

Тема 3. Электромагнитные колебания и переменный ток.

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

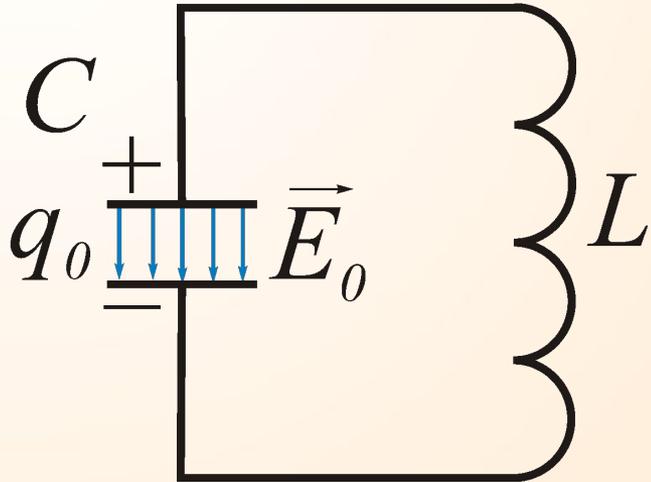
$$\tau = \frac{l}{c}$$

Условие квазистационарности:

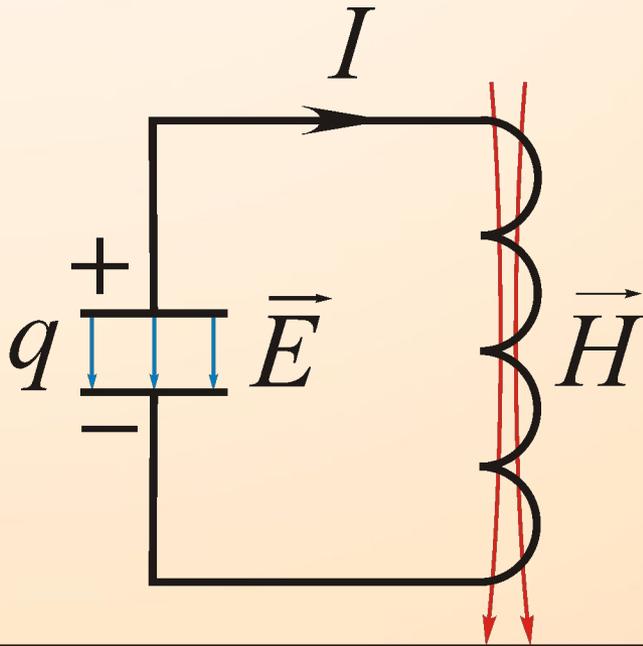
$$\tau = \frac{l}{c} \ll T$$

$$\nu = 50 \text{ Гц} \Rightarrow l \leq 100 \text{ км}$$

3.1. Свободные незатухающие электрические колебания

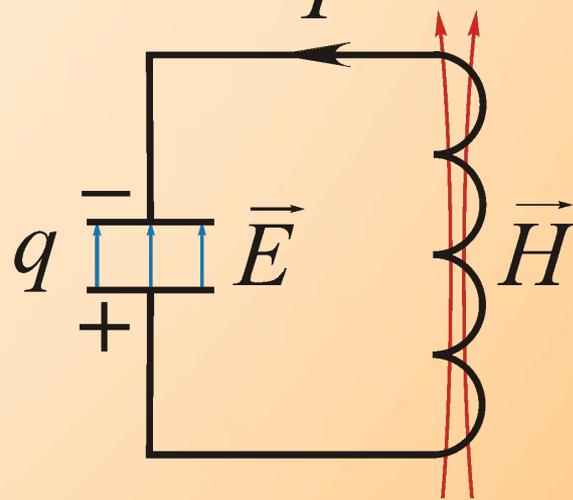
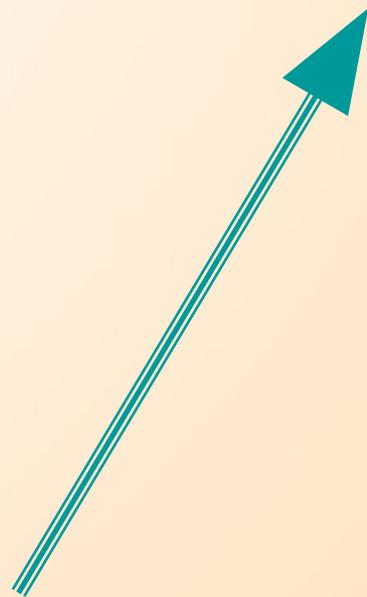
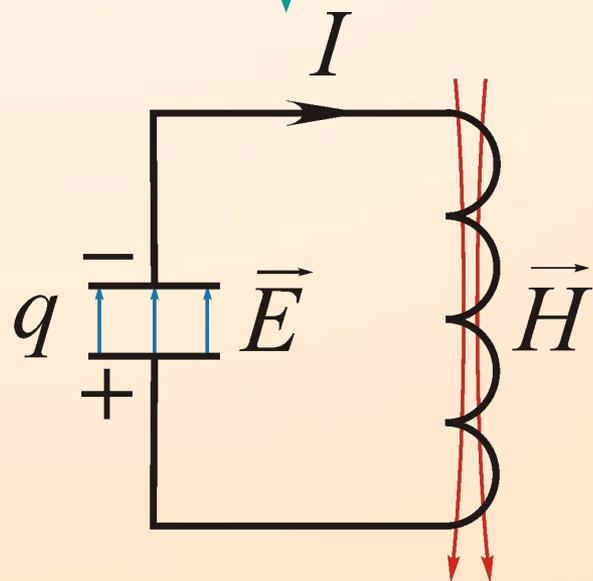
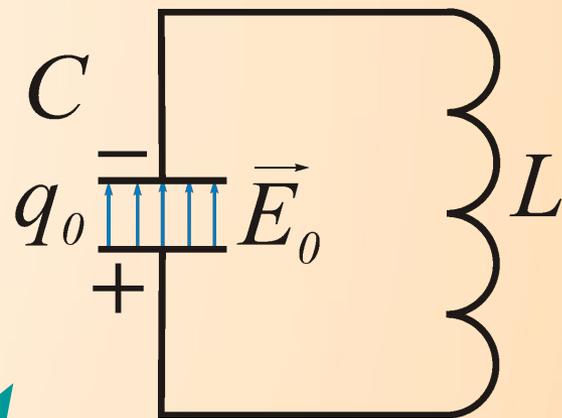
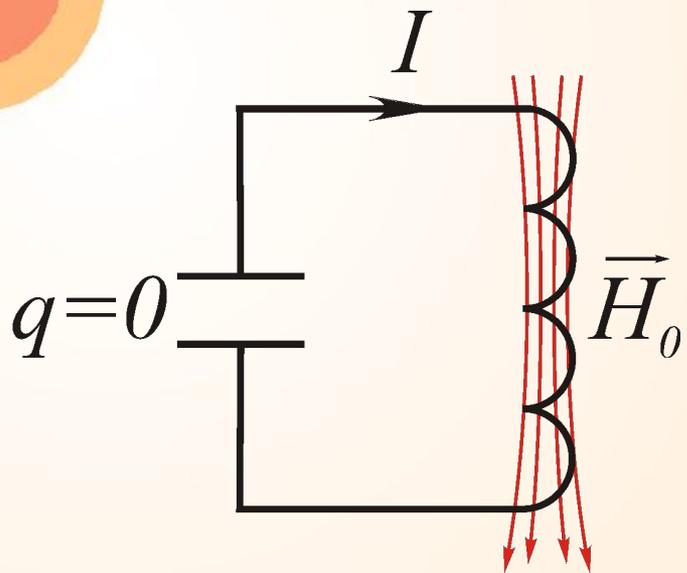


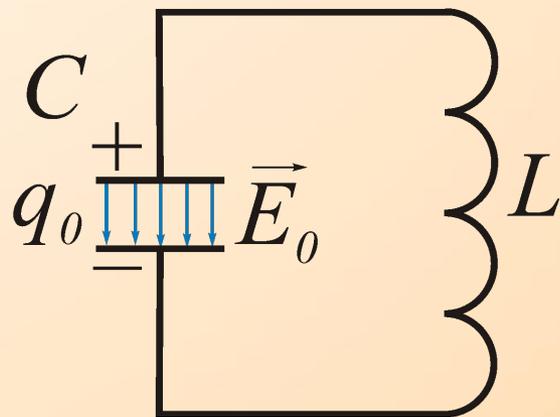
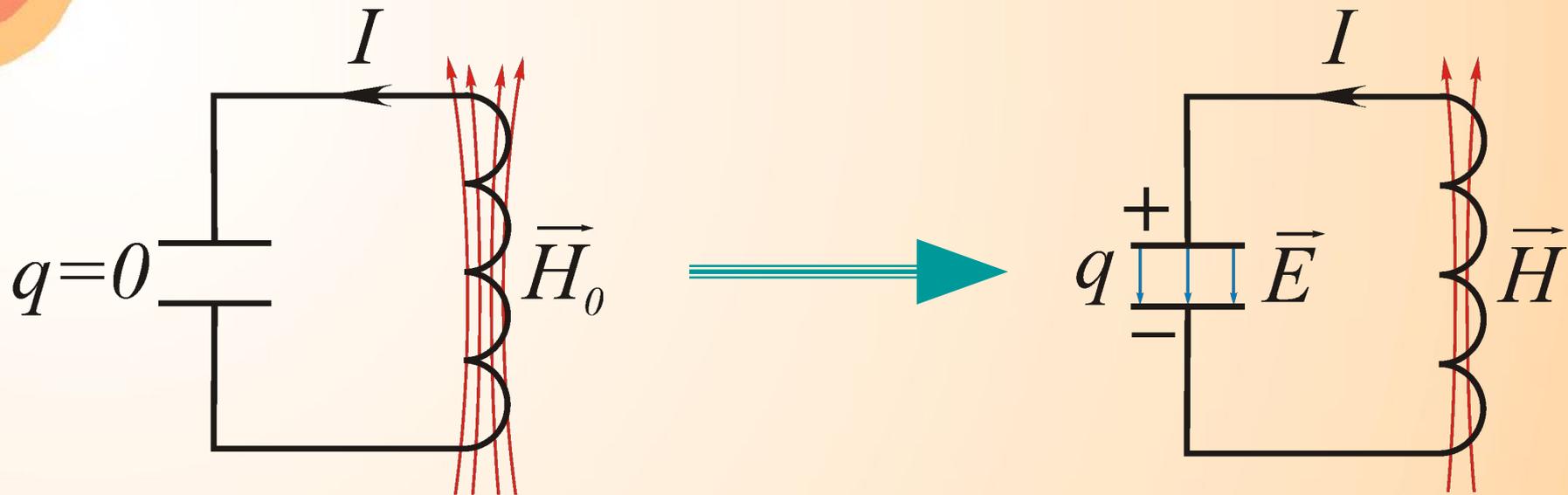
$$W_e = \frac{q_0^2}{2C} \quad (3.1)$$



$$W_e = \frac{q^2}{2C} \quad W_m = \frac{LI^2}{2}$$

$$W = W_e + W_m \quad (3.2)$$





$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

$$I \cdot R = \varphi_1 - \varphi_2 + E_{12} \quad (3.3)$$

$$R = 0, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C}, \quad E_{12} = E_c = -L \frac{dl}{dt}$$

$$0 = -\frac{q}{C} - L \frac{dl}{dt} \quad (3.4)$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d(\dot{q})}{dt} = \ddot{q} \Rightarrow 0 = -\frac{q}{C} - L \cdot \ddot{q}$$

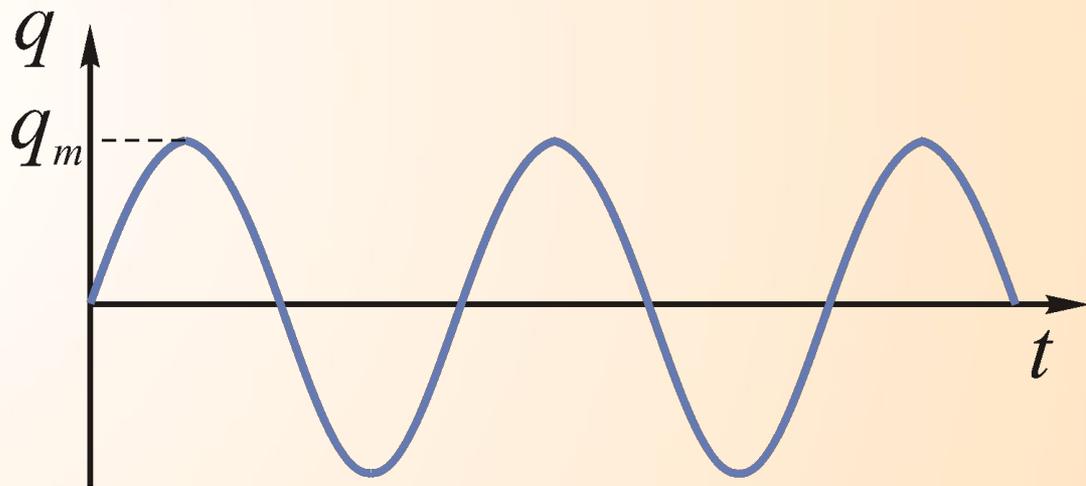
$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (3.5)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad - \text{собственная частота колебаний}$$

Формула Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (3.6)$$

$$q = q_m \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (3.7)$$



Напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q}{C} = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (3.8)$$

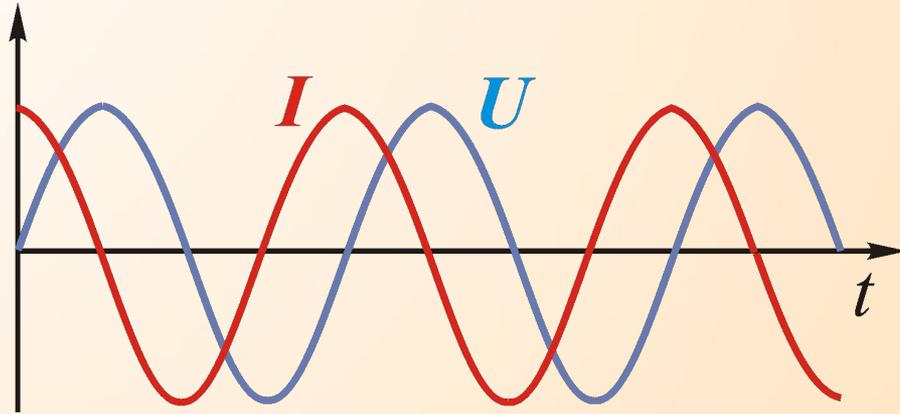
$$U_m = q_m / C$$

Ток через контур:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

$$I_m = \omega_0 q_m = \frac{q_m}{\sqrt{LC}} \quad - \sin \alpha = \cos(\alpha + \pi/2)$$

$$I = I_m \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2) \quad (3.9)$$



$$U_m = \frac{q_m}{C} = \frac{I_m}{\omega_0 C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} I_m = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_m$$

$$\rho = \sqrt{L/C} \quad - \text{волновое сопротивление.}$$

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \alpha) \quad (3.10)$$

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha) \quad (3.11)$$

$$\frac{LI_m^2}{2} = \frac{L\omega_0^2 q_m^2}{2} = \frac{Lq_m^2}{2LC} = \frac{q_m^2}{2C}$$

$$\underline{W = W_e + W_m} = \frac{q_m^2}{2C} (\cos^2(\omega_0 t + \alpha) + \sin^2(\omega_0 t + \alpha)) =$$

$$\underline{= \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}} \quad (3.12)$$

Задача 3.1

Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки индуктивности. Определить частоту колебаний, возникающих в контуре, если максимальная сила тока в катушке индуктивности 1,2 А, максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора 1200 В, полная энергия контура 1,1 мДж.

Дано:

$$I_m = 1,2 \text{ А}$$

$$U_{Cm} = 1200 \text{ В}$$

$$W = 1,1 \text{ мДж} = 1,1 \cdot 10^{-3}$$

Дж

ν - ?

$$W = \frac{LI_m^2}{2} \Rightarrow L = \frac{2W}{I_m^2}$$

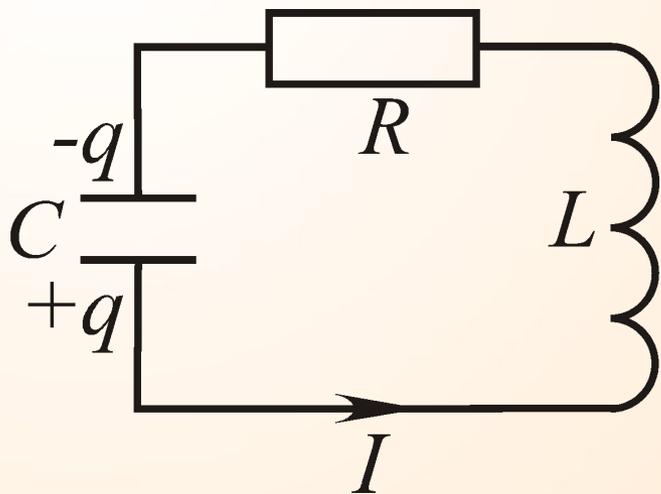
$$W = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{(CU_{Cm})^2}{2C} = \frac{CU_{Cm}^2}{2} \Rightarrow C = \frac{2W}{U_{Cm}^2}$$

$$LC = \frac{2W}{I_m^2} \cdot \frac{2W}{U_{Cm}^2} = \frac{4W}{I_m^2 U_{Cm}^2}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{I_m U_{Cm}}{4\pi W} = \frac{1,2 \text{ A} \cdot 1200 \text{ В}}{4 \cdot 3,14 \cdot 1,1 \cdot 10^3 \text{ Дж}} =$$

$$= 1,04 \cdot 10^5 \frac{\text{ВТ}}{\text{ВТ} \cdot \text{с}} = 1,04 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{с}} = \underline{1,04 \cdot 10^5 \text{ Гц}}$$

3.2. Затухающие электрические колебания



$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dl}{dt} \quad (3.13)$$

$$I = \dot{q} \quad dl/dt = \dot{q}$$

$$\dot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad \beta = \frac{R}{2L}$$

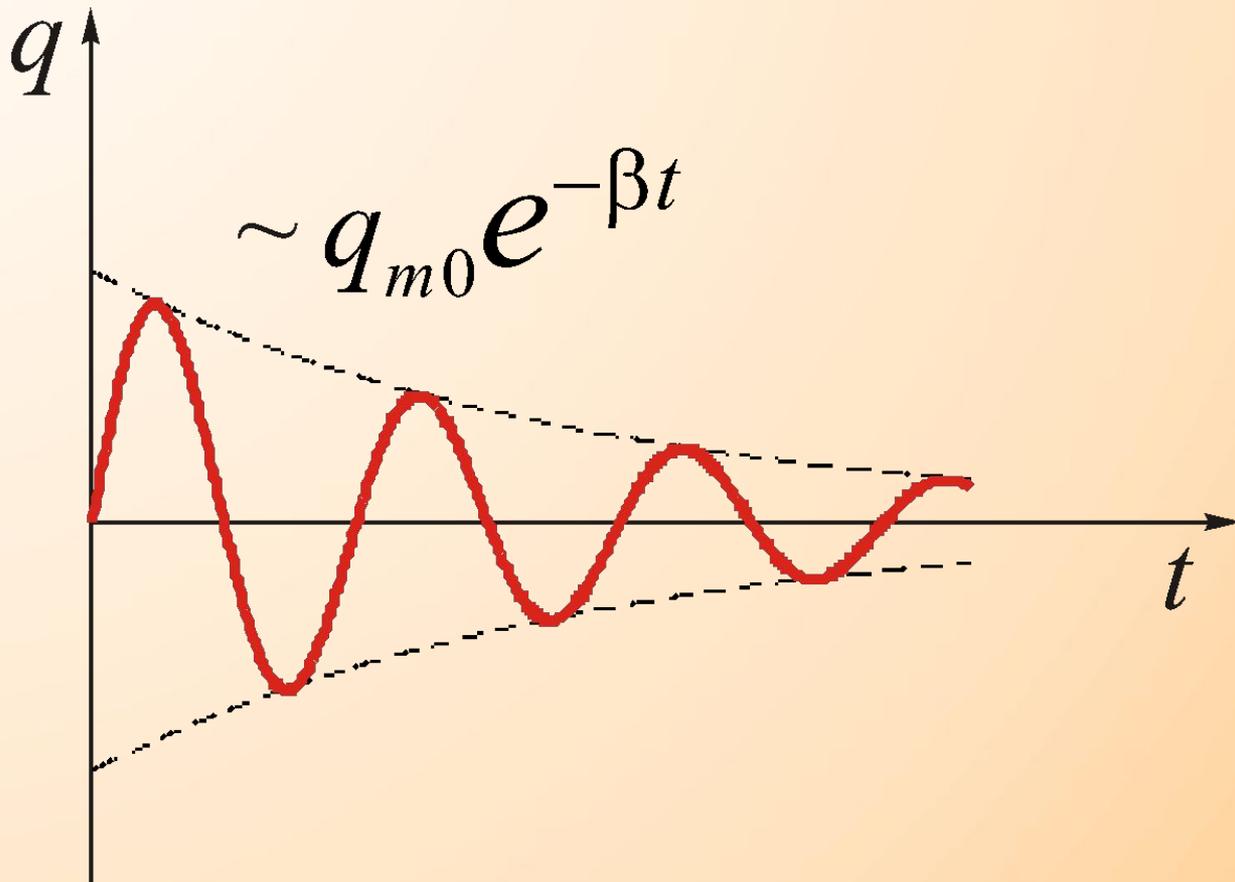
$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (3.15)$$

Слабое затухание:

$$\beta^2 \ll \omega_0^2, \quad \text{т.е.} \quad R^2/4L^2 \ll 1/LC$$

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha) \quad (3.16)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (3.17)$$



Напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q}{C} = U_{m0} e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha) \quad (3.18)$$

$$U_{m0} = q_{m0}/C$$

Ток через контур:

$$I = dq/dt$$

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

$$I = -\beta q_{m0} e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha) - \omega q_{m0} e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

$$-\beta/\omega_0 = \cos\psi \quad \omega/\omega_0 = \sin\psi$$

$$I = \omega_0 q_{m0} e^{-\beta t} (\cos\psi \cdot \cos(\omega t + \alpha) - \sin\psi \cdot \sin(\omega t + \alpha))$$

$$I = I_{m0} e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha + \psi) \quad (3.19)$$

$$\sin\psi > 0, \cos\psi < 0 \Rightarrow \pi/2 < \psi < \pi$$

Логарифмический декремент:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

$$\lambda = \frac{R}{2L} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi R}{L\omega}$$

$$\beta^2 \ll \omega_0^2 \Rightarrow \omega \approx \omega_0$$

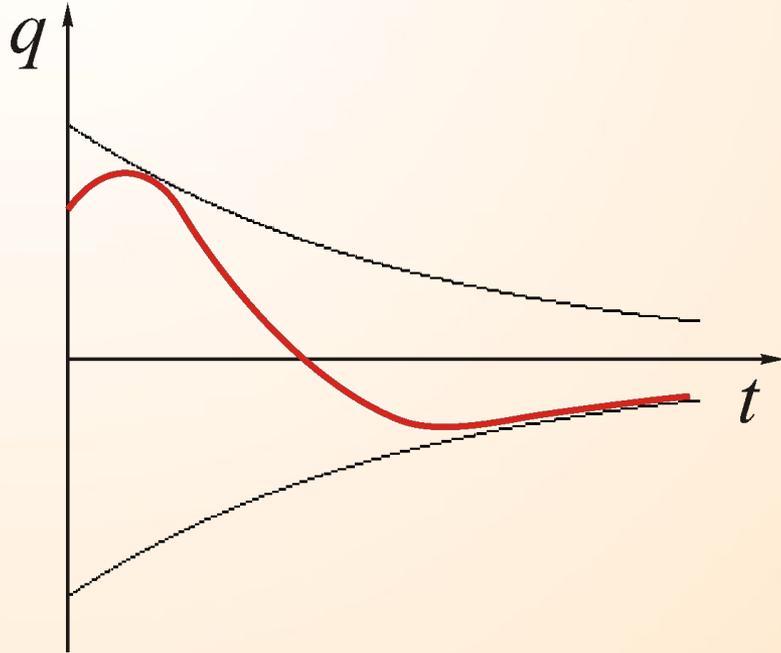
$$\lambda = \pi R \sqrt{C/L} \quad (3.20)$$

Добротность: $Q = \frac{\pi}{\lambda}$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R} \quad (3.21)$$

Сильное затухание:

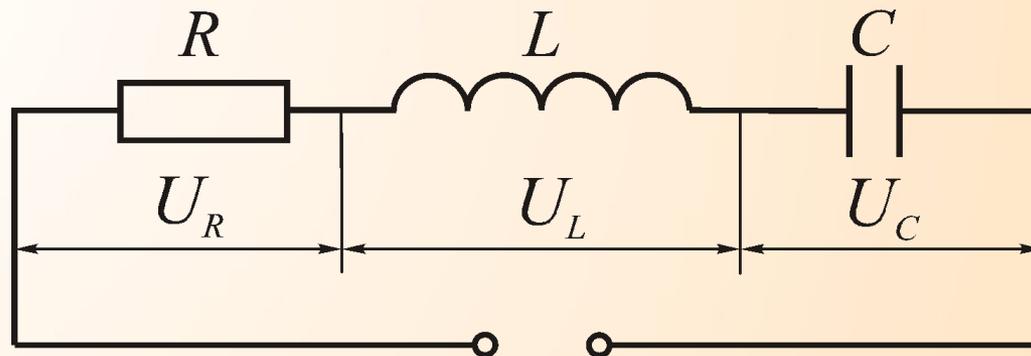
$$\beta^2 \geq \omega_0^2, \quad \text{т.е.} \quad R^2/4L^2 \geq 1/LC$$



Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется **критическим**.

$$R_K = 2\sqrt{L/C} \quad (3.22)$$

3.3. Вынужденные электрические колебания



$$U = U_m \cdot \cos \omega t$$

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dl}{dt} + U_m \cdot \cos \omega t \quad (3.23)$$

$$I = \dot{q} \quad \frac{dl}{dt} = \dot{q} \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad \beta = \frac{R}{2L}$$

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t \quad (3.24)$$

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi) \quad (3.25)$$

$$q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (3.26)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R}{1/\omega C - \omega L} \quad (3.27)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \cdot \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi) \quad (3.28)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\psi - \pi/2) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\psi} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (3.29)$$

$\omega L > 1/\omega C \Rightarrow \varphi > 0$, ток отстает от напряжения;

$\omega L < 1/\omega C \Rightarrow \varphi < 0$, ток опережает напряжение;

$$I_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (3.30)$$

$$U_R = IR, \quad U_C = q/C, \quad U_L = L \frac{dl}{dt}$$

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cdot \cos \omega t \quad (3.31)$$

$$U_R = IR = U_{Rm} \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad (3.32)$$

$$U_{Rm} = RI_m \quad (3.33)$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = U_{Cm} \cdot \cos(\omega t - \varphi - \pi/2) \quad (3.34)$$

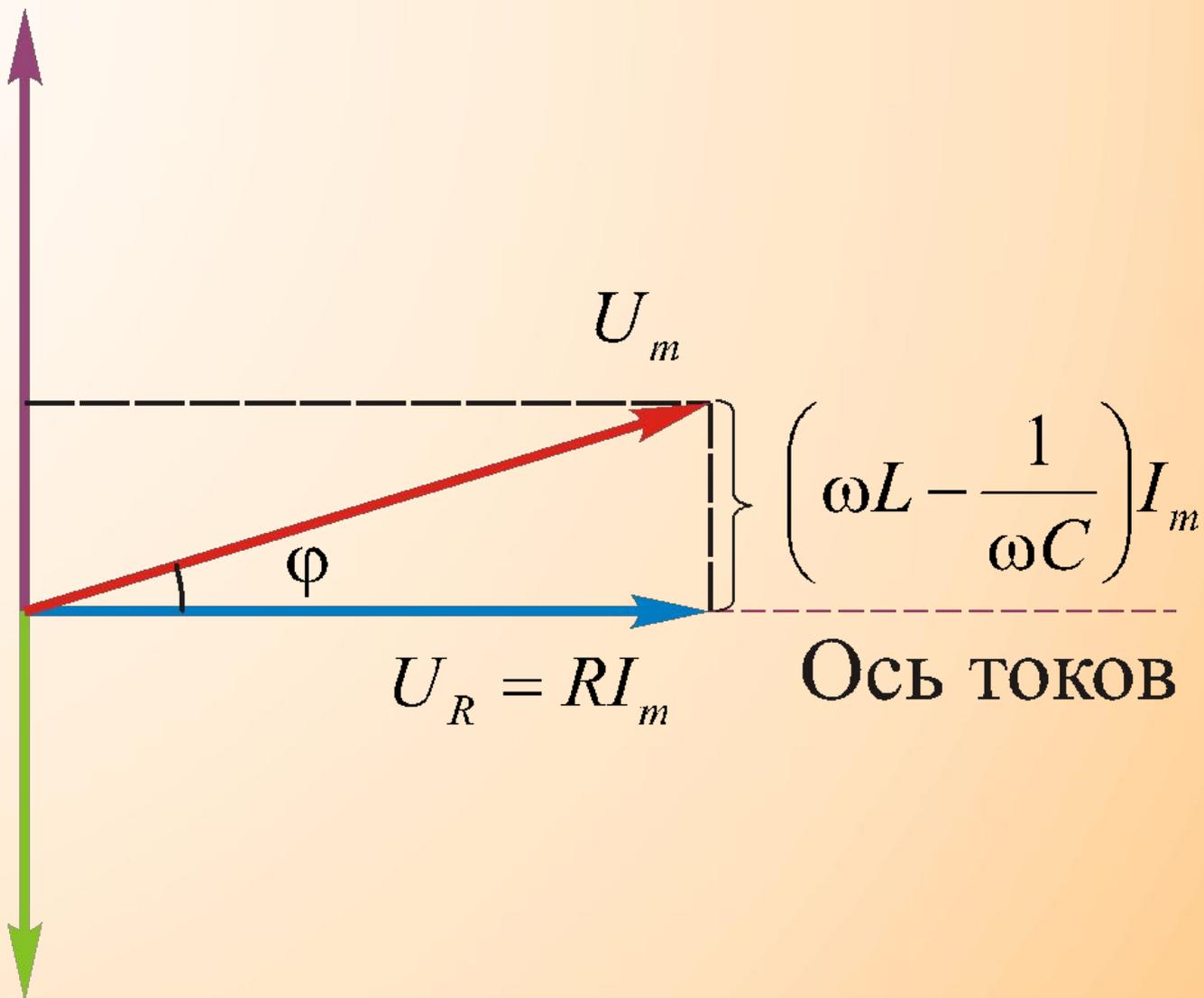
$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{I_m}{\omega C} \quad (3.35)$$

$$U_L = L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U_{Lm} \cdot \cos(\omega t - \varphi + \pi/2) \quad (3.36)$$

$$U_{Lm} = \omega L I_m \quad (3.37)$$

$$U_L = \omega L I_m$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_m$$



Резонанс напряжения на конденсаторе:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (3.38)$$

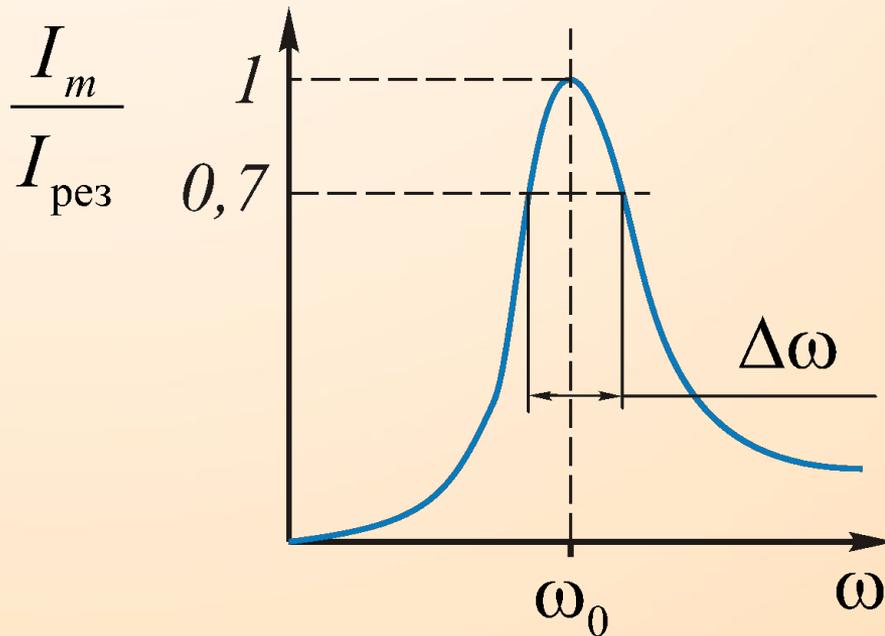
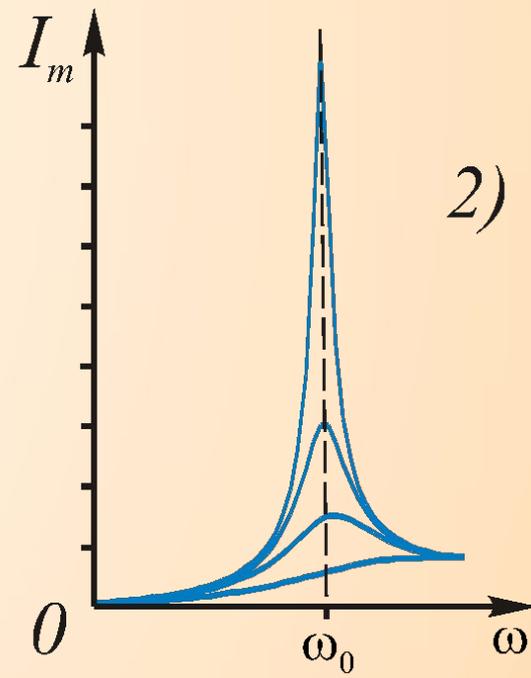
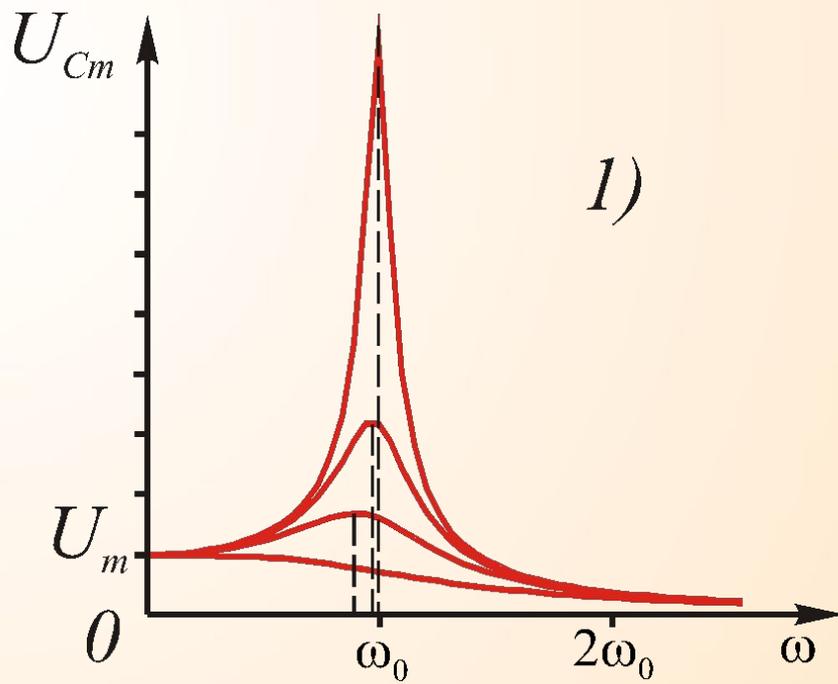
Малое затухание ($\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$):

$$\frac{U_{\text{Стрез}}}{U_m} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \quad (3.39)$$

Резонанс силы тока в контуре:

$$\omega L - 1/\omega C = 0$$

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad (3.40)$$



$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (3.41)$$

Задача 3.2

Колебательный контур состоит из резистора сопротивлением 100 Ом, конденсатора емкостью 0,55 мкФ и катушки индуктивностью 0,03 Гн. Определить сдвиг фаз между током через контур и приложенным напряжением, если частота приложенного напряжения 1000 Гц.

Дано:

$$R = 100 \text{ Ом}$$

$$C = 0,55 \text{ мкФ} = 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ Ф}$$

$$L = 0,03 \text{ Гн}$$

$$\nu = 1000 \text{ Гц}$$

$\varphi - ?$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

$$\begin{aligned} \omega L &= 2\pi\nu L = 2\pi \cdot 10^3 \cdot 0,03 = \\ &= 1880 \text{ м} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 0,55 \cdot 10^{-6}} = 2880 \text{ м}$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{188 - 288}{100} = -1$$

$$\varphi = -45^\circ$$

Таким образом колебания силы тока опережают по фазе колебания приложенного напряжения на 45° .

3.4. Переменный электрический ток.

$$U = U_m \cdot \cos \omega t \quad (3.42)$$

$$I = I_m \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad (3.43)$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (3.44)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (3.45)$$

- **Полным электрическим сопротивлением** или **импедансом** называется величина

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

- $X_L = \omega L$ - **индуктивное сопротивление**

$$X_C = 1/\omega C$$
 - **емкостное сопротивление**

$$X = X_L - X_C$$
 - **реактивное сопротивление**

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Мощность, выделяемая в цепи переменного тока:

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_m \cos \omega t \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi) \quad (3.46)$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$P(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t - \varphi) \quad (3.47)$$

$$P = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi \quad (3.48)$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}, \quad \frac{U_m}{Z} = I_m$$

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \frac{R}{Z} = \frac{R I_m^2}{2} \quad (3.49)$$

$$I = I_m / \sqrt{2}$$

- Величина $I_d = I_m / \sqrt{2}$ называется **действующим значением** силы тока, а величина $U_d = U_m / \sqrt{2}$ называется **действующим значением** напряжения.

$$P = U_d I_d \cos\varphi \quad (3.50)$$

$\cos\varphi$ — называется **коэффициентом мощности**.

Задача 3.3

Катушка длиной 50 см и площадью поперечного сечения 10 см^2 включена в цепь переменного тока с частотой 50 Гц. Число витков катушки 3000. Найти активное сопротивление катушки, если сдвиг фаз между током и напряжением 60° .

Дано:

$$l = 50 \text{ см} = 0,5 \text{ м}$$

$$S = 10 \text{ см}^2 = 10^{-3} \text{ м}^2$$

$$\nu = 50 \text{ Гц}$$

$$N = 3000$$

$$\varphi = 60^\circ$$

$$R - ?$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L}{R}$$

$$R = \frac{\omega L}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{2\pi\nu L}{\operatorname{tg}\varphi}$$

$$L = \mu\mu_0 n^2 V = \mu\mu_0 (N/l)^2 S l =$$

$$= \mu\mu_0 N^2 S / l = 1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} / 0,5 =$$

$$= 2,26 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$$

$$R = \frac{2\pi\nu L}{\text{tg}\varphi} = \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 2,26 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{3}} = \underline{4,10 \text{ М}}$$