Лекция 3. **Применение линейного программирования в математических моделях**

Содержание лекции:

1. Принцип оптимальности в планировании и управлении
2. Задача линейного программирования
3. Симплексный метод
4. Экономические приложения линейного программирования
5. Программное обеспечение линейного программирования

Литература

- Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов / Под ред. *В.В. Федосеева*. — 2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. — глава 2.
- *Вентцель Е.С.* Исследование операций: Задачи, принципы, методология. М.: Высшая школа, 2001.
- *Канторович Л.В.* Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1960.
- Линейное программирование. Оптимальное распределение ресурсов. Методические указания для выполнения лабораторных работ для студентов направлений подготовки бакалавриата 120700, 080100 и 080200./НМСУ «Горный». Сост. В.В. Беляев, Т.Р. Косовцева. СПб, 2012., 62 с.

Известные ученые-экономисты

Леонид Витальевич Канторович родился 19 января 1912г. в Санкт-Петербурге в семье врача. В 18 лет он закончил математико-механический факультет Ленинградского университета (1930) и уже через четыре года получил звание профессора. Л.В. Канторович является одним из основателей отечественных школ функционального анализа. вычислительной математики, языков программирования.

С 1938г. интересы Л.В.Канторовича были неразрывно связаны с экономическими исследованиями и решением народнохозяйственных проблем.

Крупнейшим его открытием является введение в математическую и экономическую науки понятия "линейное программирование" (1939). Линейное программирование является универсальной математической моделью оптимального функционирования экономических систем. Основная заслуга Л. В.Канторовича заключается в разработке единого подхода к широкому кругу экономических задач о наилучшем использовании ресурсов на базе линейного программирования.

3.1. Принцип оптимальности в планировании и управлении

- Принцип оптимальности предполагает следующее:
  - наличие определённых ресурсов
  - наличие определённых технологических возможностей
  - цель хозяйственной деятельности
    - извлечение прибыли
    - удовлетворение потребностей
    - предотвращение угрозы
    - накопление знаний
    - и т.д.
- Суть принципа:
  - планировать хозяйственную деятельность таким образом, чтобы при имеющихся ресурсах и технологиях *не существовало* способа достичь цели в большей степени, чем это предусматривает план
- В полной мере этот принцип может быть реализован только с помощью экономико-математических моделей

Задачи линейного программирования

Возможные области применения задач ЛП:

- рациональное использование сырья и материалов;
- задачи составления смесей;
- задачи оптимизации раскроя;
- оптимизации производственной программы предприятий;
- оптимального размещения и концентрации производства;
- на составление оптимального плана перевозок, работы транспорта;
- задача о назначениях;
- управления производственными запасами;
- и многие другие, принадлежащие сфере оптимального планирования.

3.2. Задача линейного программирования

Линейная целевая функция

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots c_n x_n \to \max(\min)$$

Линейные ограничения

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \{\le, =, \ge\} b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \{\le, =, \ge\} b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \{\le, =, \ge\} b_m \end{cases}$$

Условия неотрицательности переменных

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1,2 \ldots n$$

- Это **развёрнутая** форма записи

3.2. Задача линейного программирования

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n \to max$$

Линейная целевая функция (ЦФ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Линейные ограни-чения (фазовые ограничения)

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2\dots n$$

Условия неотрицательности переменных (естественные ограничения)

Любую ЗЛП можно записать в каноническом виде (ограничения – равенства, свободные члены неотрицательны, решается на максимум)

- Это **каноническая** форма записи

3.2. Задача линейного программирования

Линейная целевая функция

$$\max \mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0};\ \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

Линейные ограни-чения

Условия неотрицательности переменных

- Это **матричная** форма записи
  - Она тождественна канонической форме

3.2. Задача линейного программирования

$$\max\ (\min)\ \mathbf{cx}$$

$$\mathbf{Ax}\ \{\le, =, \ge\}\ \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

Линейная целевая функция

Линейные ограничения

Условия неотрицательности переменных

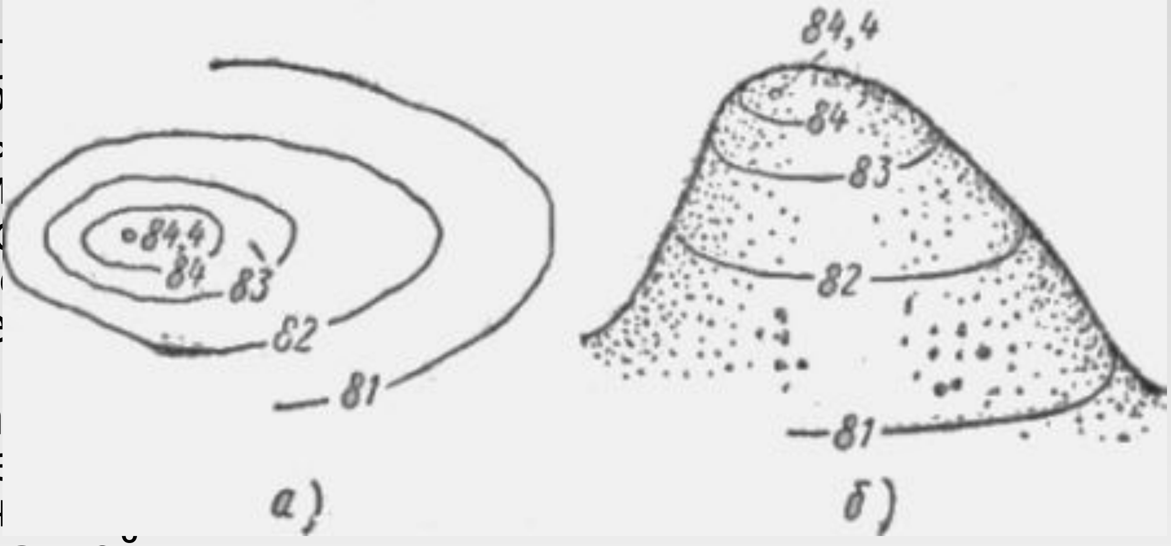
- Это **стандартная** форма записи

3.2.

- *Любой* вектор **x**, удовлетворяющий *ограничениям* и *условиям неотрицательности* (безотносительно к целевой функции), называется <u>допустимым решением</u>
  - Если допустимых решений не существует, говорят, что система ограничений <u>несовместна</u>
- <u>Областью допустимых решений</u> (ОДР) называется множество, включающее *все допустимые решения* данной ЗЛП
- Допустимое решение **x***, доставляющее наибольшее значение целевой функции среди всех допустимых решений данной ЗЛП, называется <u>оптимальным решением</u>
  - часто его называют просто решением ЗЛП

Линейное программирование

- Приведенный г
местности изоб
возвышенность
наивысшей отм
84,4 м. Местнос
полого понижа
вправо и более
влево. Правая
пониженная ча
местности имее
отметку 81 м, ч
из записи, сделанной
около крайней правой
горизонтали. На рис. 2,
б для наглядности
нарисован участок
местности. Проекции с
числовыми отметками
применяются в геодезии
и топографическом
черчении.



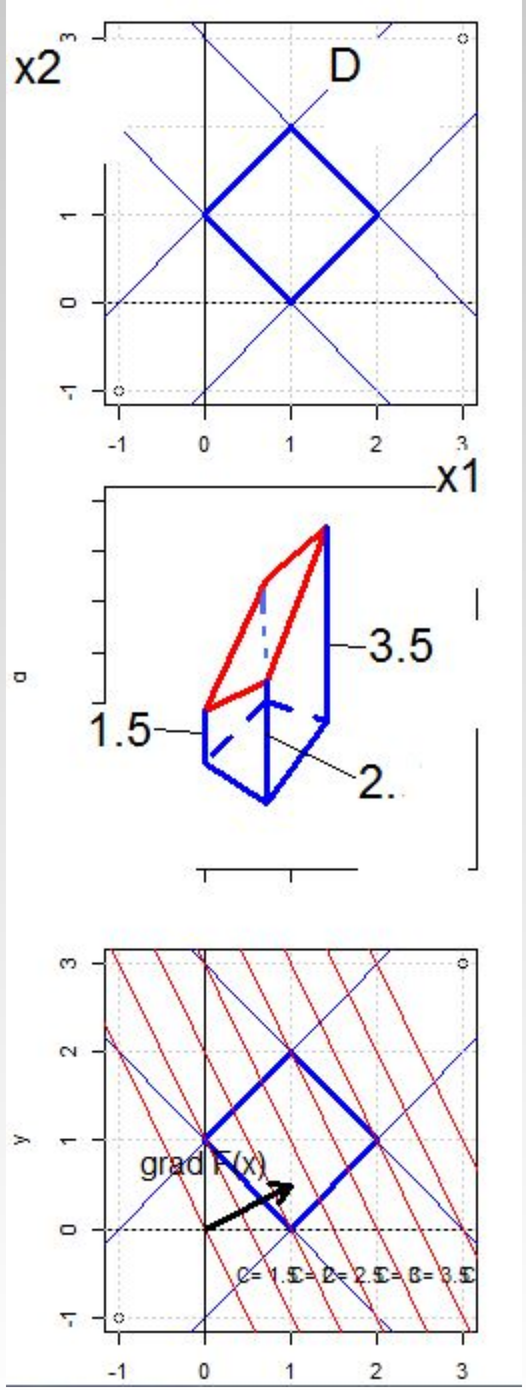
Линейное программирование

Найти самую высокую точку области X принадлежит D. Высота – функция координат!

$$F(x_1, x_2) = x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 1$$

$$gradF(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Градиент показывает направление наибыстрейшего роста функции



3.2.

- ЗЛП может:
  - не иметь ни одного оптимального решения
    - допустимой области не существует – система ограничений не совместна

      Компактная запись

      $z = \max(x_1+x_2 | x_1+5x_2 \le 1,\ x_1+x_2 \ge 5,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0)$
    - допустимая область существует, но не ограничивает целевую функцию

      $z = \max(2x_1+x_2 | 0.1x_1+0.1x_2 \ge 5,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0)$
  - иметь одно оптимальное решение

    $z = \max(x_1+x_2 | 0.1x_1+0.2x_2 \le 5,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0)$

    $x_1=50,\ x_2=0;\ z = 50$
  - иметь бесконечно много оптимальных решений

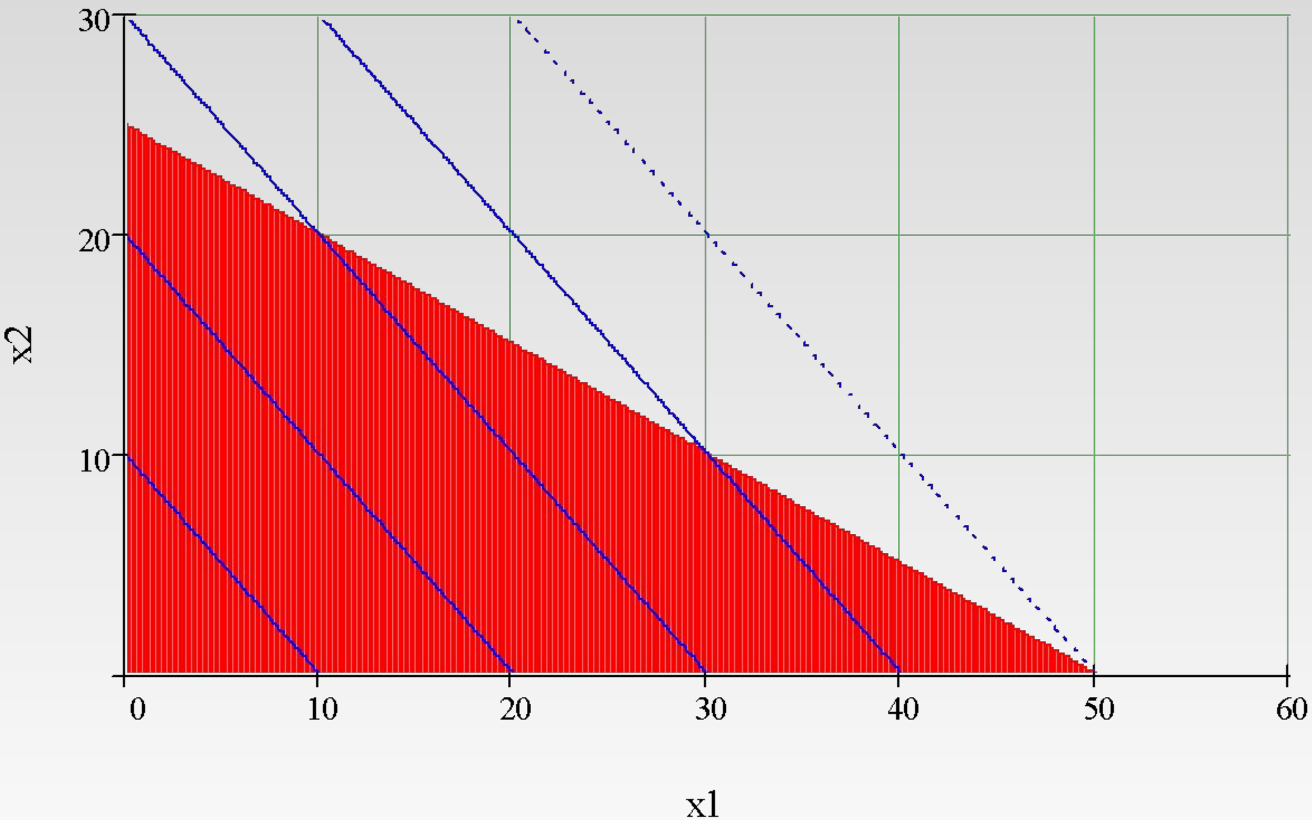
    $z = \max(x_1+x_2 | 0.1x_1+0.1x_2 \le 5,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0)$

    $x_1=50,\ x_2=0;\ z = 50 \ldots x_1=0,\ x_2=50;\ z = 50$

3.2.

$$z = \max(x_1 + x_2 | 0.1x_1 + 0.2x_2 \le 5,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0)$$

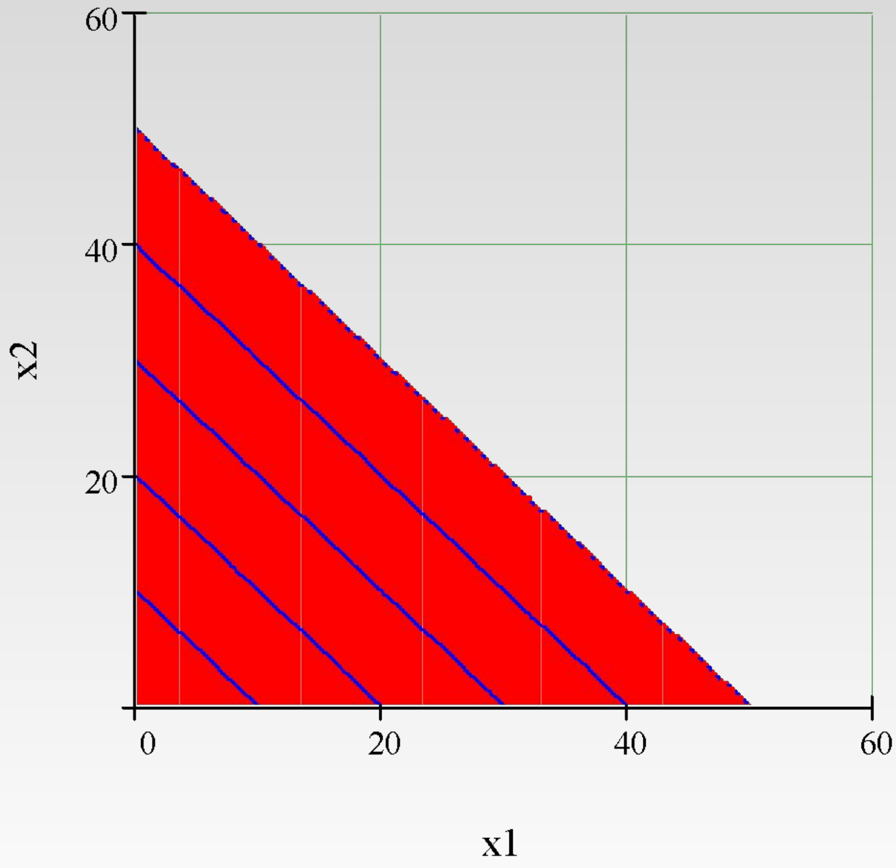
$x_1 = 50$, $x_2 = 0$; $z = 50$



3.2.

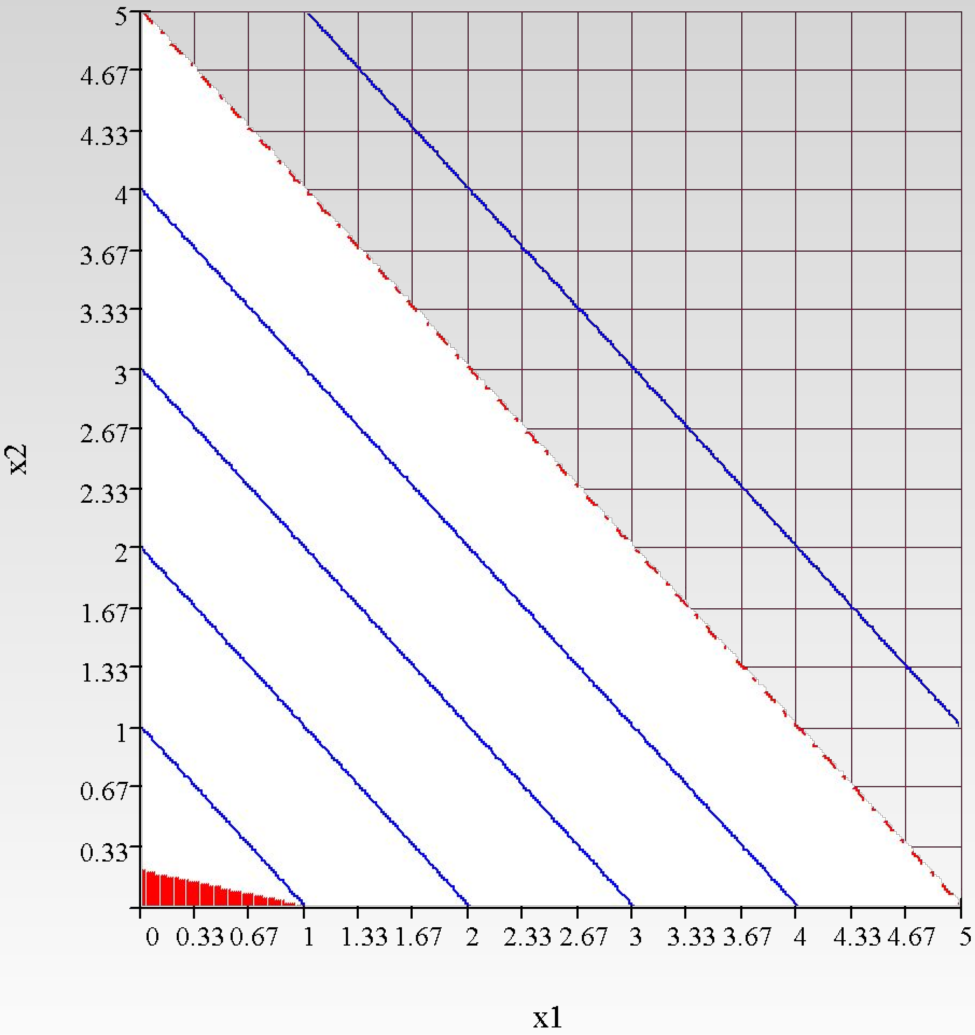
$$z = \max(x_1 + x_2 \mid 0.1x_1 + 0.1x_2 \le 5,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0)$$

$x_1 = 50$, $x_2 = 0$; $z = 50$ … $x_1 = 0$, $x_2 = 50$; $z = 50$



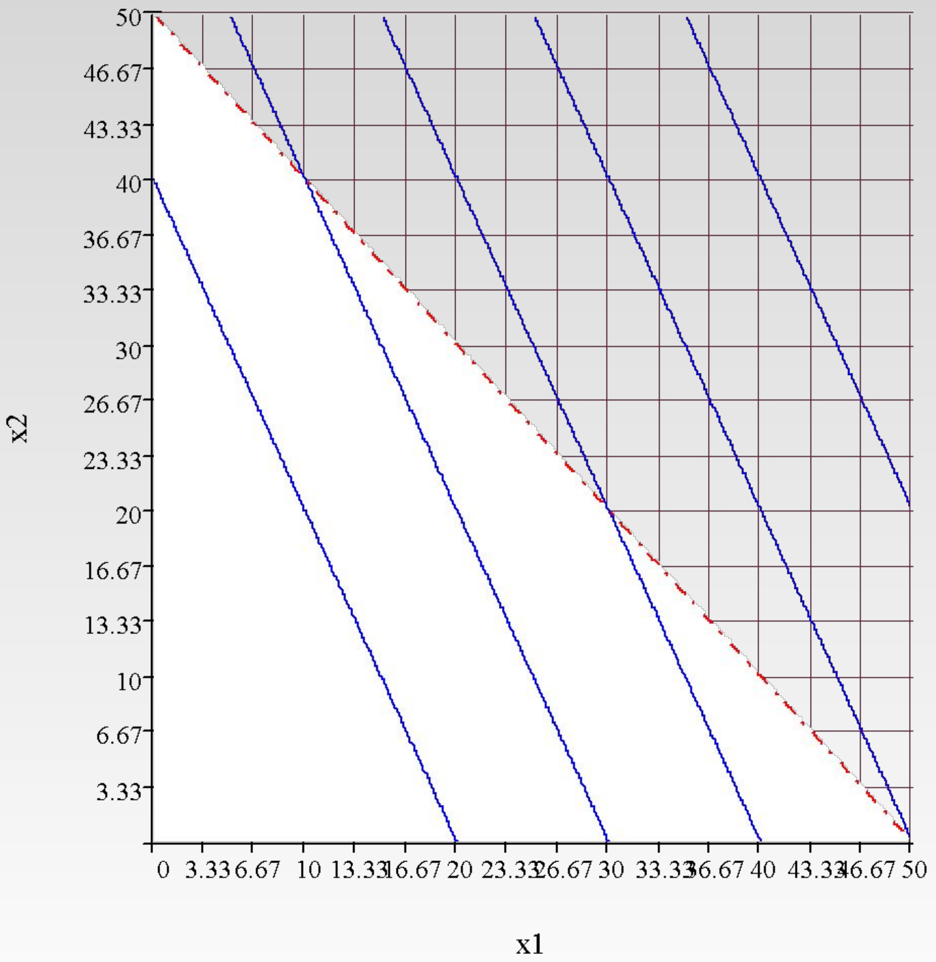
3.2.

$$z = \max(x_1 + x_2 | x_1 + 5x_2 \le 1,\ x_1 + x_2 \ge 5,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0)$$



Несовместность системы ограничений

3.2. $z = \max(2x_1+x_2 | 0.1x_1+0.1x_2 \geq 5,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0)$



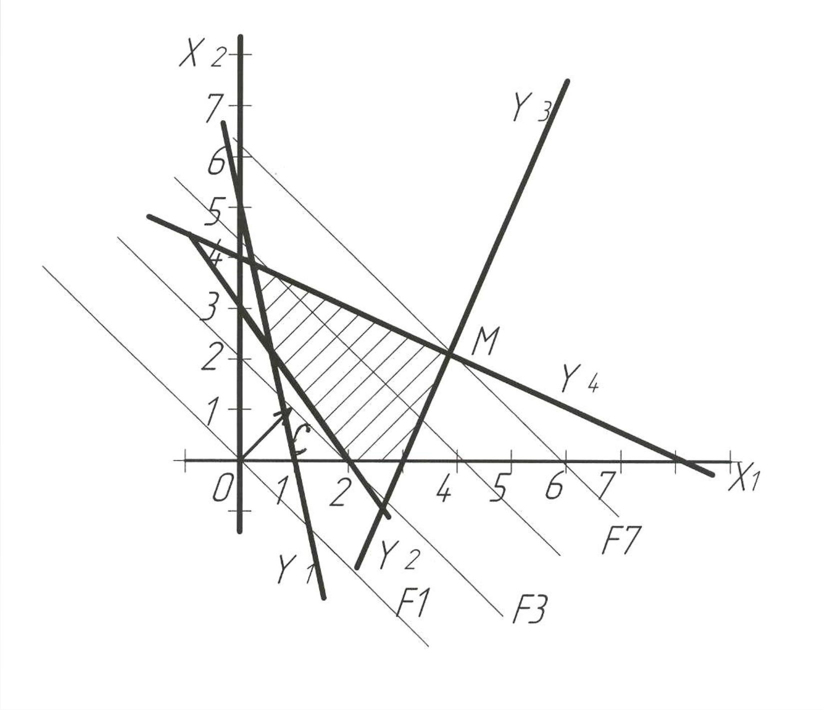
Неограниченность целевой функции

Геометрический смысл задачи линейного программирования

$$F = x_1 + x_2 + 1 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Задача о диете

Составить задачу ЛП, позволяющую оптимизировать расход кормов, и привести ее к каноническому виду.

Для откорма животных употребляют два вида кормов; стоимость 1 кг корма I вида - 5 у.е., а корма - II вида 2 у.е. В каждом килограмме корма I вида содержится 5 ед. питательного вещества *A*, 2.5 ед. питательного вещества *B* и 1 ед. питательного вещества *C*. В каждом килограмме корма II вида содержится соответственно 3, 3 и 1.3 ед. Суточный рацион предусматривает питательных единиц *A* не менее 225 ед., типа *B* - не менее 150 ед. и типа *C* - не менее 80 ед. Какое количество корма каждого вида необходимо расходовать ежедневно, чтобы затраты были минимальны?

	Количество				
Корма	**1 Вид**	**2 вид**			
Цена	**5**	**2**			
Кол-во	**x1**	**x2**	**=5*x1+2*x2**	**<- стоимость**	
	Содержание		Факт.		Норма
A	5	3	**=5*x1+3*x2**	>=	225
B	**2.5**	**3**	**=2.5*x1+3*x3**	>=	150
C	**1**	**1.3**	**=1*x1+1*x4**	>=	80

Задача о диете

	Количество				
Корма	1 Вид	2 вид			
Цена	5	2			
Кол-во	x1	x2	=5*x1+2*x2	<- стоимость	
	Содержание		Факт.		Норма
A	5	3	=5*x1+3*x2	>=	225
B	2.5	3	=2.5*x1+3*x3	>=	150
C	1	1.3	=1*x1+1*x4	>=	80

$$5x_1 + 2x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 5\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 \ge 225 \\ 2.5\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 \ge 150 \\ \boldsymbol{x}_1 + 1.3\boldsymbol{x}_2 \ge 80 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}_1 \ge 0, \quad \boldsymbol{x}_2 \ge 0$$

Задача ЛП

$$-5x_1 - 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 5\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = 225 \\ 2.5\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_4 = 150 \\ \boldsymbol{x}_1 + 1.3\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_5 = 80 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}_1 \ge 0, \ \boldsymbol{x}_2 \ge 0, \ \boldsymbol{x}_3 \ge 0, \ \boldsymbol{x}_4 \ge 0, \ \boldsymbol{x}_5 \ge 0$$

Задача ЛП в каноническом форме!

Задача о диете

В 1982 г. Джорджу Стиглеру была присуждена Нобелевская премия за труды по теории экономического регулирования (совсем не проблемы линейного программирования!)

Еще в 1945 г. без помощи линейного программирования ДЖОРДЖ СТИГЛЕР. составил "самый дешевый набор продуктов", явившийся фактически прообразом потребительской корзины.

Пытался найти наиболее дешевый рацион, удовлетворяющий 9 диетическим требования, сформулированным в 1943 году. В наборе продуктов было 77 наименований, от пшеничной муки до клубничного джема.

Подводя итоги своей работы в 1945 «Затраты на питание» :

«По всей видимости не существует универсального метода нахождения минимума линейной функции при «соблюдении линейных ограничений.

Разработав в конце 40-х годов симплекс-метод, Георг Данциг совершил переворот. 70 лет назад решение задачи составления рациона вызывало затруднения у лучших экономистов мира, теперь доступно для начинающих студентов.

Задача о диете=Задача о смеси

При создании сплава для новой продукции компании Eastern Steel используется же-
езная руда, получаемая с четырех различных шахт. Как показал анализ, чтобы получить плав с нужными свойствами, необходимо удовлетворить минимальные требования по рем основным элементам, которые для простоты обозначили A, B и C. В частности, ка-
дая тонна руды должна содержать не менее 5 фунтов элемента A, 100 фунтов элемента B 30 фунтов элемента C. Эти данные приведены в табл. 3.6.

Таблица 3.6. Требования к содержанию основных элементов

Элемент	Минимальное содержание, фунт/т
A	5
B	100
C	30

Руда с каждой шахты содержит все три основных элемента, но в разных количествах. Состав руды (содержание элементов) приведен в табл. 3.7.

Таблица 3.7. Состав руды с различных шахт

Элемент	Шахта (содержание элементов, фунт/т)			
	1	2	3	4
A	10	3	8	2
B	90	150	75	175
C	45	25	20	37

Таблица 3.8. Стоимость руды с различных шахт

Шахта	Стоимость тонны руды, $
1	800
2	400
3	600
4	500

Найти самую дешевую допустимую смесь.

3.3. Симплексный метод

Основная идея симплекс-метода

- Ограничения ЗЛП в канонической форме приводятся к виду

$$\begin{cases} x_1 = b_1' + a'_{1,r+1} x_{r+1} + a'_{1,r+2} x_{r+2} + \cdots + a'_{1n} x_n \\ x_2 = b_2' + a'_{2,r+1} x_{r+1} + a'_{2,r+2} x_{r+2} + \cdots + a'_{2n} x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = b_r' + a'_{r,r+1} x_{r+1} + a'_{r,r+2} x_{r+2} + \cdots + a'_{rn} x_n \end{cases} \qquad (*)$$

Переменные (неизвестные) $x_1, x_2, \cdots, x_r$ называются *базисными*, а весь набор $x_1, x_2, \cdots, x_r$ – *базисом*, остальные переменные называются *свободными*. Базисное решение называется **допустимым**, если оно неотрицательно.

Система ограничений (*) называется *системой приведенной к единичному базису*.

Отметим важнейшие условия наличия единичного базиса:

- от каждого уравнения в него входит одна и только одна неизвестная;
- каждая переменная из этого набора входит с коэффициентом +1 и отсутствует в остальных уравнениях;
- все значения bi >=0

3.3. Симплексный метод

Основная идея симплекс-метода

- Подставляя в ЦФ вместо базисных переменных их выражения через свободные переменные из системы

$$F = c_0' + c_1' x_{r+1} + c_{r+2}' x_2 + \cdots + c_n' x_n \qquad (**)$$

Полагая все свободные переменные равными нулю, найдем значения базисных переменных $x_1, x_2, \cdots, x_r$

. Получим $x_1 = b_1', x_2 = b_2', \cdots, x_r = b_r'$

Если все значения bi >=0, то набор $b_1, b_2, \cdots, b_r, 0, \ldots 0$ является допустимым решением ЗЛП.

Такое допустимое решение называется *базисным* или *опорным*

Значение ЦФ при этом равно *F=c0*

Основная идея симплекс-метода. Решение задачи при помощи симплекс-метода подразумевает ряд шагов, состоящих в том, что от данного базиса В' переходим к другому базису В" с таким расчетом, чтобы значение целевой функции F увеличивалось или, по крайней мере, не уменьшалось. $F_{B'} <= F_{B''}$

3.3. Симплексный метод

Основная идея симплекс-метода

- *Геометрическая интерпретация*.
- Аналитическому переходу от одного *базиса* к другому соответствует переход от одной вершины многогранника (множества допустимых решений) к другой, в которой целевая функция имеет не меньшее значение. Этот факт основан на том, что вершинам многоугольника множества допустимых решений соответствуют базисные решения системы ограничений.

3.3. Симплексный метод

- Исходные условия применения симплексного метода
  1. ЗЛП записана в канонической форме
  2. Её ограничения линейно независимы
  3. Известно *опорное решение*, в котором:
     - имеется не более *m* ненулевых переменных
       - задача содержит *n* переменных и *m* ограничений
     - все ограничения выполняются (область D не пуста!)
  4. *m* переменных, называемых <u>базисными</u> (среди которых все ненулевые) выражены через:
     - *n*–*m* переменных, называемых <u>свободными</u> (каждая равна нулю)
     - свободный член ограничения bi положителен
  5. Результат этой процедуры записан в <u>начальную</u> (первую, исходную) <u>симплексную таблицу</u>

3.3. $z = \max(x_1+x_2 | 0.1x_1+0.2x_2 \le 5,\ x_1-2x_2 \le 20,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0)$

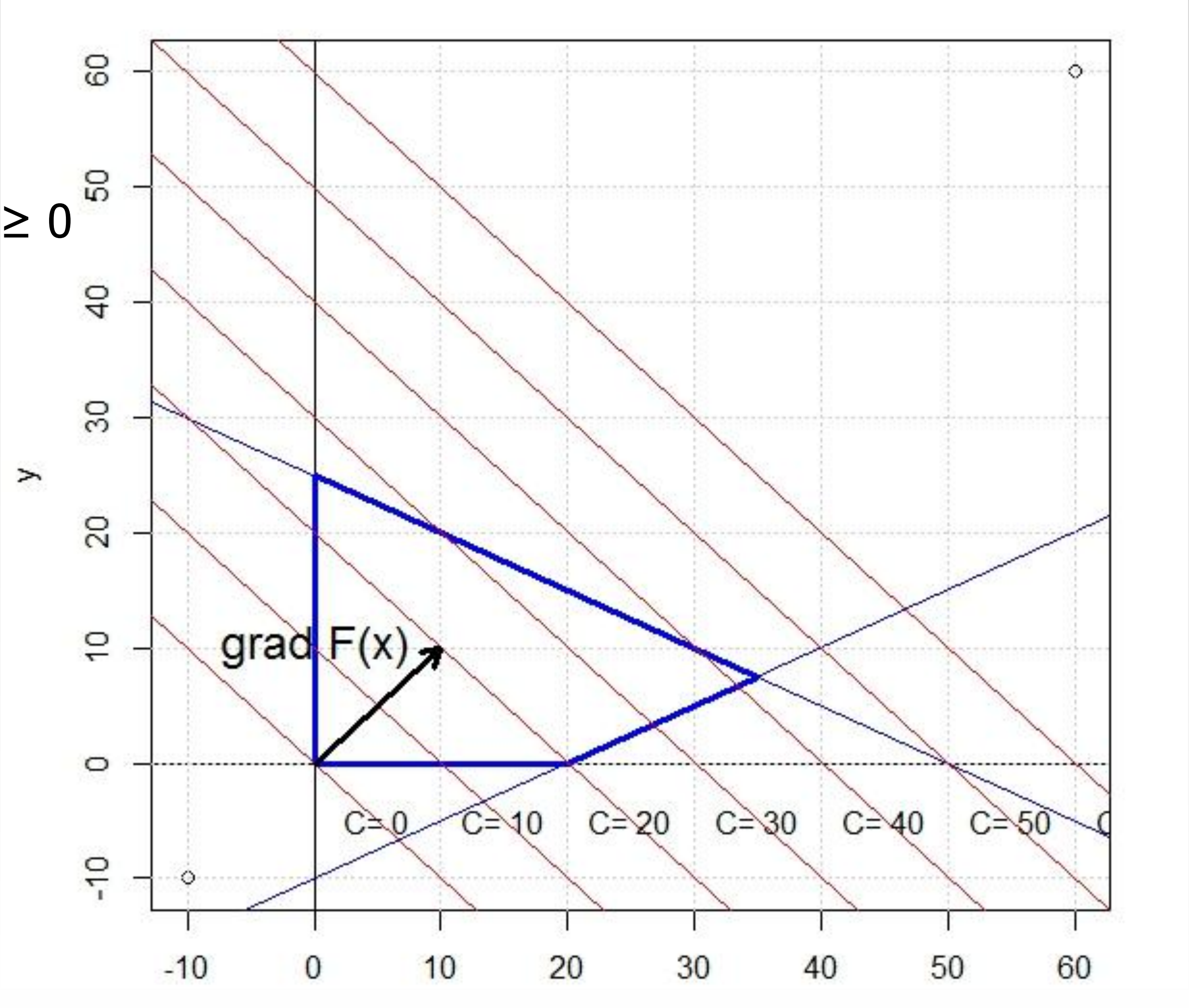
Каноническая форма:

$\max\ x_1+x_2$

$0.1x_1+0.2x_2+x_3 = 5$

$x_1-2x_2+x_4 = 20$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$



Симплекс-метод ЛП

Запись задачи в виде уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1;\\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2s}x_s + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2;\\ &\ldots\\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{ms}x_s + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

тождественна записи в виде матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 & a_{1,m+1} & .. & a_{1s} & .. & a_{1n} \\ 0 & 1 & .. & 0 & a_{2,m+1} & .. & a_{2s} & .. & a_{2n} \\ . & . & .. & . & . & .. & . & .. & . \\ 0 & 0 & .. & 1 & a_{m,m+1} & .. & a_{ms} & .. & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}$$

В симплекс-таблице будем записывать только коэффициенты матриц!

3.3. $z = \max(x_1+x_2 | 0.1x_1+0.2x_2 \le 5,\ x_1-2x_2 \le 20,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0)$

Каноническая форма:

$\max\ x_1+x_2$

$0.1x_1+0.2x_2+x_3 = 5$

$x_1-2x_2+x_4 = 20$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$

	x1	x2	x3	x4	b
x3	0,1	0,2	1	0	5
x4	**1**	**-2**	0	1	20
F	-1	-1	0	0	0

Смысл записей в симплекс-таблице:

$F=0-(-1*x1-1*x2)$

$x3 = 5-0.1x1-0.2x2$

$x4 = 20-x1+2x2$

Полагая $x1 = 0,\ x2 = 0$,

$F=0-(-1*x1-1*x2)=0$

$x3 = 5-0.1x1-0.2x2 = 5$

$x4 = 20-x1+2x2=20$

Базисное решение (0, 0, 5, 20)

3.3.

- Разрешающий столбец:
  - столбец с наибольшим по модулю отрицательном c_j
    - если отрицательного c_j нет, достигнут оптимум
- Разрешающая строка:
  - для всех положительных a_{ij} в выбранном столбце считаем b_i/a_{ij}
    - если положительных нет, ц.ф. не ограничена
  - выбираем строку, где это значение минимально

В таблице выделены жирным шрифтом

	x1	x2	x3	x4	b	вспом
x3	**0,1**	0,2	1	0	5	50
x4	1	-2	0	1	20	20
F	**-1**	-1	0	0	0	

3.3.

- Выполняем *обыкновенные жордановы исключения* во всей таблице:
- для строк $i \neq i'$: $a_{ij\text{нов}} = a_{ij} - a_{i'j}a_{ij'}/a_{i'j'}$, где
  i' и j' – координаты ведущих (разрешающих) строки и столбца
- для строки $i = i'$: $a_{ij\text{нов}} = a_{ij}/a_{i'j'}$

После 1 - ой итерации

	x1	x2	x3	x4	b
x3	0	0,4	1	-0,1	3
x1	**1**	-2	0	1	20
F	0	-3	0	1	20

новый элемент	**=**	**старый элемент-**	**(элемент ведущего столбца)·(элемент ведущей строки)** / **ведущий элемент**

Симплексный метод

	x1	x2	x3	x4	b
x3	0,1	0,2	1	0	5
x4	**1**	**-2**	0	1	20
F	-1	-1	0	0	0

Определяем ведущий элемент

	x1	x2	x3	x4	b	вспом
x3	0,1	0,2	1	0	5	50
x4	1	-2	0	1	20	20
F	-1	-1	0	0	0	

	x1	x2	x3	x4	b
x3					3
x1	1	-2	0	1	20
F					

Все элементы строки делим на вед.элем. (на 1)(это просто!)

После 1 - ой итерации

	x1	x2	x3	x4	b	вспом
x3	0	0,4	1	-0,1	3	
x1	1	-2	0	1	20	
F	0	-3	0	1	20	

=F18-F19*B18/B19=5-[0.1*20]/1

После 1 - ой итерации

	x1	x2	x3	x4	b	вспом
x3	0	0,4	1	-0,1	3	
x1	**1**	-2	0	1	20	
F	0	-3	0	1	20	

Каноническая форма:

$\max 20+3x2-x4$

$x3 = 3 -0.4x1+0.1x4$

$x1= 20 +2x2 -x4$

$x1 \geq 0,\ x2 \geq 0,\ x3 \geq 0,$

$x4 \geq 0$

$X2=0\ x4=0$

$x3 = 3$

$x1= 20$

F= 20 (был 0)

Базисное решение

(20, 0, 3, 0)

Определяем ведущий элемент

	x1	x2	x3	x4	b	вспом
x3	0	0,4	1	-0,1	3	7,5
x1	1	-2	0	1	20	
F	0	-3	0	1	20	

Все элементы строки делим на вед.элем. (на 0.4)(просто умножаем на 2.5!)

После 2 - ой итерации

	x1	x2	x3	x4	b
x2	0	1	2,5	-0,25	7,5
x1	1	0	5	0,5	35
F	0	0	7,5	0,25	42,5

=F37-F36*C37/C36=20-[3*(-2)]/0,4

Каноническая форма:

$$\max 42.5-7.5x_3-0.25x_4$$

$$x_2 = 7.5 - 2.5x_3 - 0.25x_4$$

$$x_1 = 35 - 5x_3 - 0.5x_4$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

Отрицательных c_j больше нет – достигнут оптимум

(в больших задачах для этого требуются тысячи итераций)

$X_3=0$ $x_4=0$

$x_2 = 7.5 - 2.5x_3 - 0.25x_4 = 7.5$

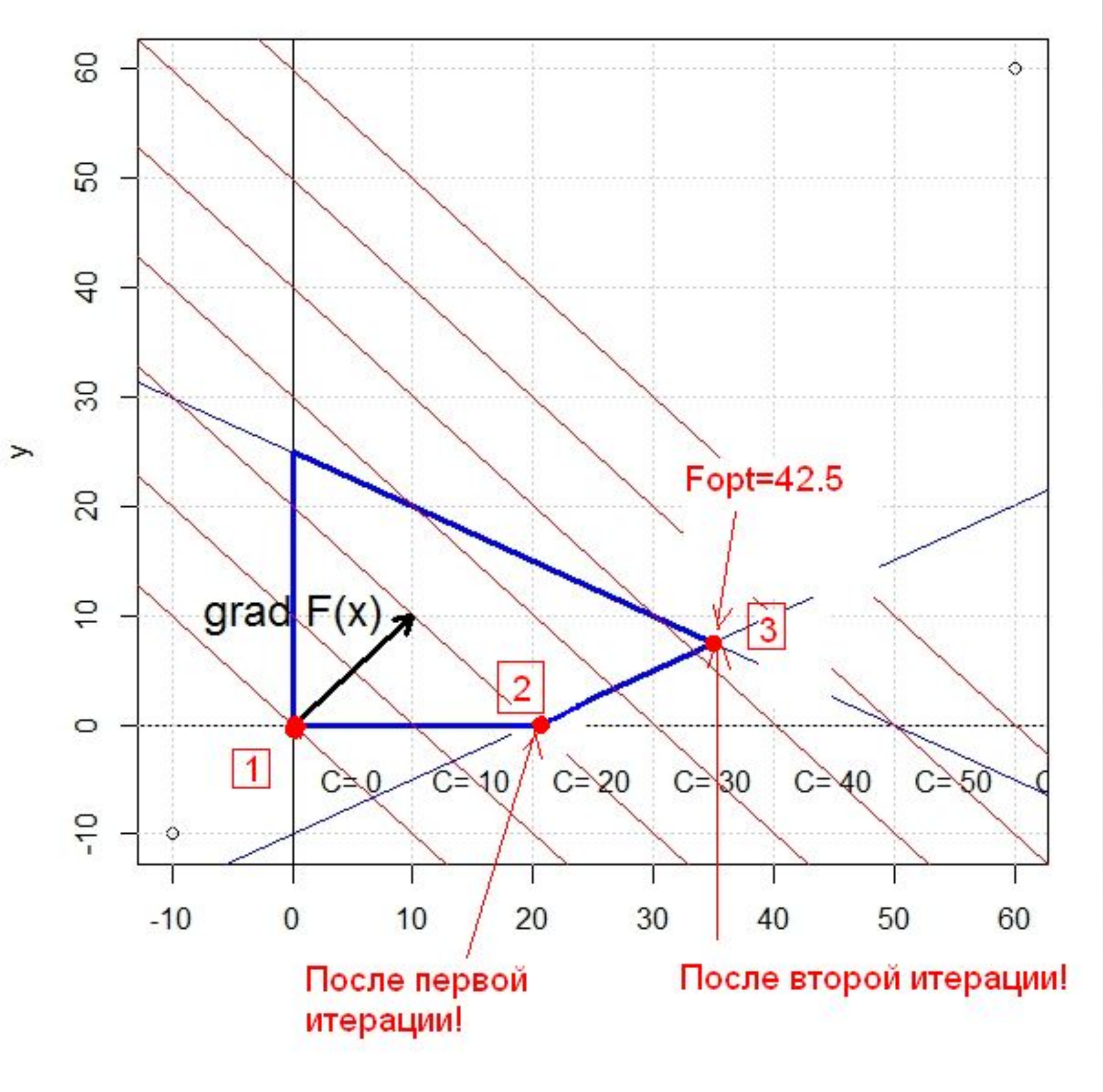
$x_1 = 35 - 5x_3 - 0.5x_4 = 35$

F= $42.5-7.5x_3-0.25x_4=42.5$ (было 20)

Базисное решение (35, 7.5, 0, 0) оптимальное!

3.3. $z = \max(x_1 + x_2 \mid 0.1x_1 + 0.2x_2 \le 5,\ x_1 - 2x_2 \le 20,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0)$

- *Геометрическая интерпретация.*
- Переходу от одного *базиса* к другому соответствует переход от одной вершины многогранника к другой, в которой целевая функция имеет не меньшее значение. Этот факт основан на том, что вершинам многоугольника множества допустимых решений соответствуют опорные решения системы ограничений.



3.3. Симплексный метод

- Исходные условия применения симплексного метода
  1. ЗЛП записана в канонической форме
  2. Её ограничения линейно независимы
  3. Известно *опорное решение*, в котором:
     - имеется не более *m* ненулевых переменных
       - задача содержит *n* переменных и *m* ограничений
     - все ограничения выполняются (область D не пуста!)
  4. *m* переменных, называемых <u>базисными</u> (среди которых все ненулевые) выражены через:
     - *n*–*m* переменных, называемых <u>свободными</u> (каждая равна нулю)
  - свободный член ограничения bi положителен
  5. Результат этой процедуры записан в <u>начальную</u> (первую, исходную) <u>симплексную таблицу</u>

3.3. Симплексный метод

- Вывод:

Не всякая задача ЛП может быть решена непосредственным применением симплекс-метода. Для этого требуется, чтобы система фазовых ограничений содержала единичный базис, а целевая функция была выражена через свободные переменные.

Поэтому, в общем случае для решения задачи ЛП, после ее приведения к канонической форме необходимо приведение ограничений к единичному базису, это возможно когда фазовые ограничения имеют предпочтительный вид.

3.3. Симплексный метод

- Определение:

Говорят, что ограничение задачи ЛП, имеет предпочтительный вид, если

- при неотрицательной правой части (b_i) левая часть ограничений содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным единице,
- а в остальные ограничения равенства - с коэффициентом, равным нулю.

Возможны два случая:

3.3.

- 1. случай:

- система ограничений имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \qquad b_i \ge 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \qquad b_i \ge 0 \qquad (i = 1, .., m)$$

$$x_o = (\underbrace{0; 0; \ldots; 0}_{n}; \underbrace{b_1; b_2; \ldots; b_m}_{m})$$

В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю

$$c_{n+i} = 0 \qquad (i = 1, .., m)$$

OK!

3.3.

- 2. случай:
- система ограничений имеет вид
- (напр. Задача о диете)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad b_i \geq 0 \qquad (i = 1,\ldots,m)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i, \qquad b_i \geq 0 \qquad (i = 1,..,m)$$

$$x_o = (\underbrace{0; 0; \ldots; 0}_{n}; \underbrace{-b_1; -b_2; \ldots; -b_m}_{m})$$

система ограничений не имеет предпочтительного вида!

$$c_{n+i} =0 \qquad (i = 1,..,m)$$

~~OK!~~

3.3. Метод искусственного базиса

- вводится *искусственный базис*:
- 1. К левым частям ограничений-равенств, не имеющих предпочтительного вида, добавляют искусственные переменные
- (вводится *искусственный базис*:)

$$y_i \qquad (i=1,..,m)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i, \qquad (i=1,..,m)$$

- 2. В ЦФ искусственные переменные, вводят с коэффициентом -*M*, где *M* - большое положительное число.

$$F_M = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \cdot \sum_{i=1}^{m} y_i$$

Полученная задача называется *M*-задачей, соответствующей исходной. Она всегда имеет предпочтительный вид!

Её начальный опорный план имеет вид!

$$x_o = (\underbrace{0;0;\dots;0}_{n};b_1;b_2;\dots;b_m)$$

OK!

3.3. Метод искусственного базиса

Теорема 1.

Если в оптимальном плане *M*-задачи

$\bar{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n; y_1; y_2; \dots; y_m)$ все искусственные переменные

$y_i = 0$, то план $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ является оптимальным планом исходной задачи

Решение исходной задачи симплексным методом путем введения искусственных переменных называется *симплексным методом с искусственным базисом*

- **Теорема 2**. Если в оптимальном плане *M*-задачи хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля, то исходная задача не имеет допустимых планов, т. е. ее условия несовместны.

3.3. Метод искусственного базиса

Продолжение примера 1. Решение задачи о диете

$$-5x_1 - 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 225 \\ 2.5x_1 + 3x_2 - x_4 = 150 \\ x_1 + 1.3x_2 - x_5 = 80 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$

Каноническая форма

Нет предпочтительного вида.

$$-5x_1 - 2x_2 - M(y_1 + y_2 + y_3) \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 + y_1 = 225 \\ 2.5x_1 + 3x_2 - x_4 + y_2 = 150 \\ x_1 + 1.3x_2 - x_5 + y_3 = 80 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$

$y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$, $y_3 \ge 0$

- М-задача в предпочтительном виде.
- M - большое положительное число.

Выразим ЦФ через свободные переменные $x_1; x_2; \ldots; x_5$

$$8.5x_1 + 7.3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + y_1 + y_2 + y_3 = 455$$

$$8.5x_1 + 7.3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - 455 = -(y_1 + y_2 + y_3)$$

3.3. Метод искусственного базиса

- М-задача

$$-5x_1 - 2x_2 - M(y_1 + y_2 + y_3) \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 + y_1 = 225 \\ 2.5x_1 + 3x_2 - x_4 + y_2 = 150 \\ x_1 + 1.3x_2 - x_5 + y_3 = 80 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0$$

$$y_1 \ge 0,\quad y_2 \ge 0,\quad y_3 \ge 0$$

Каноническая форма!

ЦФ через свободные переменные

$$-(5 - 8.5 \cdot M) \cdot x_1 - (2 - 7.3 \cdot M) \cdot x_2 -$$
$$- M \cdot x_3 - M \cdot x_4 - M \cdot x_5 - M \cdot 455 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 + y_1 = 225 \\ 2.5x_1 + 3x_2 - x_4 + y_2 = 150 \\ x_1 + 1.3x_2 - x_5 + y_3 = 80 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0$$

$$y_1 \ge 0,\quad y_2 \ge 0,\quad y_3 \ge 0$$

Применяем симплекс-метод, взяв в качестве базисных переменных искусственные переменные y_1, y_2, y_3, а в качестве свободных переменных - $x_1; x_2; \ldots; x_5$

3.3. Метод искусственного базиса

М-задача

$$-(5-8.5\cdot M)\cdot x_1-(2-7.3\cdot M)\cdot x_2-$$
$$-M\cdot x_3-M\cdot x_4-M\cdot x_5-M\cdot 455\to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2-x_3+y_1=225\\ 2.5x_1+3x_2-x_4+y_2=150\\ x_1+1.3x_2-x_5+y_3=80\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,\ x_5\ge 0$$

$$y_1\ge 0,\quad y_2\ge 0,\quad y_3\ge 0$$

ЦФ соответствуют две строки!

Коэффициенты в ЦФ имеют вид : $-(\alpha_j+\beta_j\cdot M)$

Первая строка содержит множители, стоящие перед постоянной *М*, т.е. β_j

Вторая строка α_j

Обе строки будем преобразовывать по тем же правилам, что и остальные строки.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Исходная симплекс-таблица с искусственными переменными(М-задача).										
2	**Базис**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**y1**	**y2**	**y3**	**b**	
3	**y1**	5	3	-1	0	0	1	0	0	225	
4	**y2**	2.5	3	0	-1	0	0	1	0	150	
5	**y3**	1	1.3	0	0	-1	0	0	1	80	
6	**M**	-8.5	-7.3	1	1	1	0	0	0	0	
7	**1**	5	2	0	0	0	0	0	0	0	
8											
9	**Выбор ведущего элемента для первой итерации**										
10	**Базис**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**y1**	**y2**	**y3**	**b**	
11	**y1**	5	3	-1	0	0	1	0	0	225	45
12	**y2**	2.5	3	0	-1	0	0	1	0	150	60
13	**y3**	1	1.3	0	0	-1	0	0	1	80	80
14	**M**	-8.5	-7.3	1	1	1	0	0	0	-455	
15	**1**	5	2	0	0	0	0	0	0	0	
16											

Поскольку M сколь угодно большое положительное число, очевидно, что знак коэффициента $(\alpha_j+\beta_j\cdot M)$ полностью определяется знаком β_j

Это определяет ход решения *М*-задачи:

ход решения *М*-задачи:

▲сначала избавляемся от отрицательных коэффициентов в первой строке ЦФ (в таблицах эта строка помечена буквой «М»);

▲ далее избавляемся от отрицательных коэффициентов во второй строке ЦФ (в таблицах эта строка помечена буквой «1»), при условии, что в этом столбце строки «М» содержится ноль.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Исходная симплекс-таблица с искусственными переменными(М-задача).										
2	**Базис**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**y1**	**y2**	**y3**	**b**	
3	**y1**	5	3	-1	0	0	1	0	0	225	
4	**y2**	2.5	3	0	-1	0	0	1	0	150	
5	**y3**	1	1.3	0	0	-1	0	0	1	80	
6	**M**	-8.5	-7.3	1	1	1	0	0	0	0	
7	**1**	5	2	0	0	0	0	0	0	0	
8											
9	**Выбор ведущего элемента для первой итерации**										
10	**Базис**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**y1**	**y2**	**y3**	**b**	
11	**y1**	5	3	-1	0	0	1	0	0	225	45
12	**y2**	2.5	3	0	-1	0	0	1	0	150	60
13	**y3**	1	1.3	0	0	-1	0	0	1	80	80
14	**M**	-8.5	-7.3	1	1	1	0	0	0	-455	
15	**1**	5	2	0	0	0	0	0	0	0	
16											

С

3.3. Метод искусственного базиса

■ М-задача

$$-(5-8.5\cdot M)\cdot x_1-(2-7.3\cdot M)\cdot x_2-$$
$$-M\cdot x_3-M\cdot x_4-M\cdot x_5-M\cdot 455\to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2-x_3+y_1=225\\ 2.5x_1+3x_2-x_4+y_2=150\\ x_1+1.3x_2-x_5+y_3=80 \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,\ x_5\ge 0$$
$$y_1\ge 0,\quad y_2\ge 0,\quad y_3\ge 0$$

ЦФ соответствуют две строки!

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Исходная симплекс-таблица с искусственными переменными(М-задача).										
2	**Базис**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**y1**	**y2**	**y3**	**b**	
3	**y1**	**5**	**3**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**225**	
4	**y2**	**2.5**	**3**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**150**	
5	**y3**	**1**	**1.3**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**80**	
6	**M**	**-8.5**	**-7.3**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	
7	**1**	**5**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
8											
9	**Выбор ведущего элемента для первой итерации**										
10	**Базис**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**y1**	**y2**	**y3**	**b**	
11	**y1**	**5**	**3**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**225**	**45**
12	**y2**	**2.5**	**3**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**150**	**60**
13	**y3**	**1**	**1.3**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**80**	**80**
14	**M**	**-8.5**	**-7.3**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**-455**	
15	**1**	**5**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
16											

3.3. Метод искусственного базиса

- М-задача

$$-(5-8.5\cdot M)\cdot x_1-(2-7.3\cdot M)\cdot x_2-$$
$$-M\cdot x_3-M\cdot x_4-M\cdot x_5-M\cdot 455\to\max$$

$$\begin{cases}5x_1+3x_2-x_3+y_1=225\\2.5x_1+3x_2-x_4+y_2=150\\x_1+1.3x_2-x_5+y_3=80\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,\ x_5\ge 0$$
$$y_1\ge 0,\quad y_2\ge 0,\quad y_3\ge 0$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
17	**Симплекс-таблица после первой итерации**										
18	**Базис**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**y1**	**y2**	**y3**	**b**	
19	**x1**	**1**	**0.6**	**-0.2**	**0**	**0**	**0.2**	**0**	**0**	**45**	**75**
20	**y2**	**0**	**1.5**	**0.5**	**-1**	**0**	**-0.5**	**1**	**0**	**37.5**	**25**
21	**y3**	**0**	**0.7**	**0.2**	**0**	**-1**	**-0.2**	**0**	**1**	**35**	**50**
22	**M**	**0**	**-2.2**	**-0.7**	**1**	**1**	**1.7**	**0**	**0**	**-72.5**	
23	**1**	**0**	**-1**	**1**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**-225**	
24											
25	**Симплекс-таблица после второй итерации**										
26	**Базис**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**y1**	**y2**	**y3**	**b**	
27	**x1**	**1**	**0**	**-0.4000**	**0.4**	**0**	**0.4**	**-0.4**	**0**	**30**	**75**
28	**x2**	**0**	**1**	**0.3333**	**-0.67**	**0**	**-0.333**	**0.667**	**0**	**25**	**-37.5**
29	**y3**	**0**	**0**	**-0.0333**	**0.467**	**-1**	**0.033**	**-0.47**	**1**	**17.5**	**37.5**
30	**M**	**0**	**0**	**0.0333**	**-0.47**	**1**	**0.967**	**1.467**	**0**	**-17.5**	
31	**1**	**0**	**0**	**1.3333**	**-0.67**	**0**	**-1.333**	**0.667**	**0**	**-200**	

3.3.

Метод искусственного базиса

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
33	**Симплекс-таблица после третьей итерации**									
34	Базис	x1	x2	x3	x4	x5	y1	y2	y3	b
35	x1	1	0	-0.3714	0	0.857	0.371	0	-0.857	15
36	x2	0	1	0.2857	0	-1.43	-0.286	0	1.4286	50
37	x4	0	0	-0.0714	1	-2.14	0.071	-1	2.1429	37.5
38	M	0	0	0.0000	0	0	1	1	1	0
39	1	0	0	1.2857	0	-1.43	-1.286	0	1.4286	-175
40										
41	**Симплекс-таблица после четвертой итерации**									
42	Базис	x1	x2	x3	x4	x5	y1	y2	y3	b
43	x5	1.167	0	-0.4333	0	1	0.433	0	-1	17.5
44	x2	1.667	1	-0.3333	0	0	0.333	0	0	75
45	x4	2.5	0	-1.0000	1	0	1	-1	0	75
46	M	0	0	0.0000	0	0	1	1	1	0
47	1	1.667	0	0.6667	0	0	-0.667	0	0	-150

$$-1.667 \cdot x_1 - 0.6667 \cdot x_3 -$$

$$-(-0.667 + M) \cdot y_1 - M \cdot y_2 - M \cdot y_3 - 150 \rightarrow \max$$

ЦФ после завершения итераций!!

Решение М-задачи

$$\bar{x} = (x_1 = 0;\ x_2 = 75;\ x_3 = 0;\ x_4 = 75;\ x_5 = 17.5;\ y_1 = 0;\ y_2 = 0;\ y_3 = 0)$$

Решение исходной-задачи

$$\bar{x} = (x_1 = 0;\ x_2 = 75;\ x_3 = 0;\ x_4 = 75;\ x_5 = 17.5)$$

3.3.

В некоторых случаях алгоритм симплексного метода может зацикливаться.

Пути преодоления этой проблемы описаны в рекомендуемой литературе.

ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСОВ

- Здесь (2.1) - целевая функция (ЦФ); (2.2) - система ограничений; (2.3) - естественные граничные условия;

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\dots,m. \qquad (2.2)$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1,\dots,n. \qquad (2.3)$$

x_j – количество выпускаемой продукции j-го типа, $j=1,\dots,n$;
b_i - количество располагаемого ресурса i-го вида, $i=1,\dots,m$;
a_{ij} - норма расхода i-го ресурса для выпуска единицы продукции j-го типа;
c_j - прибыль, получаемая от реализации единицы продукции j-го типа.

Двойственная задача

- Правила:

Каждому *i*-му ограничению исходной задачи соответствует переменная двойственной задачи *u*i (двойственная переменная).

Каждой *j*-ой переменной исходной задачи соответствует ограничение двойственной задачи. Матрица коэффициентов ограничений двойственной задачи

является транспонированной

Коэффициенты при двойственных переменных в целевой функции двойственной задачи равны правым частям ограничений исходной задачи.

Если исходная задача была на нахождение максимума, то двойственная будет на

нахождение минимума

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\dots,m. \qquad (2.2)$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1,\dots,n. \qquad (2.3)$$

$$G = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \to \min, \qquad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, u_i \ge c_j, \qquad (2.8)$$

$$u_i \ge 0, \qquad (2.9)$$

$$i = 1,\dots,m.\ ; j = 1,\dots,n$$

двойственные переменные принято называть *двойственными оценками Ui*

Двойственная задача

- Правила:

1. Каждому *i*-му ограничению исходной задачи соответствует переменная двойственной задачи *ui* (двойственная переменная).

2. Каждой *j*-ой переменной исходной задачи соответствует ограничение двойственной задачи. Матрица коэффициентов ограничений двойственной задачи

является транспонированной

3. Коэффициенты целевой функции прямой задачи являются свободными членами (правыми частями) ограничений двойственной задачи

4. Коэффициенты при двойственных переменных в целевой функции двойственной задачи равны правым частям ограничений исходной задачи.

5. Если исходная задача была на нахождение максимума, то двойственная будет на

нахождение минимума

6. Число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной, а число ограничений двойственной — числу

переменных прямой.

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\ldots,m. \qquad (2.2)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\ldots,n. \qquad (2.3)$$

$$G = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \to \min, \qquad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \ge c_j, \qquad (2.8)$$

$$u_i \ge 0, \qquad (2.9)$$

$$i = 1,\ldots,m. \; ; j = 1,\ldots,n$$

двойственные переменные принято называть *двойственными оценками Ui или теневой ценой*

Двойственная задача

- ## Теорема 1

Пусть x_j, j = 1, 2,…, n обозначает допустимый план прямой задачи, а u_i, i = 1, 2,…, m – допустимый план двойственной задачи. Тогда выполняется неравенство: ,

$$G = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \le F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при этом на оптимальных планах всегда выполняется равенство ($maxF = minG$). Если хотя бы одна из задач не имеет допустимого плана, то ни одна из них не имеет оптимального решения.

- ## Теорема 2

Для того чтобы допустимые планы прямой и двойственной задач были оптимальными, *необходимо и достаточно*, чтобы выполнялись равенства

$$x_j(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i - c_j) = 0 \qquad u_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i) = 0,$$

Эти условия называются условиями

дополняющей нежесткости!

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\dots,m. \tag{2.2}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1,\dots,n. \tag{2.3}$$

$$G = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \to \min, \tag{2.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \ge c_j, \tag{2.8}$$

$$u_i \ge 0, \tag{2.9}$$

$$i = 1,\dots,m. \ ; j = 1,\dots,n$$

двойственные переменные принято называть *двойственными оценками Ui*

Двойственная задача

Свойства решений (следствия из теорем двойственности!)

- Значения целевых функций для оптимальных решений прямой и двойственной задач совпадают

$$\max F = \min G$$

Двойственная оценка u_i в экономических приложениях называется ***теневой ценой.*** Теневая цена u_i является коэффициентом при b_i => показывает, как изменится целевая функция при изменении i-го ресурса на единицу.

$$\max F = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i$$

Теневая цена показывает предельную величину цены на данный ресурс, которую целесообразно платить за него, чтобы производство продукции давало прибыль.

3.4. Экономические приложения линейного программирования

Матрица потребности в ресурсах для

Объёмы невоспроизводимых ресурсов

Матрица затрат (+) и выпуска (-) ресурсов при единичном объёме производства в

Матрица выпуска (+) конечной продукции

Вектор объёмов потребления каждого вида конечной продукции при единичном (стандартном) уровне удовлетворения потребностей

Основная задача наро

планирования

$\mathbf{x} = (x_j)$ – объёмы производс

(t, шт., м^3 и т.д.

y – объём удовлетворе

Целевая функция: max y

Балансы невоспроизводимых ресурсов: $\mathbf{A}_1\mathbf{x} \le \mathbf{b}$

Балансы воспроизводимых ресурсов: $\mathbf{A}_2\mathbf{x} \le \mathbf{0}$

Баланс продукции: $\mathbf{A}_3\mathbf{x} \ge y\mathbf{c}$

$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$, $y \ge 0$.

3.4. Экономические приложения линейного программирования

Основная задача произв

планирования

$\mathbf{x} = (x_j)$ — объёмы реализации п

(т, шт., м^3 и т.д.)

$\mathbf{y} = (y_k)$ — объёмы закупки ресур

(т, шт., м^3 и т.д.)

Целевая функция: max

Балансы ресурсов: $\mathbf{A}_1\mathbf{x} \le \mathbf{y} + \mathbf{b}_1$

(например, работники, производственные помещения, оборудование, сырьё, электроэнергия и т.п.)

Выполнение обязательств: $\mathbf{A}_2\mathbf{x} \ge \mathbf{b}_2$

(например, налог на имущество, возврат инвестиционного кредита и т.п.)

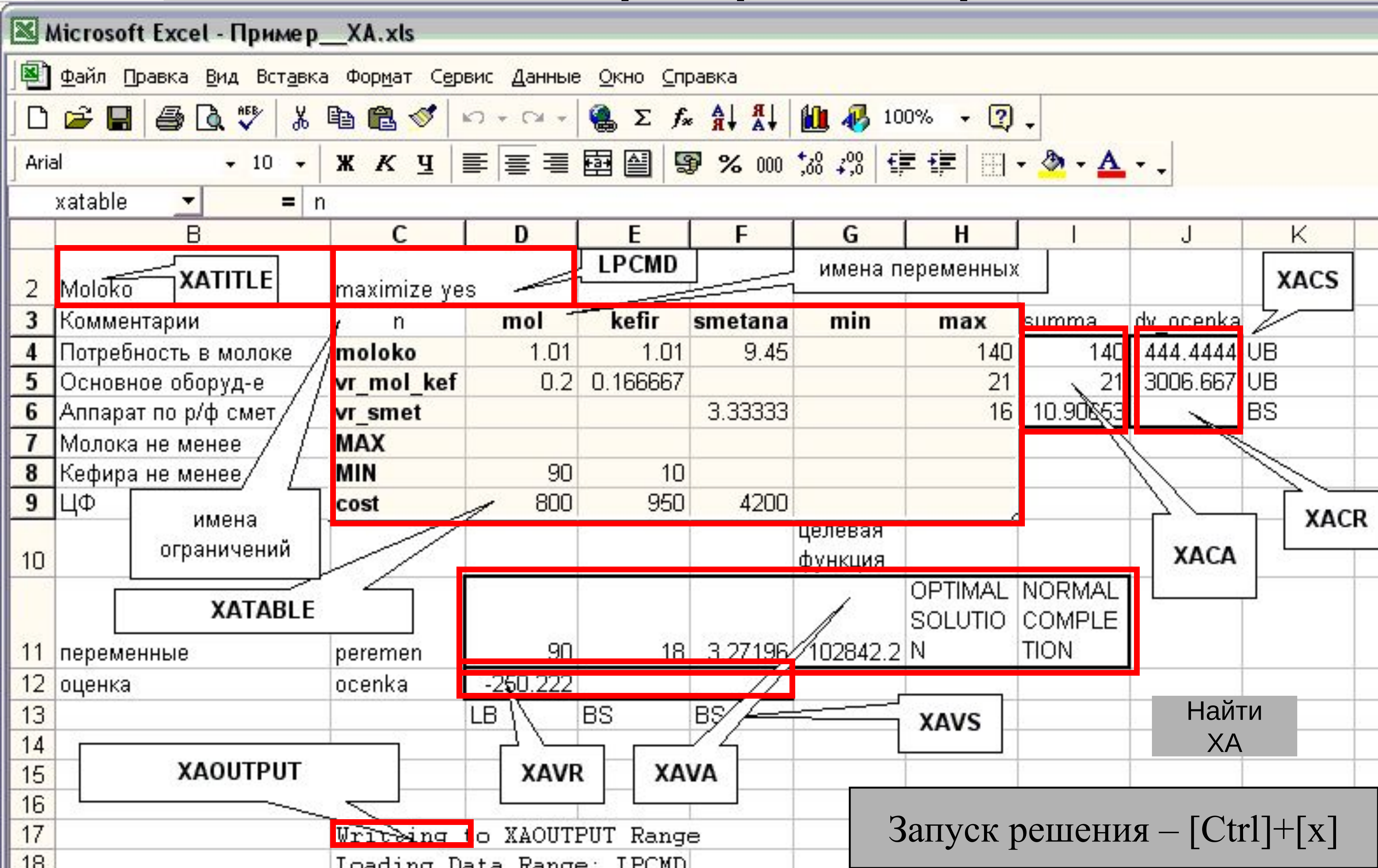
$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}, \mathbf{y} \ge \mathbf{0}.$

Вектор цен

Объёмы обязательств, имеющихся у предприятия и учитываемых при оптимальном планировании (выполнение которых зависит от составленного плана)

реализации единицы продукции каждого вида

3.5. Программное обеспечение линейного программирования



Найти ХА

Запуск решения – [Ctrl]+[x]

3.5.

- Два способа установки XA
  - Если есть права доступа к каталогу C:\WINDOWS
    - копируем туда файлы CXA32.DLL и CAXA32.DLL
  - Иначе
    - копируем файлы CXA32.DLL и CAXA32.DLL в ту папку, в которой решаем модель
    - после вызова файла модели нажимаем кнопку

      Найти XA

      и указываем расположение любого из этих файлов
      - это действие повторяется при каждом вызове Excel
- Антивирус Касперского блокирует выполнение XA
    - При первом вызове программы следует в ответ на предупреждение антивируса дать ему указание разрешать выполнение данной программы