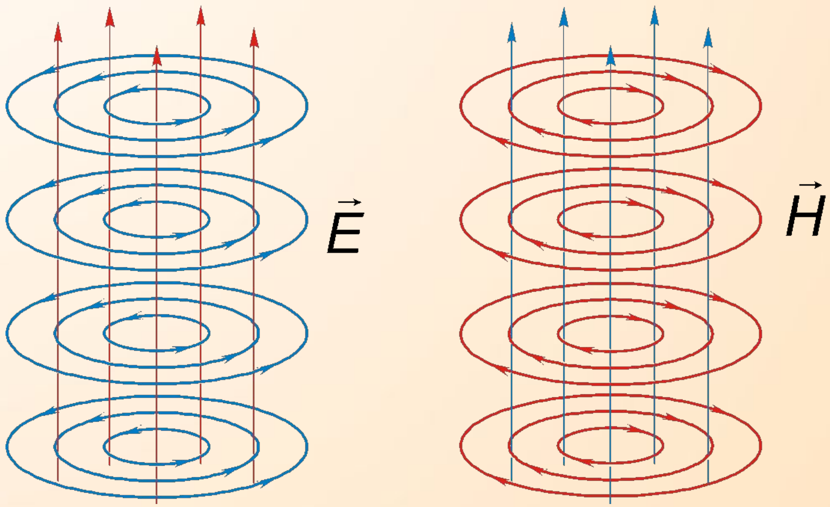
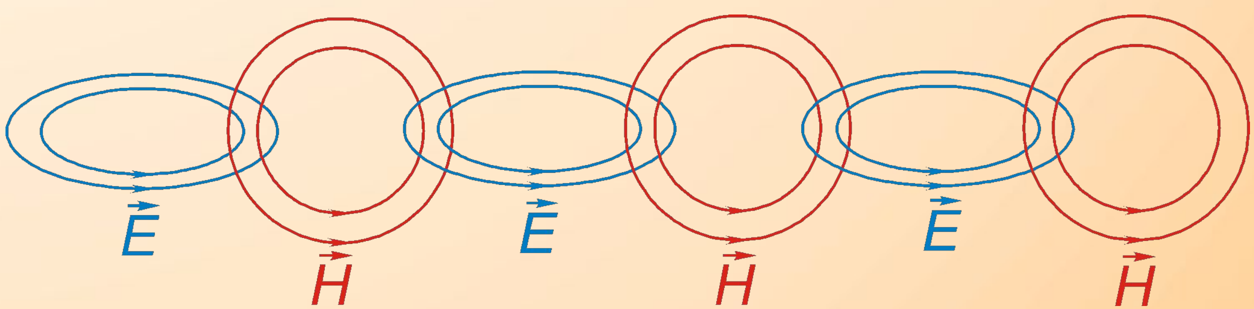
Лекция №4. Электромагнитные волны.

4.1. Волновое уравнение электромагнитных волн.

$$\frac{d\vec{H}}{dt} > 0 \qquad\qquad \frac{d\vec{E}}{dt} > 0$$





Электромагнитной волной называется переменное электромагнитное поле, распространяющееся в пространстве.

- Среда однородная, нейтральная ($\rho = 0$), непроводящая ($j = 0$), с постоянными проницаемостями ε и μ.

$$\begin{cases} rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu\mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} & (1) \\ rot\,\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (2) \\ div\,\vec{B} = div\,\vec{H} = 0 & (3) \\ div\,\vec{D} = div\,\vec{E} = 0 & (4) \end{cases} \qquad (4.1)$$

Из уравнения (1) системы (4.1):

$$rot\,\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\cdot\vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\cdot\vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\cdot\vec{k} =$$

$$= -\mu\mu_0\left(\frac{\partial H_x}{\partial t}\cdot\vec{i} + \frac{\partial H_y}{\partial t}\cdot\vec{j} + \frac{\partial H_z}{\partial t}\cdot\vec{k}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0 \dfrac{\partial H_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu\mu_0 \dfrac{\partial H_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu\mu_0 \dfrac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases} \qquad (4.2)$$

Из уравнения (2) системы (4.1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial H_x}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \qquad (4.3)$$

$$div\,\vec{B} = div\,\vec{H} = 0 \quad (3) \qquad\qquad div\,\vec{D} = div\,\vec{E} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \qquad (4.4)$$

Продифференцируем 1-е уравнение из (4.3) по времени:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H_z}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_y}{\partial t}\right)=$$

$$=\frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\right]$$

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\right]$$

Учитывая (4.4): $$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

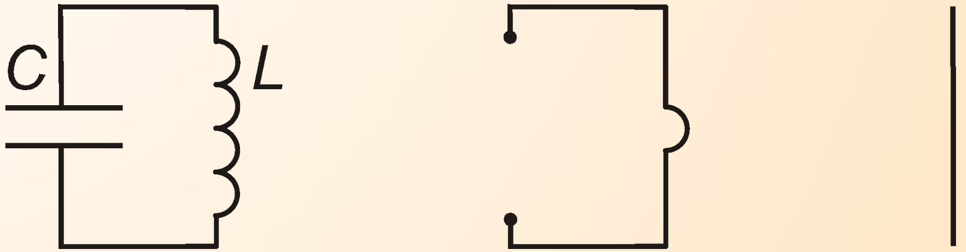
$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}\right] \qquad (4.5)$$

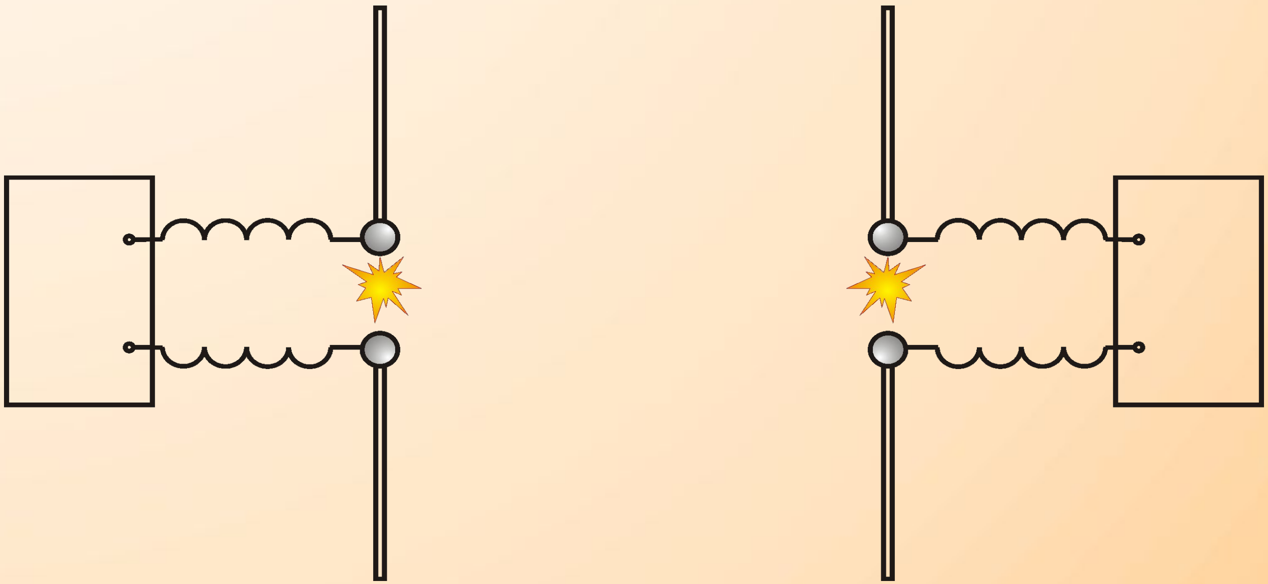
$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad (4.6)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \qquad (4.7)$$

$$\boxed{v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad (4.8)$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \underline{3\cdot 10^8\ \text{м/с}}$$





4.2. Плоская электромагнитная волна.

- Среда однородная, нейтральная, непроводящая, изотропная ($\rho = 0$, $j = 0$, $\varepsilon = const$, $\mu = const$). Направим ось X перпендикулярно волновым поверхностям.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \dfrac{\partial H_z}{\partial t} \qquad \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \dfrac{\partial H_y}{\partial t} \qquad \dfrac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \tag{4.9}$$

$$E_z = H_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \tag{4.10}$$

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1) \qquad (4.11)$$

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2) \qquad (4.12)$$

$\alpha_1 = \alpha_2$

$$\boxed{\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 = \mu\mu_0 H_m^2} \qquad (4.13)$$

Задача 4.1

В однородной изотропной немагнитной среде с диэлектрической проницаемостью равной 3 распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны 10 В/м. Найти амплитуду напряженности магнитного поля и фазовую скорость волны.

Дано:

$\varepsilon = 3$

$E_m = 10$ В/м

H_m - ? v - ?

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{\sqrt{3 \cdot 1}} = \underline{1{,}7 \cdot 10^8 \text{ м/с}}$$

$$\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 = \mu\mu_0 H_m^2 \qquad H_m = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_m =$$

$$= \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}}{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}}} \cdot 10 \text{ В/м} = \underline{4{,}59 \cdot 10^{-2} \text{ А/м}}$$

4.3. Свойства электромагнитных волн.

- ЭМ – волны могут распространяться в вакууме.
- ЭМ – волны – поперечные.
- ЭМ – волны подчиняются принципу суперпозиции.

Результирующее возмущение в какой-либо точке линейной среды при одновременном распространении в ней нескольких волн равно сумме возмущений, соответствующих каждой из этих волн порознь.

$c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость ЭМ-волн в вакууме.

$v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ - фазовая скорость монохроматической волны.

Групповая скорость:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \qquad (4.14)$$

4.4. Поток энергии и интенсивность электромагнитных волн. Вектор Пойнтинга.

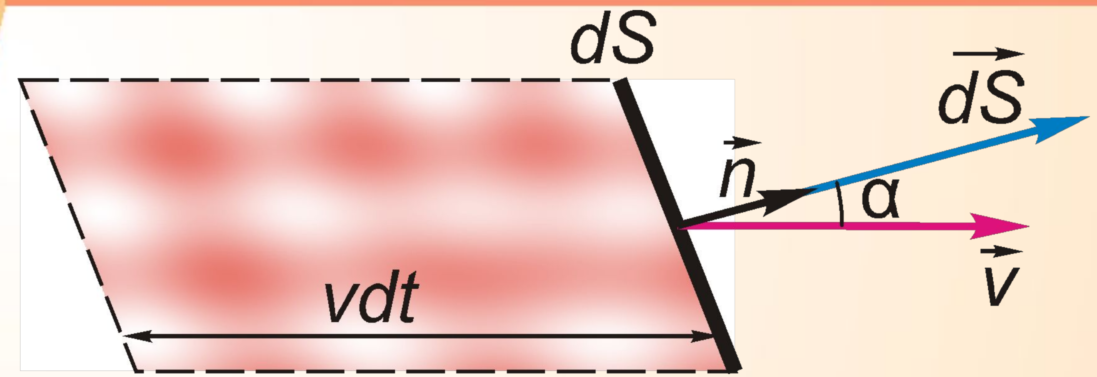
$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \qquad (4.15)$$

(4.13) $\quad \varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 = \mu\mu_0 H_m^2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2$

$$w_E = w_H \qquad \boxed{w = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} EH} \qquad (4.16)$$

- Энергия, переносимая волной, в единицу времени через некоторую площадку называется потоком энергии.

$$d\Phi_w = \frac{dW}{dt} \qquad (4.17)$$



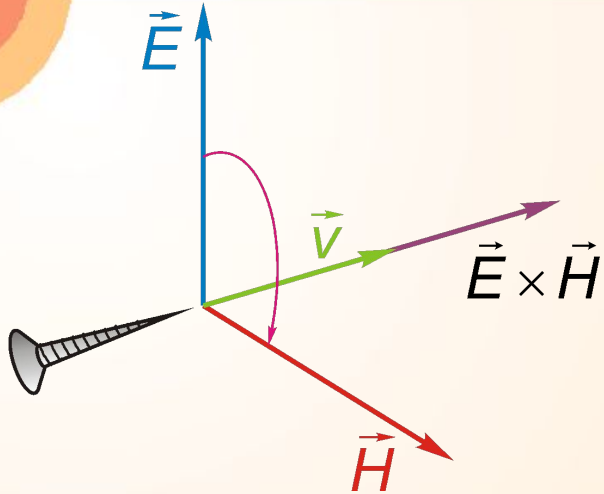
$$dW = w \cdot dS \cdot vdt \cdot \cos\alpha = w\left(\vec{v} \cdot d\vec{S}\right)dt \qquad (4.18)$$

$$d\Phi_w = w\left(\vec{v} \cdot d\vec{S}\right) = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \qquad (4.19)$$

Вектор Пойнтинга

(вектор плотности потока энергии): $\vec{\Pi} = w \cdot \vec{v}$ (4.20)

$$\Pi = w \cdot v = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} EH \cdot \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = E \cdot H \qquad (4.21)$$



$$\boxed{\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}} \qquad (4.22)$$

$$\Phi = \int_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \qquad (4.23)$$

- Скалярная величина I, равная модулю среднего по периоду значения вектора Пойнтинга, называется ***интенсивностью волны.***

$$I = \left| < \vec{\Pi} > \right| = \left| < \vec{E} \times \vec{H} > \right| \qquad (4.24)$$

<u>Единицы системы СИ:</u>
интенсивность – 1Вт/м^2

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_m^2 \qquad (4.25)$$

Задача 4.2

Плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме. Амплитуда напряженности электрического поля волны 50 мВ/м. Найти амплитуду напряженности магнитного поля и среднее за период колебаний значение плотности потока энергии.

<u>Дано:</u>

E_m = 50 мВ/м = $5\cdot 10^{-2}$ В/м

H_m - ? I - ?

$$\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 = \mu\mu_0 H_m^2$$

$$H_m = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_m =$$

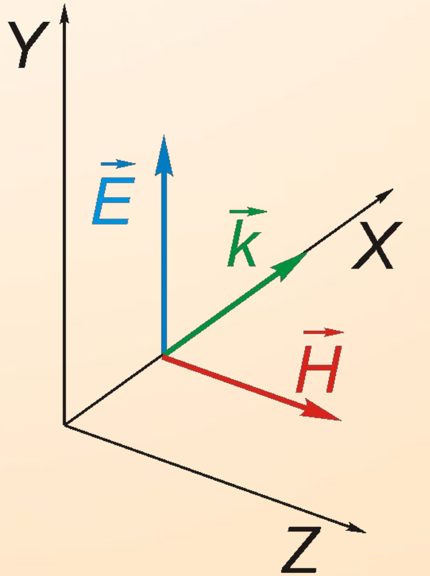
$$= \sqrt{\frac{1\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м}}{1\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{Гн/м}}}\cdot 5\cdot 10^{-2}\ \text{В/м} = \underline{1{,}33\cdot 10^{-4}\ \text{А/м}}$$

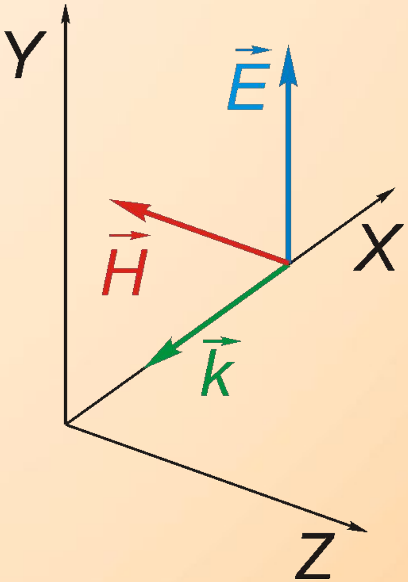
$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_m^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м}}{1\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{Гн/м}}}\cdot\left(5\cdot 10^{-2}\ \text{В/м}\right)^2 = 6{,}63\cdot 10^{-6}\ \text{Вт/м}^2$$

4.5. Стоячая электромагнитная волна.

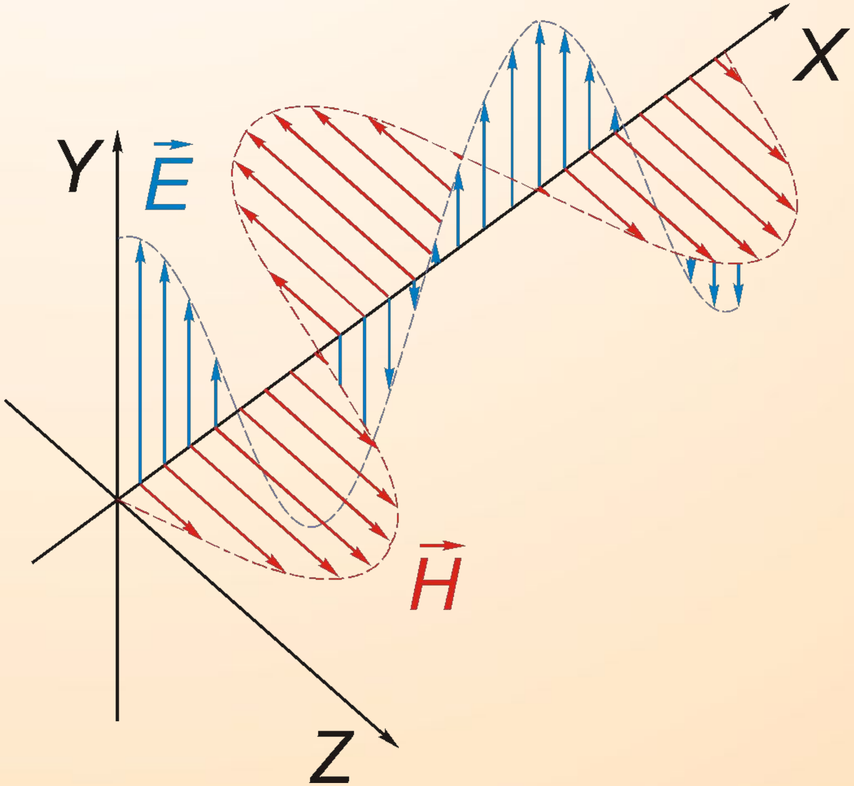
$$E_y = E_m\cos(\omega t - kx) \qquad H_z = H_m\cos(\omega t - kx)$$





$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx) \qquad H_z = H_m \cos(\omega t - kx)$$

$$E_y = E_m \cos(\omega t + kx) \qquad H_z = -H_m \cos(\omega t + kx)$$

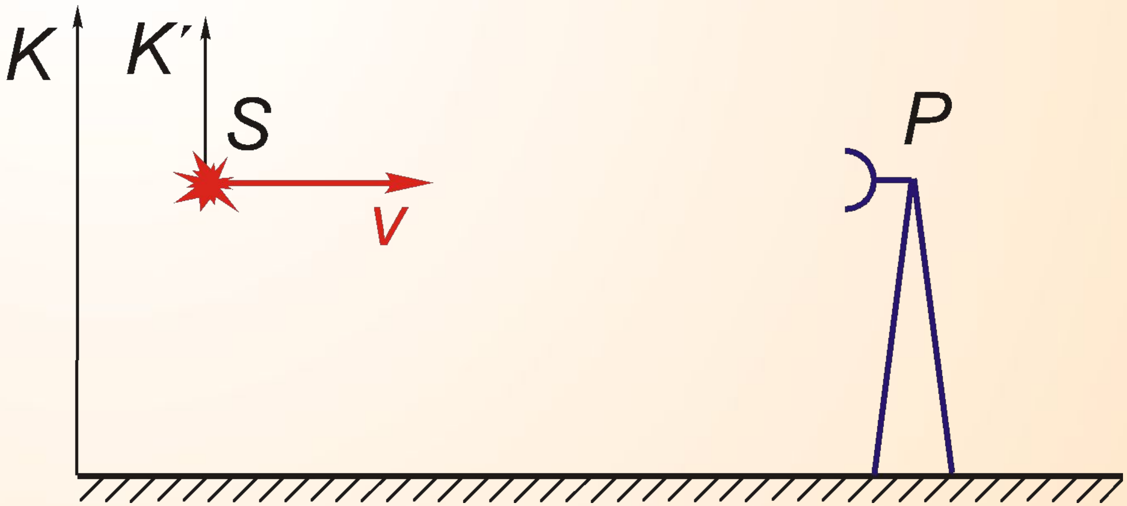


$$E_y = 2E_m \cos kx \cdot \cos \omega t$$

$$H_z = 2H_m \sin kx \cdot \sin \omega t$$

$$E_m \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_m \sqrt{\mu\mu_0}$$

4.6. Эффект Доплера для электромагнитных волн.



$$T_0 = 1/\nu_0$$

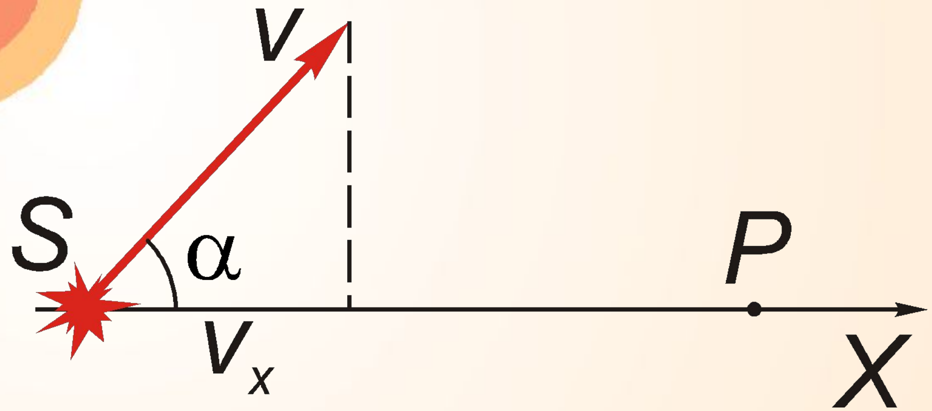
$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = v/c$$

$$\lambda = cT - vT = (c-v)\frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Продольный эффект Доплера

$$\boxed{\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-v/c}} \qquad (4.26)$$



$$v_x = v \cdot \cos\alpha$$

$$\boxed{\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - v_x/c}} \qquad (4.27)$$

$$t' = t - l/c \qquad \nu(t) \Leftrightarrow v_x(t')$$

Поперечный эффект Доплера: $\alpha = 90° \quad \Rightarrow \quad v_x = 0$

$$\boxed{\nu = \nu_0 \sqrt{1-\beta^2}} \qquad (4.28)$$

Нерелятивистский случай: $v \ll c \quad \Rightarrow \quad T = T_0$

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - v_x/c} \approx \underline{\nu_0 \left(1 + v_x/c\right)} \qquad (4.29)$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v_x}{c} \qquad (4.30)$$

- Источник приближается ($v_x > 0$) $\rightarrow \Delta\nu/\nu > 0$
- Источник удаляется ($v_x < 0$) $\rightarrow \Delta\nu/\nu < 0$
- Источник неподвижен ($v_x = 0$) $\rightarrow \Delta\nu/\nu = 0$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \qquad \Delta\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{c\Delta\lambda \cdot \lambda}{\lambda^2 \cdot c} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{v_x}{c} = -\frac{v}{c}\cos\alpha$$

Пример

При наблюдениях спектральной линии $\lambda = 0{,}51$ мкм в направлениях на противоположные края солнечного диска на его экваторе обнаружили различие в длинах волн на $\delta\lambda = 8{,}0$ пм. Найти период T вращения Солнца вокруг своей оси.

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = 2\frac{v}{c} = 2\frac{\omega R}{c} = \frac{2}{c}\cdot\frac{2\pi R}{T}$$

$$T = \frac{4\pi R\cdot\lambda}{c\cdot\delta\lambda} = \frac{4\pi\cdot 7\cdot 10^{8}\ \text{м}\cdot 0{,}51\cdot 10^{-6}\text{м}}{3\cdot 10^{8}\ \text{м/с}\cdot 8\cdot 10^{-12}\ \text{м}} \approx \underline{25\ \text{суток}}$$

Задача 4.3

С какой скоростью должен был бы двигаться автомобиль, чтобы красный цвет светофора (λ =0,70 мкм) воспринимался как зеленый (λ =0,55 мкм)?

Решение.

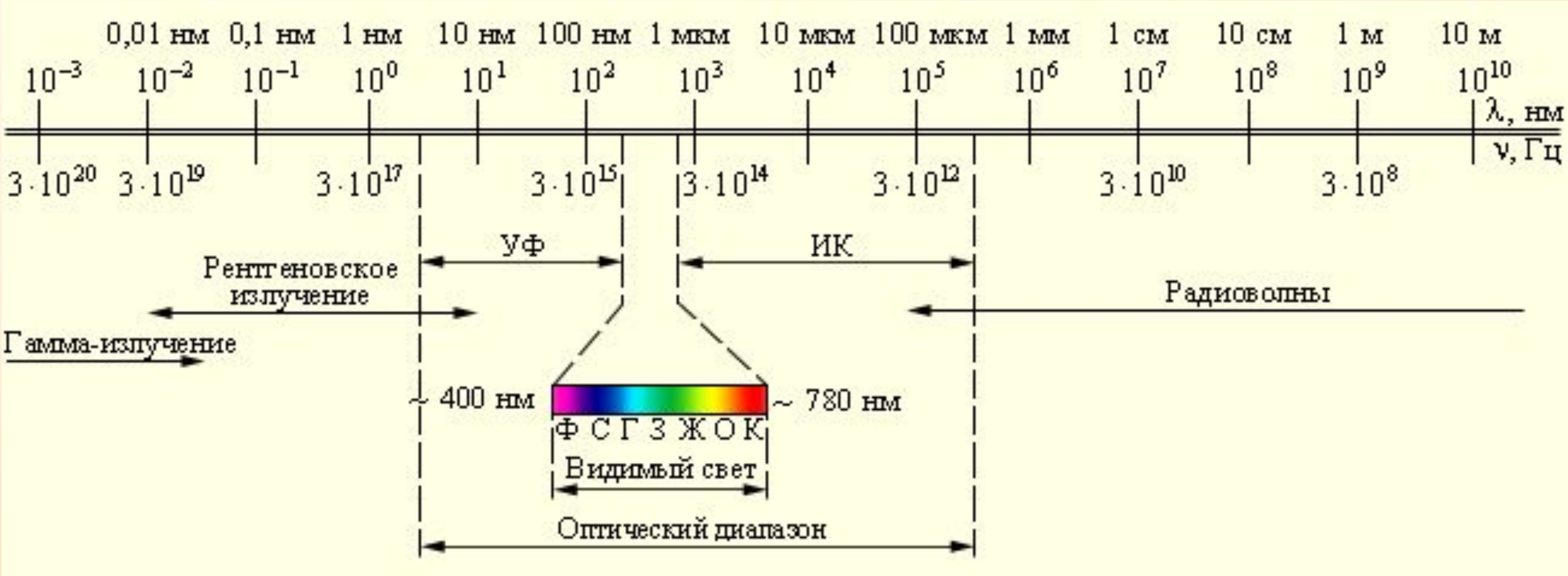
$$\nu = \nu_0\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$$

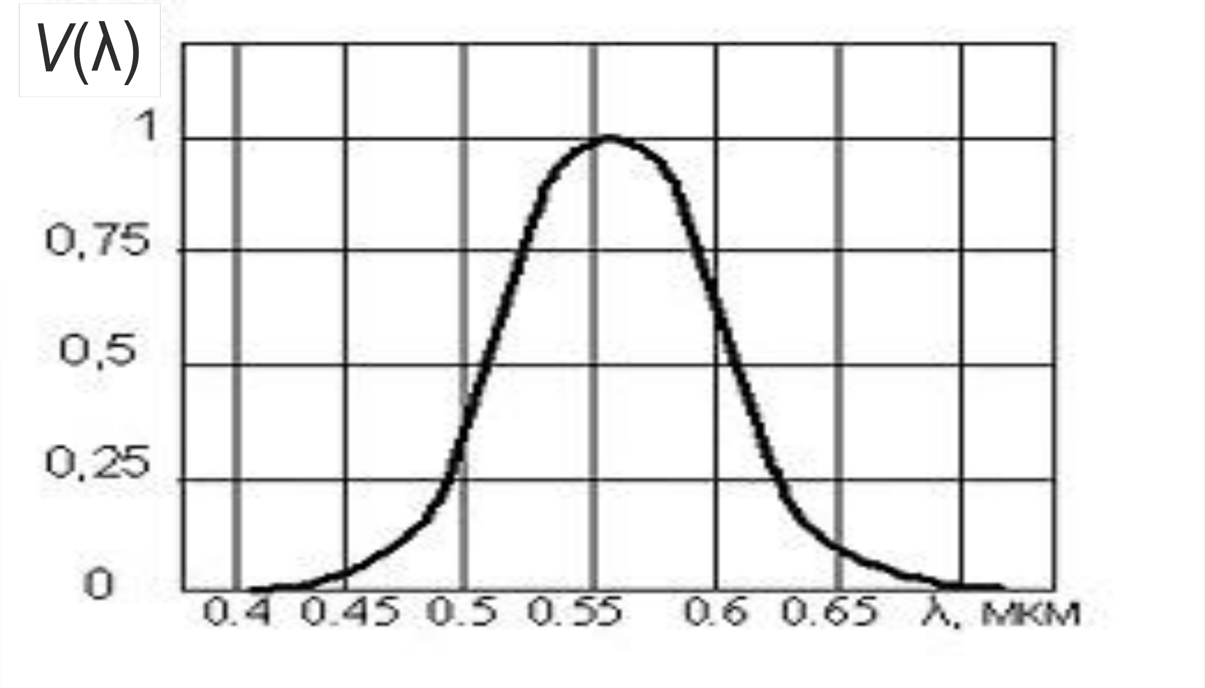
$$\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)} = (\nu/\nu_0)^2$$

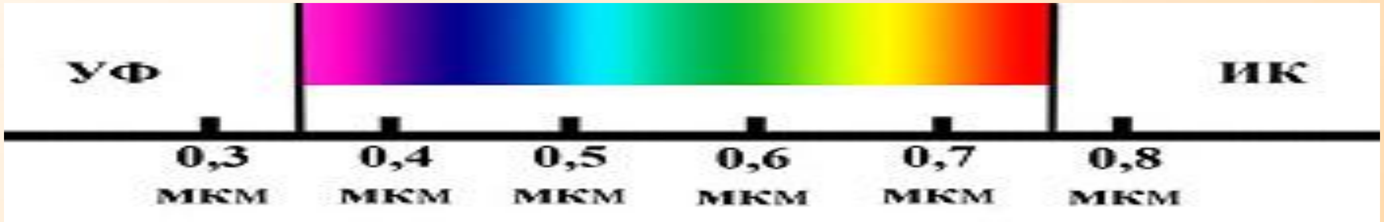
$$\beta = \frac{(\nu/\nu_0)^2 - 1}{(\nu/\nu_0)^2 + 1} = \frac{(\lambda_0/\lambda)^2 - 1}{(\lambda_0/\lambda)^2 + 1} = \frac{(0{,}70/0{,}55)^2 - 1}{(0{,}70/0{,}55)^2 + 1} = 0{,}24$$

$$v = \beta \cdot c = 0{,}24 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} = \underline{7{,}1 \cdot 10^7 \text{ м/с}}$$

4.7. Электромагнитная природа света. Шкала электромагнитных волн.







Световой поток (в люменах):

$$\Phi(\text{Лм}) = K_m \cdot V(\lambda) \cdot \Phi_э(\text{Вт}) \qquad (4.31)$$

$$K_m \approx 683\ \text{Лм}/\text{Вт}$$

- ***Силой света*** I называется поток излучения точечного источника на единицу телесного угла.

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$$

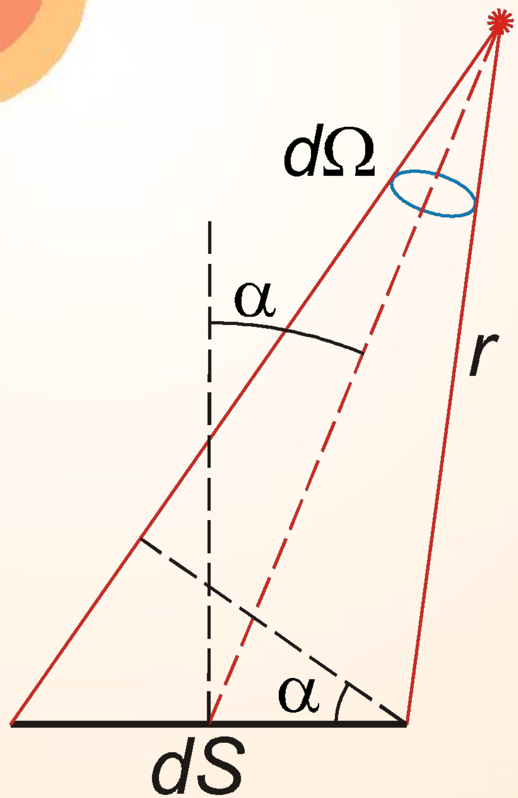
Изотропный источник $$I = \frac{\Phi}{4\pi}$$

Единицы системы СИ:
сила света – 1 кандела (кд) = 1лм/ср

- ***Освещенность E*** равна световому потоку, падающему на единицу площади.

Единицы системы СИ:
освещенность – 1 люкс (лк) = 1лм/м^2

$$E = \frac{d\Phi_{пад}}{dS} \qquad (4.32)$$



! Необходимая для нормального чтения освещенность – 50 лк.

$$d\Phi_{\text{пад}} = I d\Omega \qquad d\Omega = \frac{dS \cdot \cos\alpha}{r^2}$$

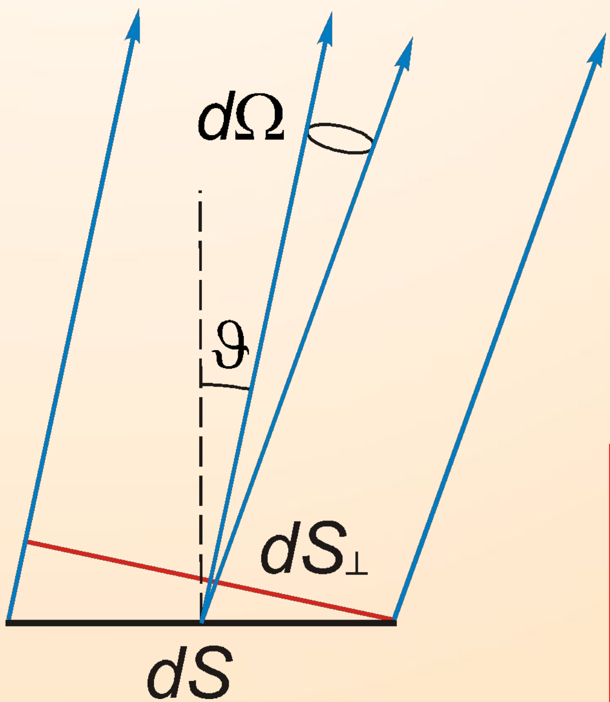
$$\boxed{E = I\frac{\cos\alpha}{r^2}} \qquad (4.33)$$

- ***Светимость M*** – это световой поток, испускаемый или отражаемый единицей площади тела по всем направлениям, т.е. в пределах телесного угла 2π стерадиан.

$$M = \frac{d\Phi_{\text{исп}}}{dS} \qquad (4.34)$$

- ***Яркостью L*** называется отношение силы света dI элемента поверхности dS в заданном направлении к проекции dS на плоскость, перпендикулярную этому направлению.

$$L = \frac{I(\vartheta,\varphi)}{dS_{\perp}} = \frac{d\Phi_{исп}/d\Omega}{dS\cdot\cos\vartheta} \qquad (4.35)$$



Ламбертовский источник (яркость не зависит от направления):

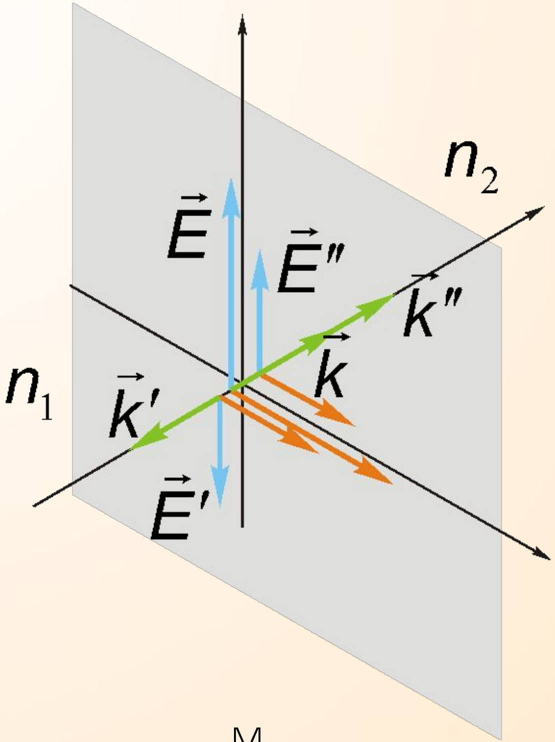
$$M = \pi L$$

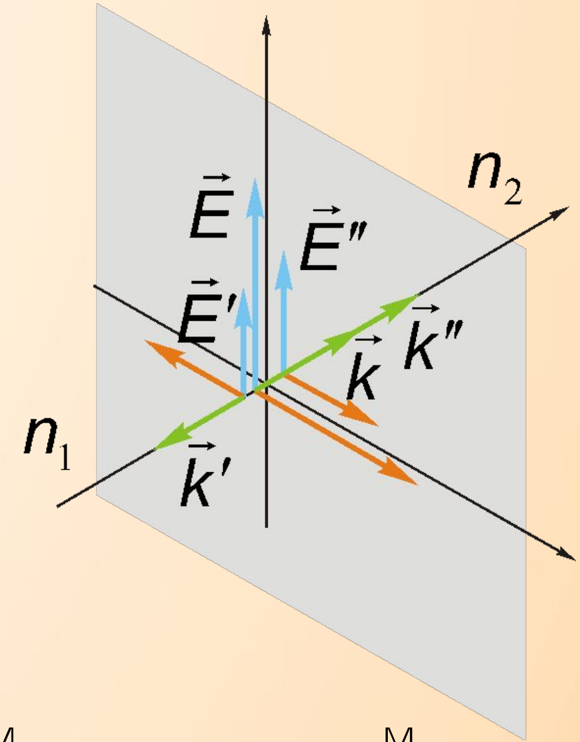
Единицы системы СИ:

светимость – $1 Лм/м^2$

яркость – $1 кд/м^2$

4.8. Электромагнитная волна на границе раздела.



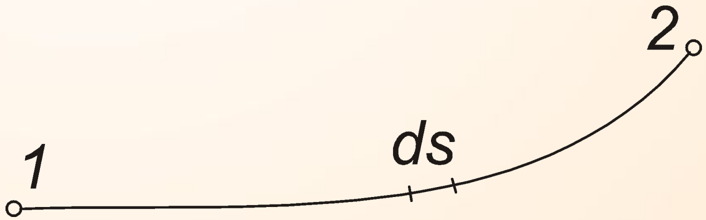


$$\vec{E}' = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\vec{E} \qquad \vec{E}'' = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}\vec{E} \tag{4.36}$$

Если $n_2 > n_1$, то в отраженной волне направление вектора ***E*** меняется на противоположное, т.е. его фаза меняется скачком на π.

$$\rho = \frac{I'}{I} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \qquad \tau = \frac{I''}{I} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

4.9. Геометрическая оптика.



$$dt = ds/v$$

$$v = c/n \qquad dt = nds/c$$

$$\tau = \frac{1}{c}\int_1^2 n \cdot ds = \frac{L}{c}$$

$L = \int n \cdot ds$ - ***оптическая длина пути.***

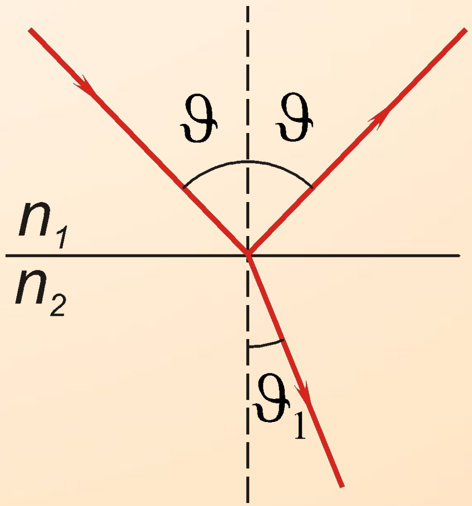
В однородной среде $L = n \cdot s$

Время распространения света на пути *s* со скоростью *v* такое же, как в вакууме со скоростью *c* на пути *L*.

Принцип Ферма:

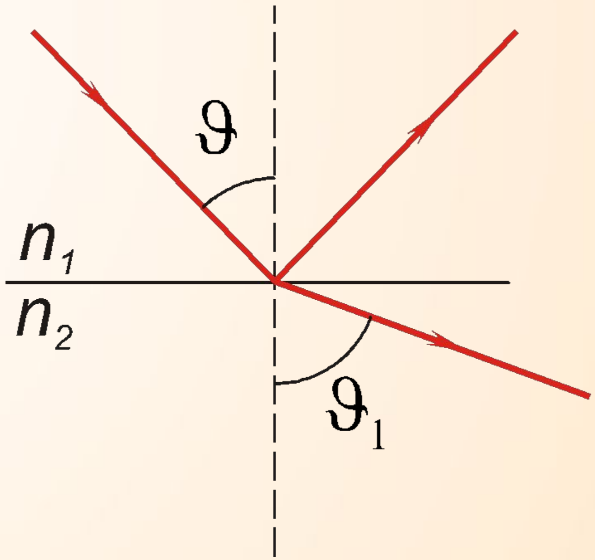
Свет распространяется по такому пути, оптическая длина которого минимальна.

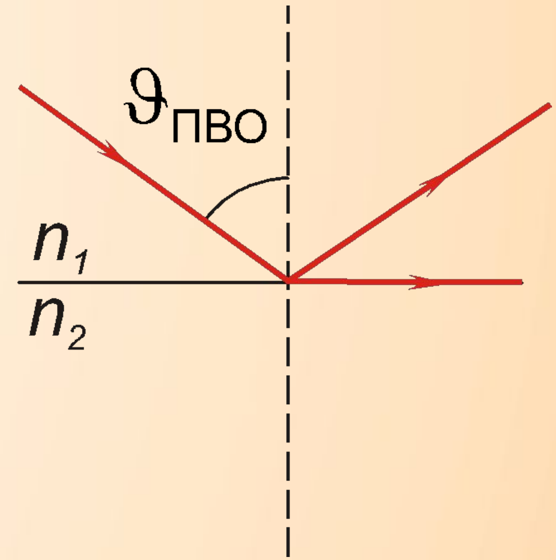
- Закон прямолинейного распространения света.
- Закон отражения.
- Закон преломления



$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_1} = \frac{n_2}{n_1} \qquad (4.37)$$

$n_2 < n_1$





$$\boxed{\sin \vartheta_{\text{ПВО}} = \frac{n_2}{n_1}} \qquad (4.38)$$