таблица задачи линейного программирования (планирования производства продукции) имеет вид:

№	Базисные переменные	Значения	Коэффициенты			
			x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_2	2,00	1,25	1,00	0,25	0,00
2	x_4	6,00	0,25	0,00	-0,75	1,00
3	Z	8	3	0	1	0

Тогда максимальное значение целевой функции равно

A. 3 B. 6 C. 8 D. 1,25

1.3.3. Построение двойственной задачи линейного программирования

Прямая задача

$$5x_1 + 10x_2 = 1000,$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 = 25,$$
$$Z = 40x_1 + 100x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

Двойственная задача ЛП:

$$x_1 \rightarrow \quad 5y_1 + 0{,}1y_2 \geq 40,$$
$$x_2 \rightarrow \quad 10y_1 + 0{,}3y_2 \geq 100,$$
$$s_1 \rightarrow \quad y_1 \geq 0,$$
$$s_2 \rightarrow \quad y_2 \geq 0.$$
$$W = 1000y_1 + 25y_2, \Rightarrow \text{min}$$

Анализ оптимальной симплекс-таблицы

Значение 4 в столбце s_1 означает, что теневая цена 1 кг сырья равна 4 : $y_1 = 4$;

Значение 200 в столбце s_2 означает, что теневая цена работы 1 часа оборудования равна 200: $y_2 = 200$.

БП	Значение b'	x_1	x_2	s_1	s_2
x_1	100	1	0	3/5	-20
x_2	50	0	1	-1/5	10
Z	9000	0	0	4	200
		Δ_1	Δ_2	y_1	y_2

2.3. Интервалы устойчивости.

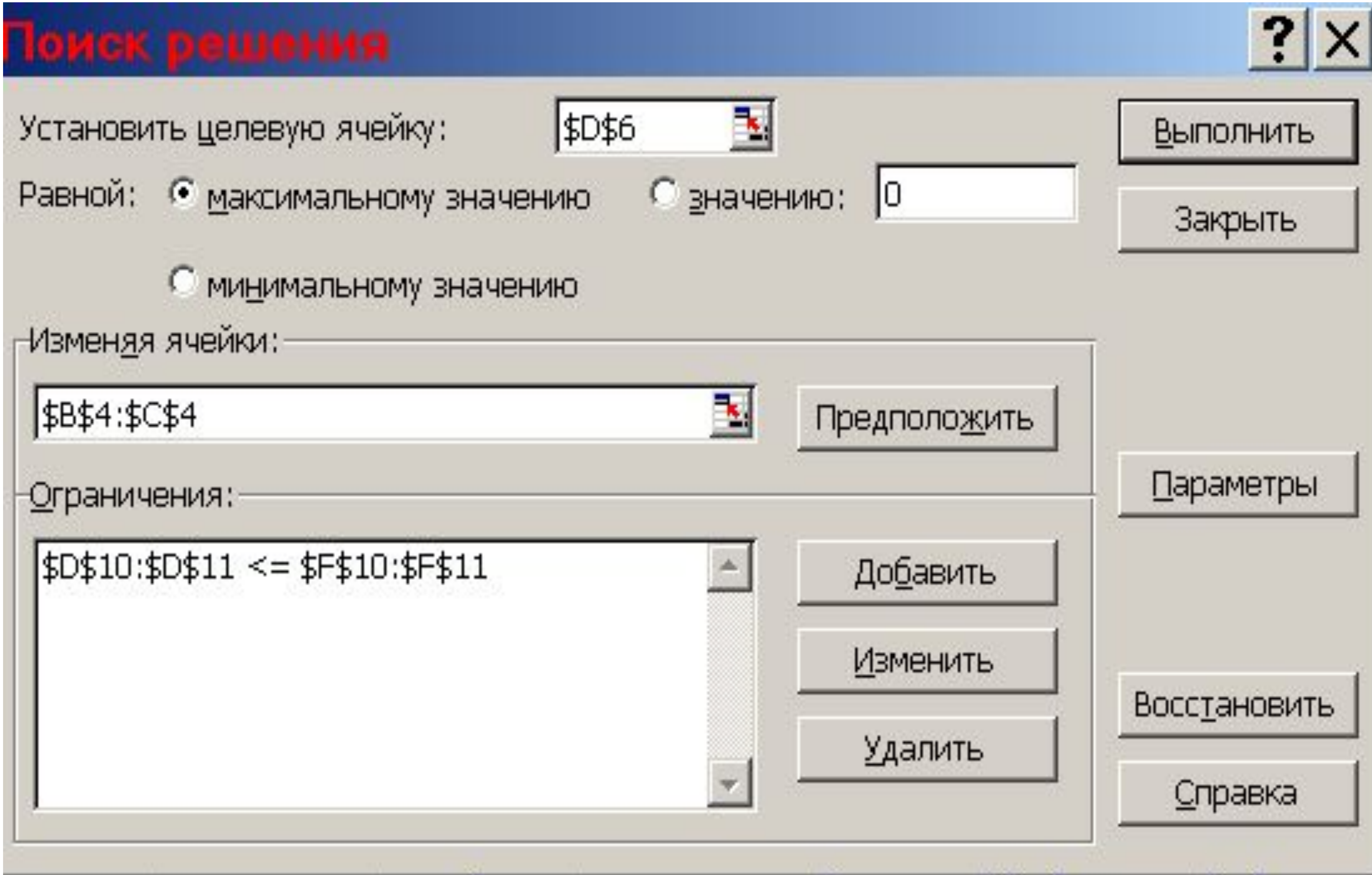
После нахождения оптимального решения выполняется анализ модели на чувствительность – необходимо знать какими будут возможные изменения решения при изменении параметров системы.

Решение задачи в Excel

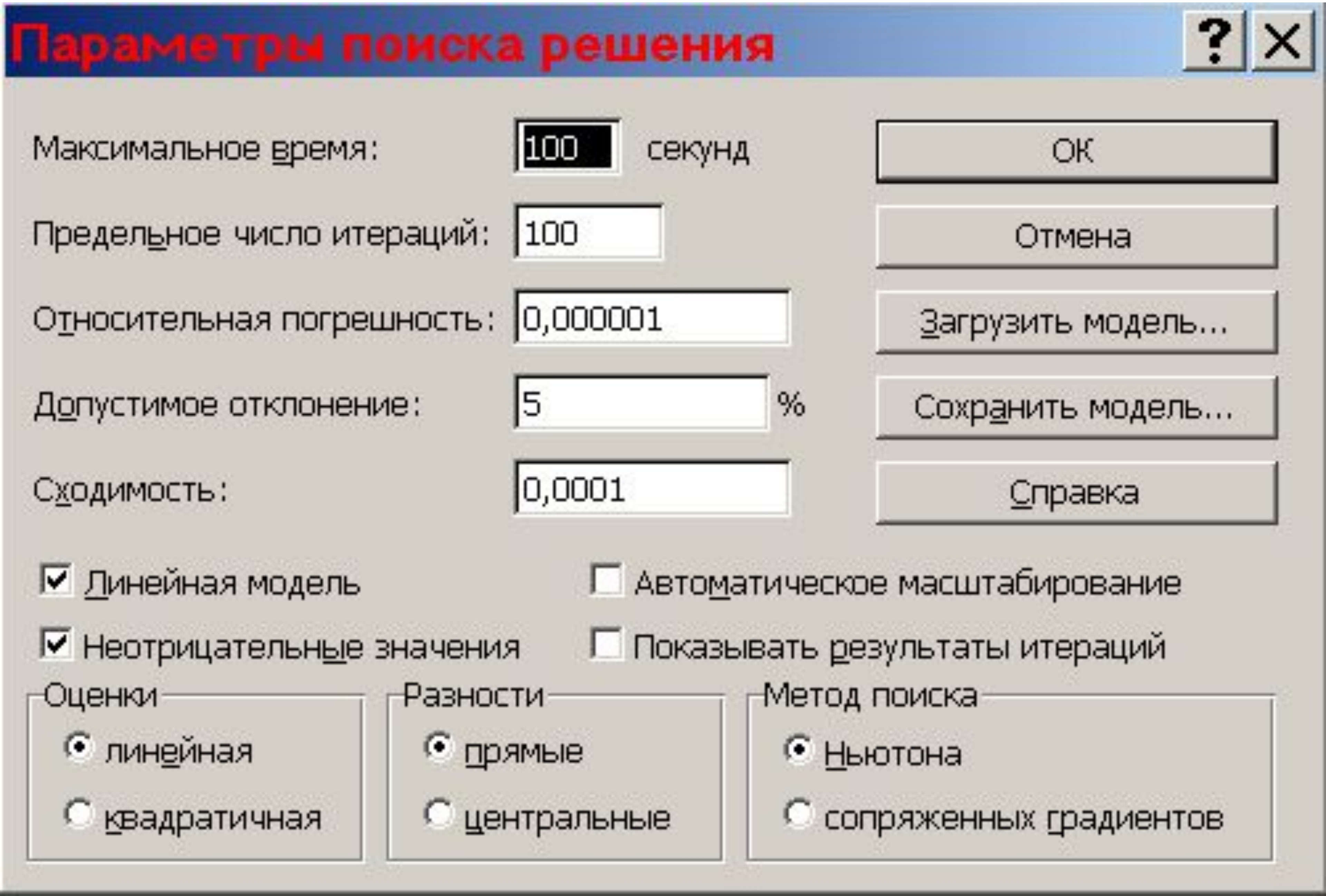
В электронную таблицу внести исходные данные :

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		переменные					
3		x_1 прод 1	x_2 прод 2				
4	значение	1	1				
5							
6	коэф в ЦФ	40	100	140	макс		
7							
8			ограничения				
9	вид ресурса			затраты ресу	знак	запас ресурса	
10	сырье	5	10	15	<=	1000	
11	время	6	18	24	<=	25	
12							

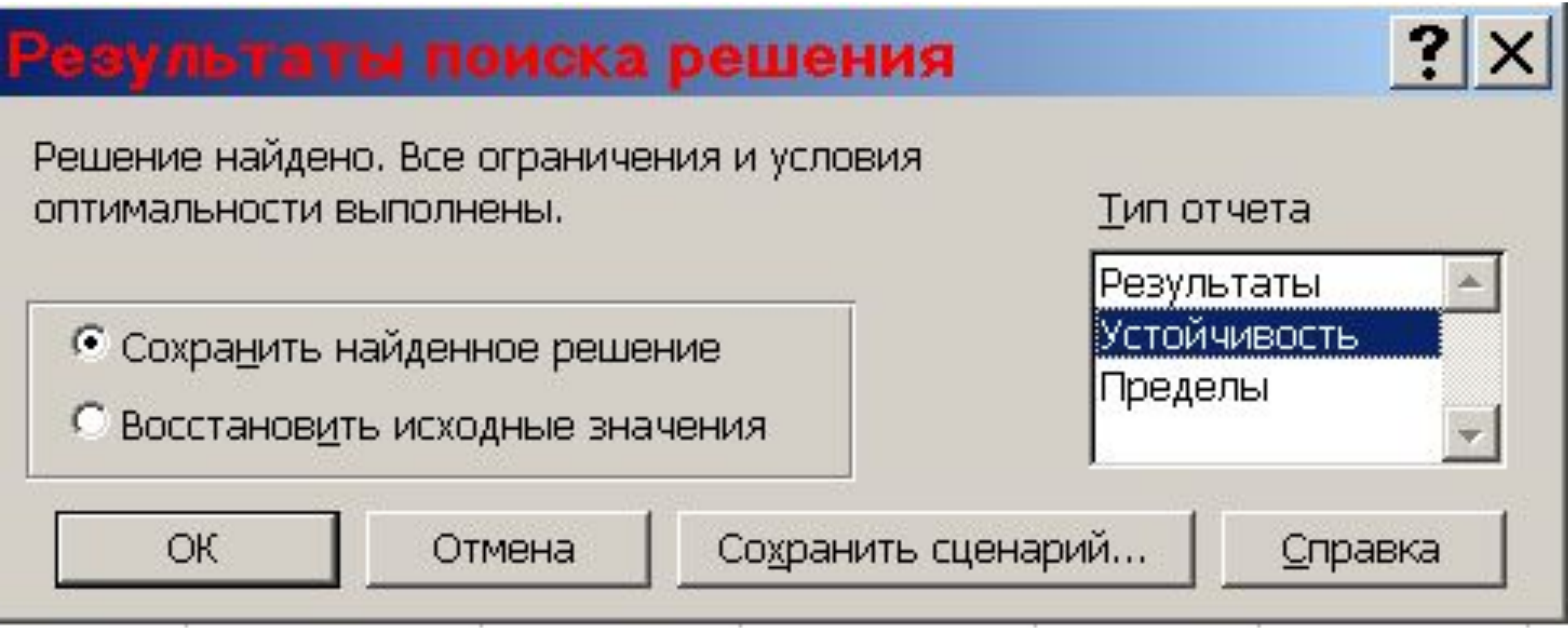
Сервис – Поиск решения



В Поиске решения –Параметры - Заполнить окно -ОК



В Поиске решения Выполнить
Выделить Устойчивость - ОК



Отчет по устойчивости решения

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		переменные						
3		x_1 прод 1	x_2 прод 2					
4	значение	100	50					
5								
6	коэф в ЦФ	40	100	9000	макс			
7								
8			ограничения					
9	вид ресурса			затраты ресу	знак	запас ресурса		
10	сырье	5	10	1000	<=	1000		
11	время	0,1	0,3	25	<=	25		
12	Изменяемые ячейки							
13				**Результ.**	**Нормир.**	**Целевой**	**пустим**	**опустимое**
14		**Ячейка**	**Имя**	**значение**	**стоимост**	**эффициe**	**еличен**	**меньшение**
15		B4	значение x1	100	0	40	10	6 2/3
16		C4	значение x2	50	0	100	20	20
17								
18	Ограничения							
19				**Результ.**	**Теневая**	**граничен**	**пустим**	**опустимое**
20		**Ячейка**	**Имя**	**значение**	**Цена**	**равая час**	**еличен**	**меньшение**
21		D10	сырье затр	1000	4	1000	250	166 2/3
22		D11	время затр	25	200	25	5	5
23								

Спасибо за внимание

Спасибо за внимание

Спасибо за внимание

Спасибо за внимание

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

Спасибо за внимание

Спасибо за внимание

Спасибо за внимание

Спасибо за внимание