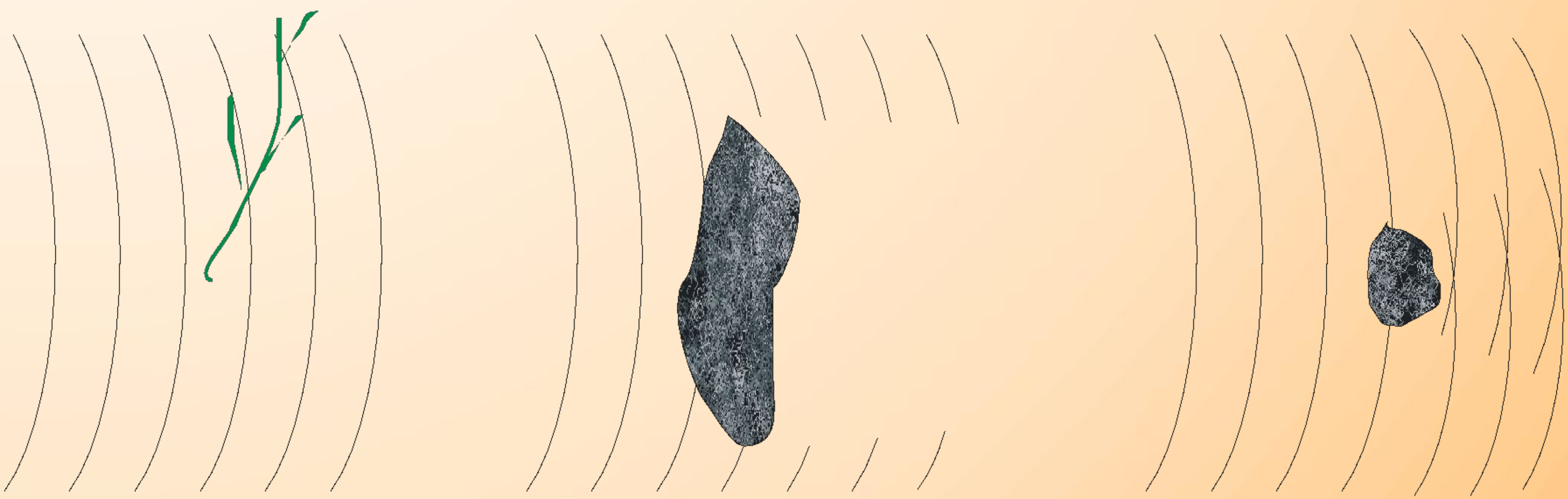
Лекция №6. Дифракция света

6.1. Определение дифракции. Принцип Гюйгенса - Френеля

- Дифракция – это огибание волнами препятствий.

Для наблюдения дифракции необходимо, чтобы размеры препятствий были сравнимы с длиной волны.



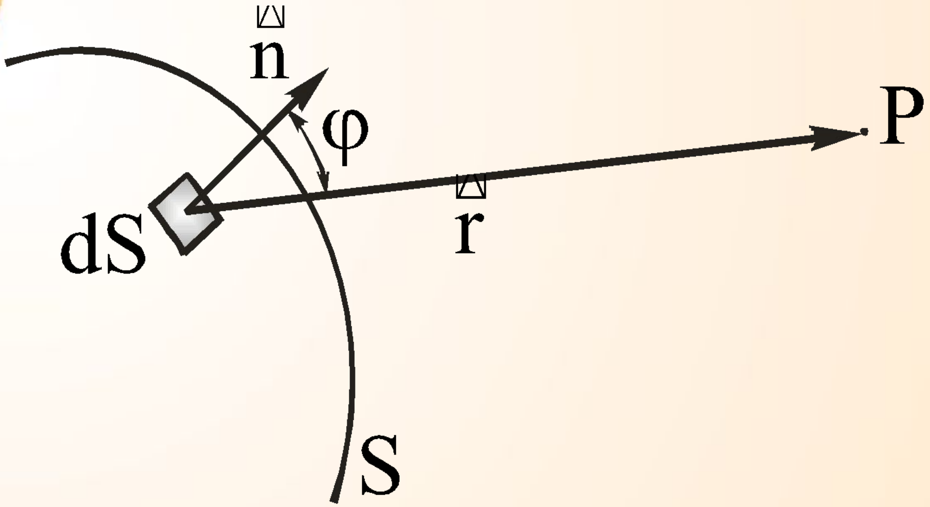
Принцип Гюйгенса - Френеля

Гюйгенс 1778г.

- Каждая точка среды, до которой дошел волновой фронт, сама становится источником вторичных полусферических волн, а их огибающая дает положение волнового фронта в последующий момент времени.

Дополнение Френеля 1815г.

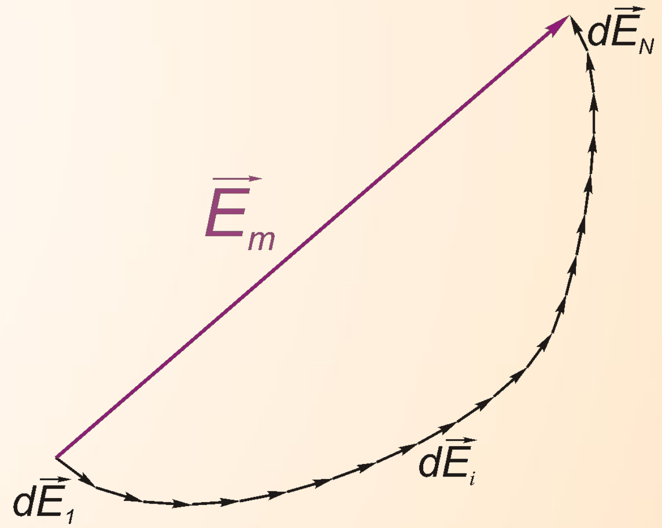
- Вторичные волны являются когерентными, а амплитуда и фаза волны в некоторой точке среды – это результат интерференции вторичных волн.



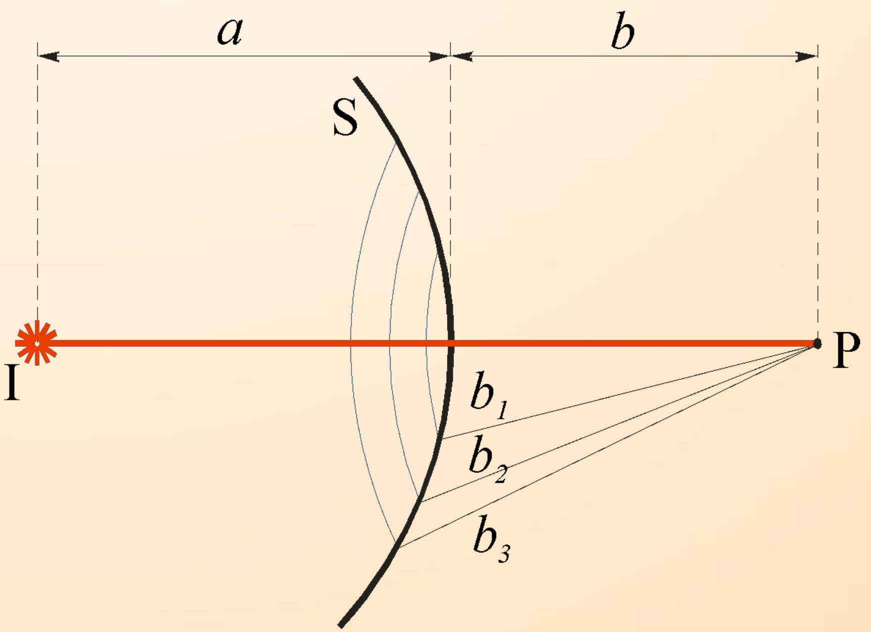
$$d\vec{E} = K(\varphi)\frac{\vec{a}_0 dS}{r}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha_0) \qquad (6.1)$$

$$\varphi \to \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad K(\varphi) \to 0$$

$$\boxed{\vec{E} = \int_S K(\varphi)\frac{\vec{a}_0}{r}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha_0)\,dS} \qquad (6.2)$$



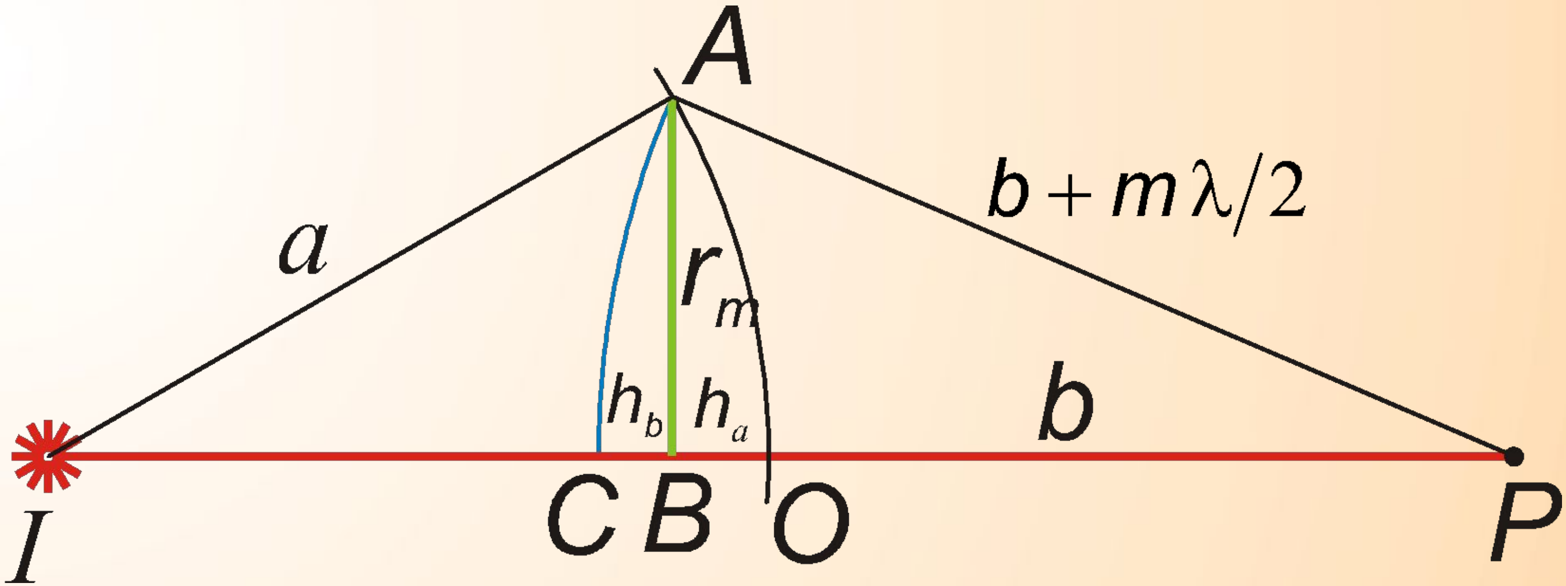
6.2. Зоны Френеля. Прямолинейное распространение света.



$$b_1 = b + \frac{\lambda}{2}$$

$$b_2 = b_1 + \frac{\lambda}{2} = b + 2\frac{\lambda}{2}$$

$$b_m = b + m \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad (6.3)$$



$$h_a + h_b = m\frac{\lambda}{2} \qquad (6.4)$$

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_a)^2 = (2a - h_a)h_a$$

$$h_a \ll 2a \qquad\qquad h_a = \frac{r_m^2}{2a} \qquad (6.5)$$

$$r_m^2 = (b + m\lambda/2)^2 - (b + m\lambda/2 - h_b)^2$$

$$r_m^2 = (b + m\lambda/2 - h_b)h_b$$

$m\lambda, h_b << 2b$ $\qquad$ $h_b = \dfrac{r_m^2}{2b}$ $\qquad$ (6.6)

(6.5), (6,6) $\rightarrow$ (6.4)

$$\frac{r_m^2}{2a} + \frac{r_m^2}{2b} = \frac{r_m^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{m\lambda}{2}$$

$$r_m^2 \frac{a+b}{ab} = m\lambda$$

$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}$$

$$\Delta S = \pi r_m^2 - \pi r_{m-1}^2$$

$$\boxed{\Delta S = \pi \frac{ab}{a+b} \lambda} \qquad (6.7)$$

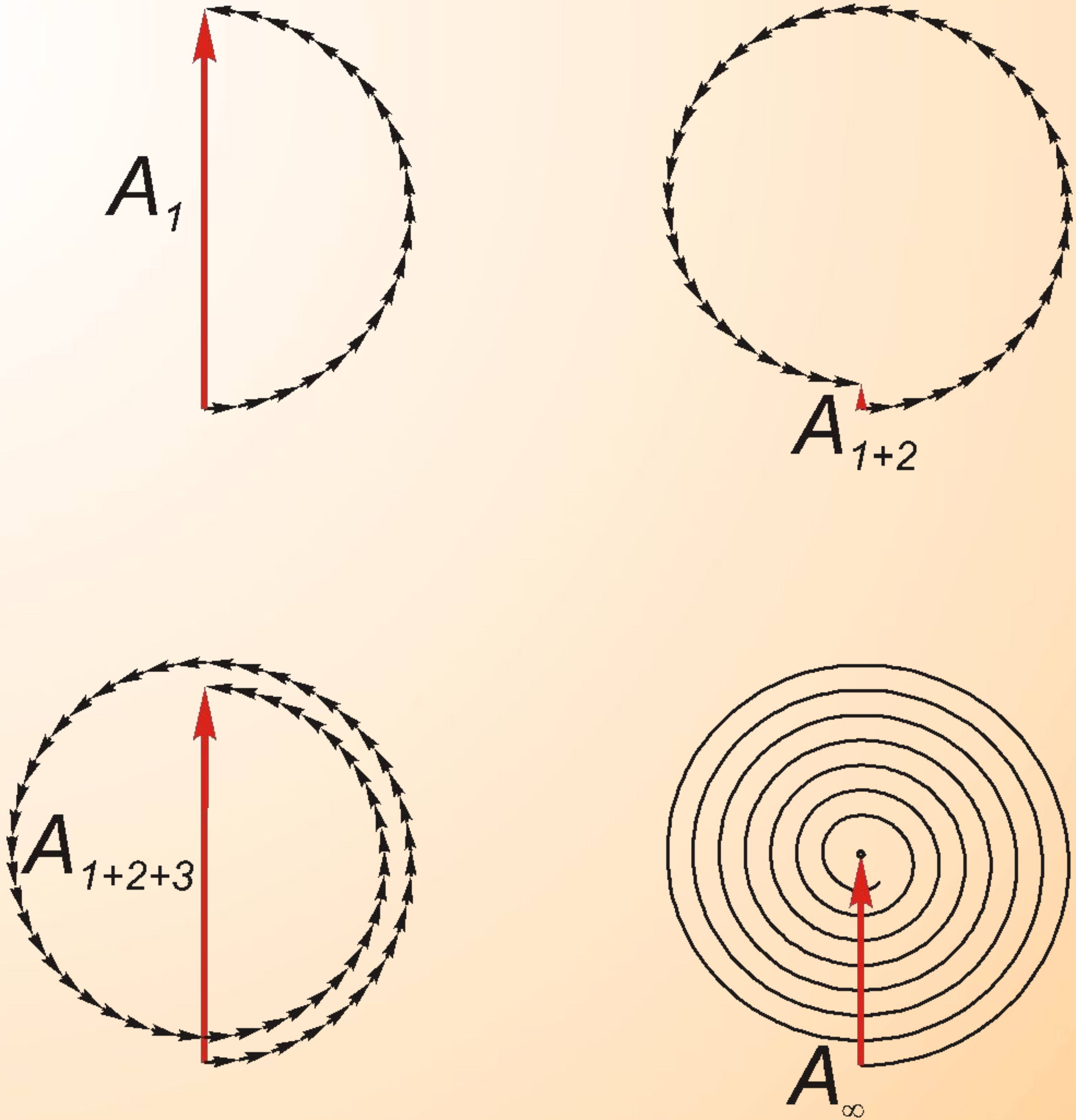
$$\mathrm{A}_1 > \mathrm{A}_2 > \mathrm{A}_3 > \ldots > \mathrm{A}_\mathrm{m} > \mathrm{A}_{\mathrm{m+1}} > \ldots$$

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \quad (6.8)$$

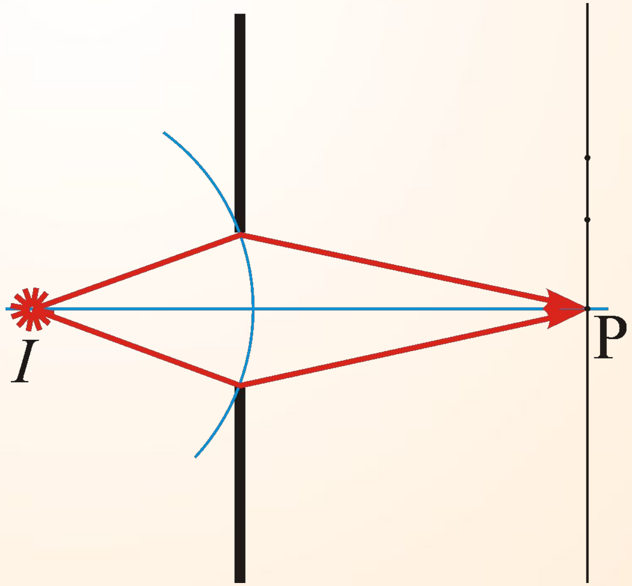
$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) + \dots \quad (6.9)$$

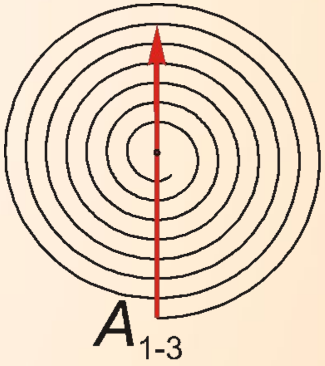
$$\boxed{A = \frac{A_1}{2}} \quad (6.10)$$

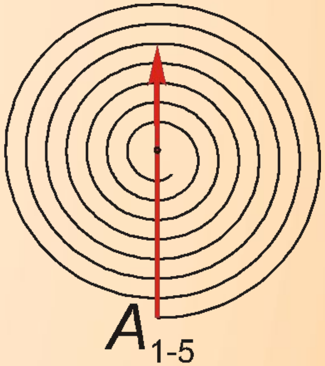
Для $a = b = 1м$ и $\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$м $\Rightarrow r_1 = 0.5 \cdot 10^{-3}$ м

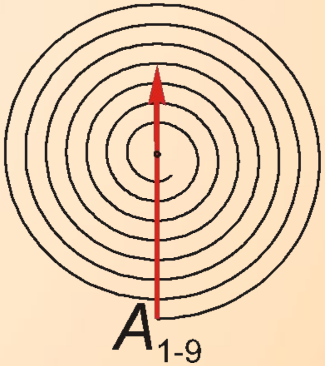

A_1
A_{1+2}
A_{1+2+3}
A_∞

6.3. Дифракция на круглых отверстии и диске.





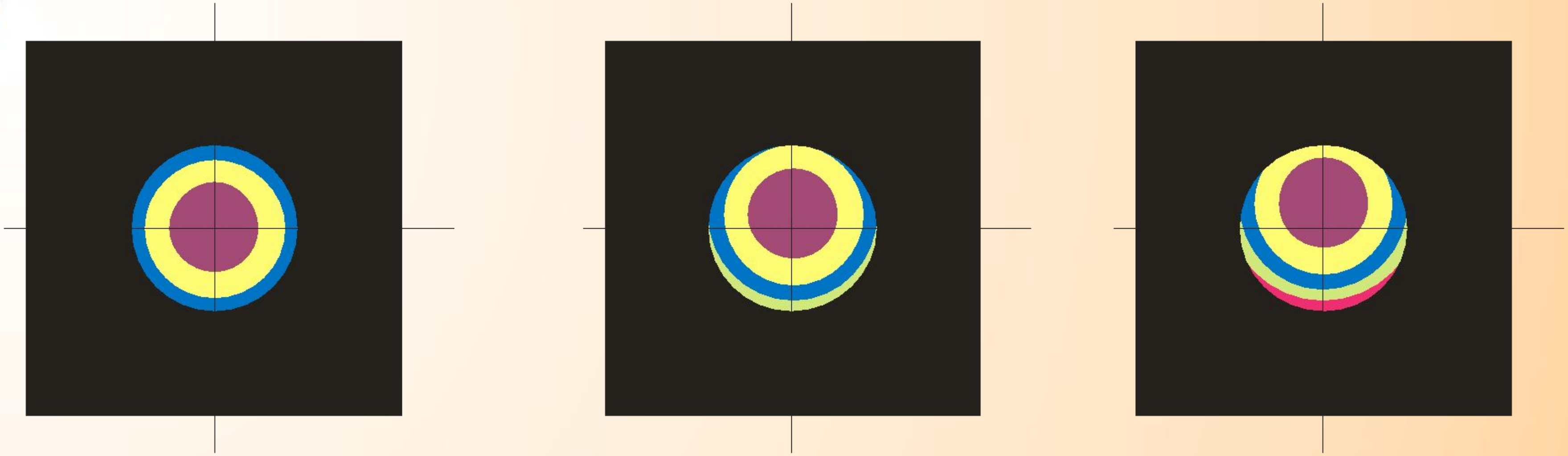


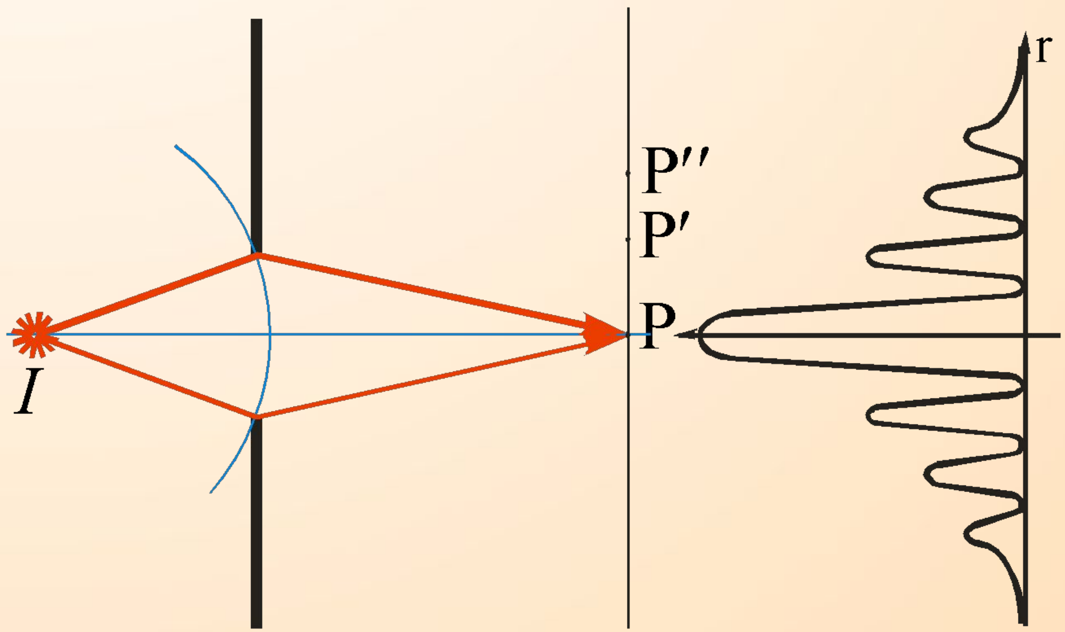


$$A = (A_1 - A_2) + (A_3 - A_4) + \ldots \pm A_m$$

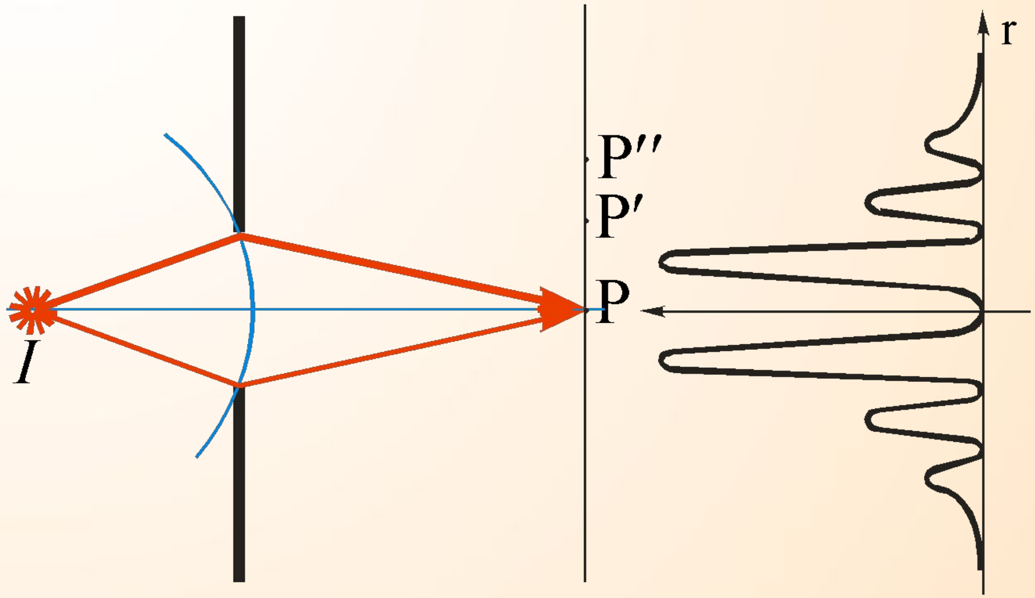
Если $m = 2k + 1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots) \quad \Rightarrow A \approx A_m$

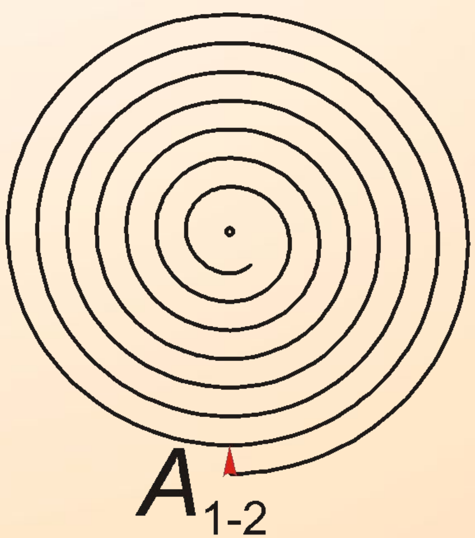
При малых m $\quad A_m \approx A_1 \Rightarrow A \approx A_1$

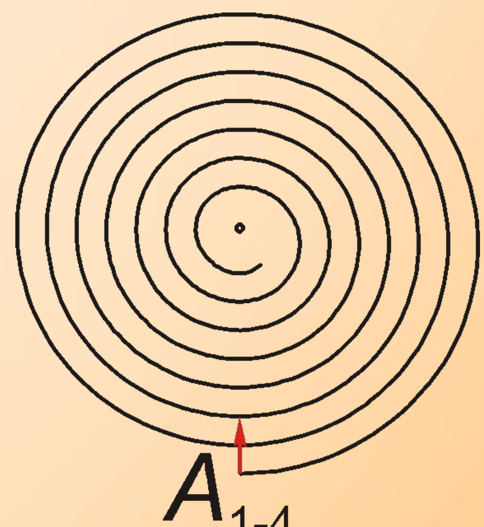


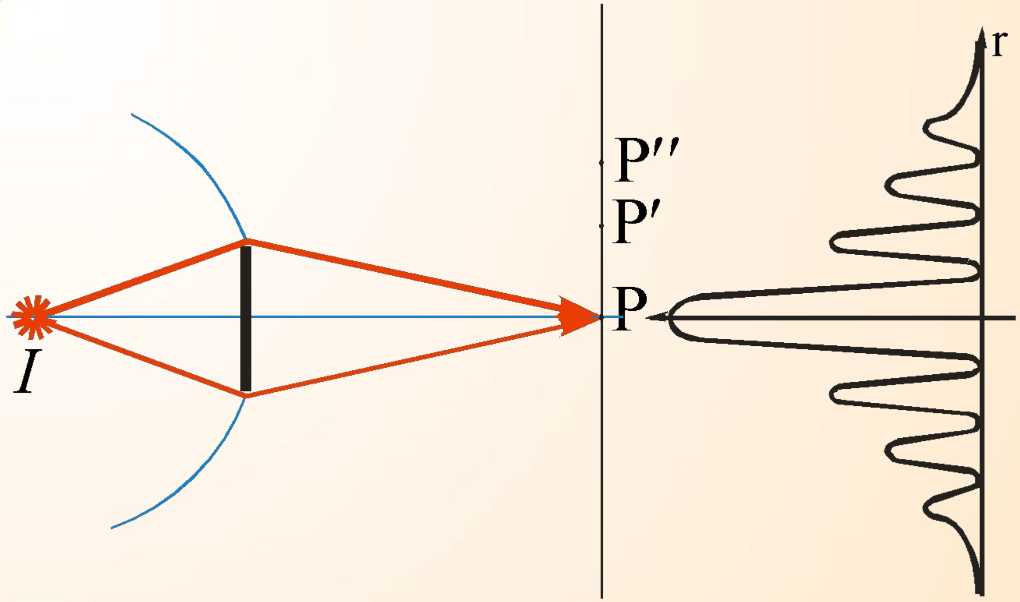

r
P″
P′
P
I

$$\text{Если } m = 2k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots) \quad \Rightarrow A \approx 0$$

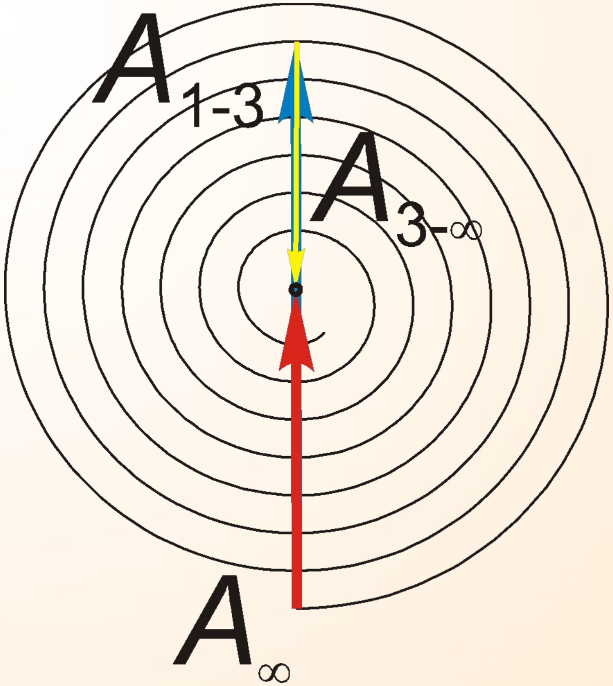




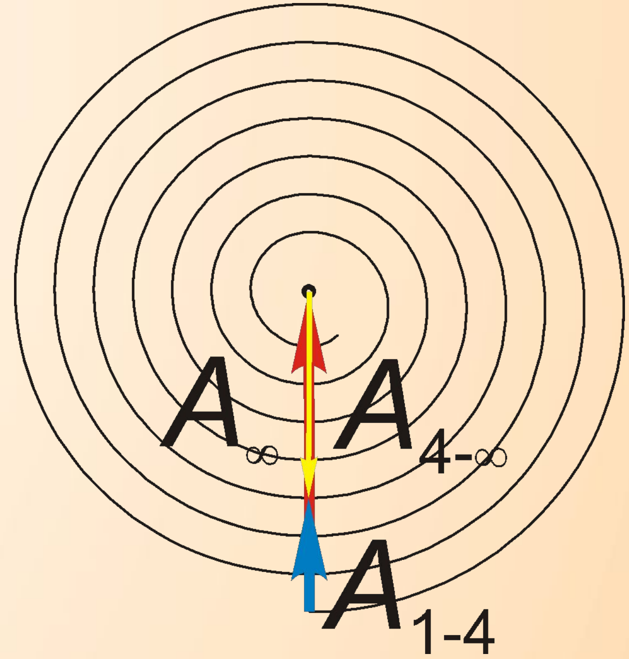




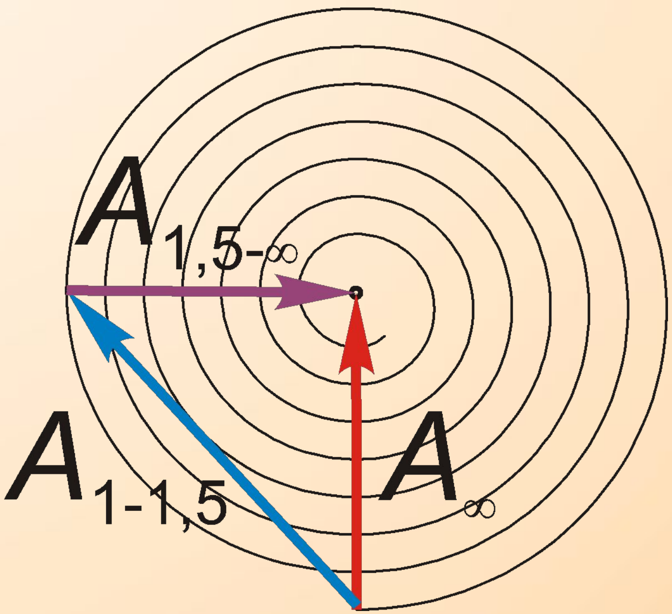
$$A = \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \ldots \approx \frac{A_{m+1}}{2}$$



A_{1-3}
$A_{3-\infty}$
A_{∞}



A_{∞}
$A_{4-\infty}$
A_{1-4}



$A_{1,5-\infty}$
$A_{1-1,5}$
A_{∞}

Задача 6.1

Точечный источник света с длиной волны 0,5 мкм расположен на расстоянии 1 м перед диафрагмой с круглым отверстием радиусом 1 мм. Найти расстояние от диафрагмы до точки наблюдения, находящейся на оси отверстия, для которой число зон Френеля в отверстии равно 3. Темное или светлое пятно получится в центре дифракционной картины?

Дано:

$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м

$a = 1$ м

$d = 1$ мм $= 10^{-3}$ м

m = 3

b - ?

Так как m – нечетное, в центре дифракционной картины будет светлое пятно.

$$S_{\text{отв}} = \frac{\pi d^2}{4} = m \cdot \Delta S$$

$$\frac{\pi d^2}{4} = m\pi \frac{ab}{a+b}\lambda$$

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{d^2}{4m\lambda} = q = \frac{10^{-6}\ \text{м}^2}{4 \cdot 3 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{м}} = 1/6\ \text{м}$$

$$ab = (a+b)q$$

$$b(a-q) = aq$$

$$b = \frac{aq}{a-q} = \frac{1\text{м} \cdot 1/6\,\text{м}}{1\text{м} - 1/6\,\text{м}} = \underline{0{,}2\,\text{м}}$$

6.4. Дифракция Фраунгофера.

Дифракция Фраунгофера – дифракция в параллельных пучках.

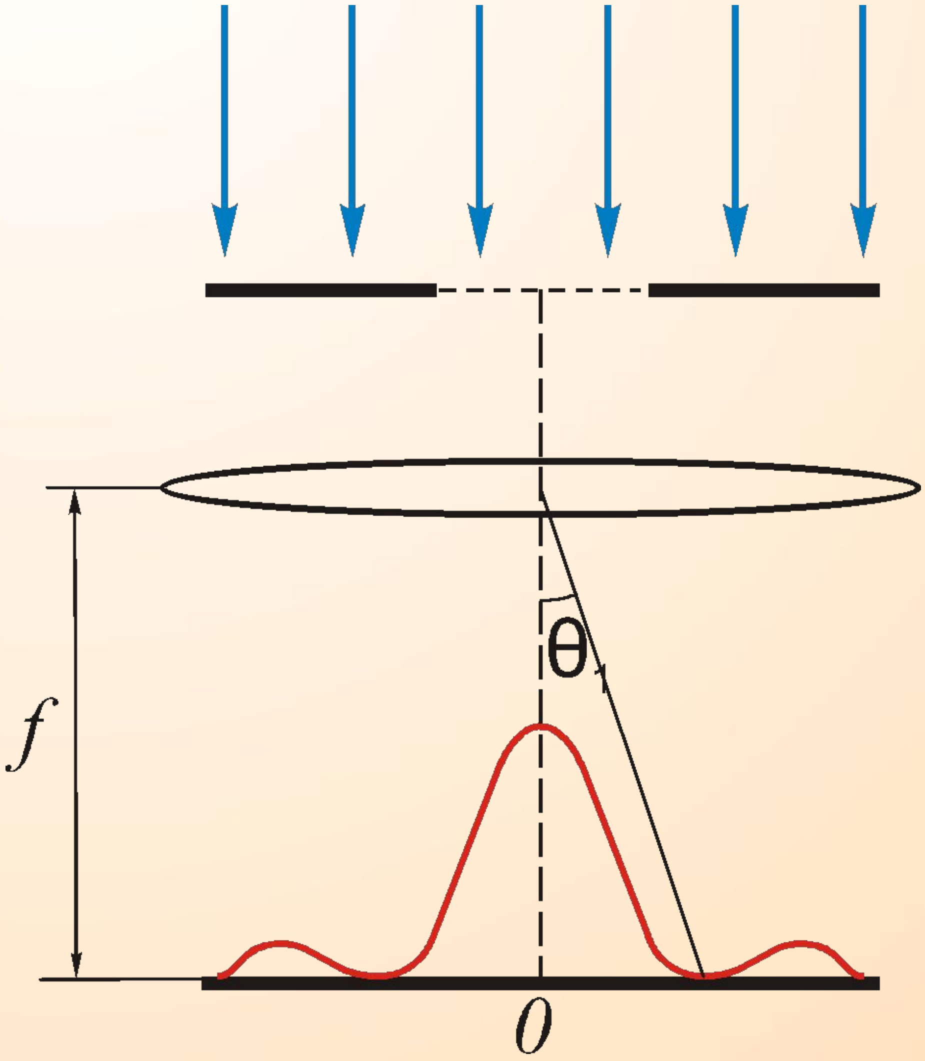
$$\boxed{p = \frac{h^2}{l\lambda}} \qquad (6.11)$$

где h – некоторый характерный размер (диаметр круглого отверстия, ширина щели и т.п.), а l – расстояние от преграды до экрана.

Критерий типа дифракции:

- $p \ll 1$ – дифракция Фраунгофера;
- $p \sim 1$ – дифракция Френеля;
- $p \gg 1$ – приближение геометрической оптики.

6.5. Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии. Разрешающая способность объектива.



$$\theta_1 = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}$$

Пример

Найти диаметр d центрального светлого пятна на экране, если диаметр отверстия D = 1 мм, фокусное расстояние f = 50 см и длина волны света λ = 0,5 мкм.

$$d \approx f \cdot \theta_1 = 1{,}22\frac{\lambda f}{D} = \frac{1{,}22 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{м} \cdot 0{,}5\ \text{м}}{10^{-3}\ \text{м}} \approx 0{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{м} = 0{,}3\ \text{мм}$$

Дифракционная расходимость пучка.

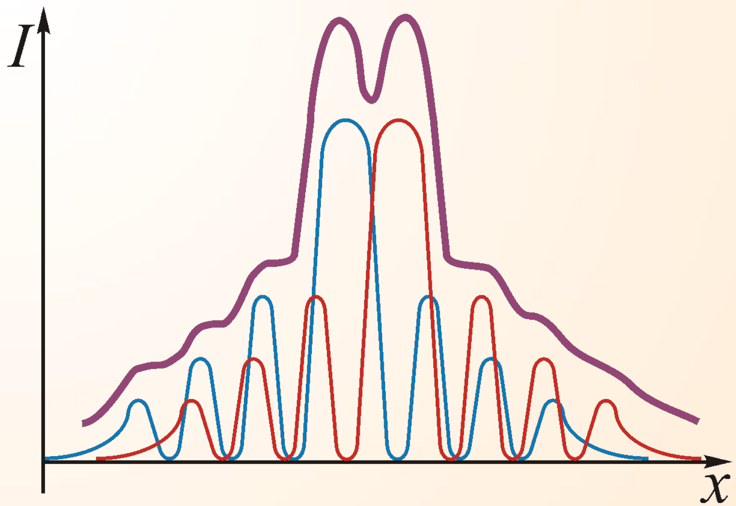
$$\delta\theta \sim \lambda/D$$

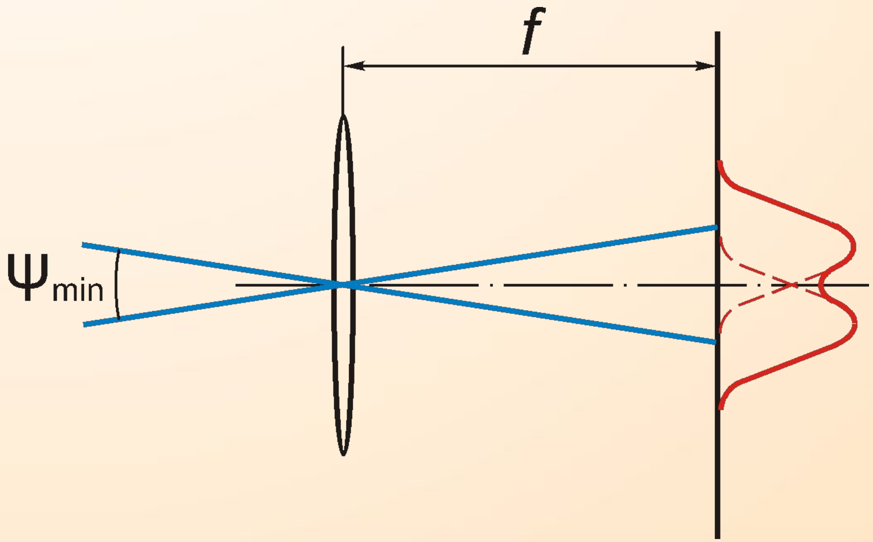
Пример

Оценить дифракционное уширение «параллельного» лазерного пучка с исходным диаметром D_0 = 2 мм на расстоянии l = 100 м от лазера, если длина волны света λ = 0,60 мкм.

$$D \approx l\delta\theta \approx \frac{l\lambda}{D_0} = \frac{100 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}} = 30 \cdot 10^{-3}\ \text{м} = 30\ \text{мм}$$

Разрешающая способность объектива.





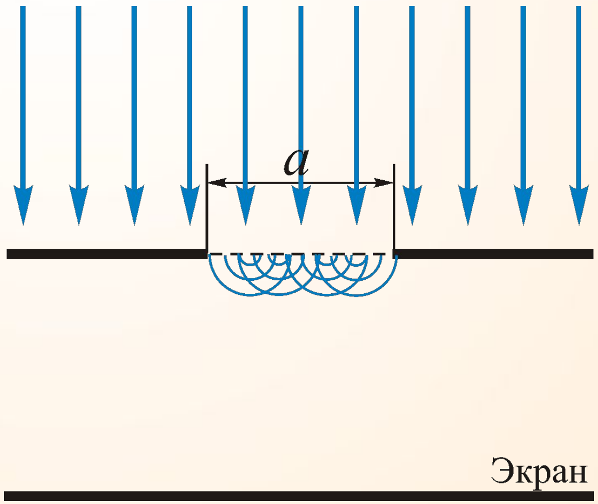
$$\boxed{\psi_{min} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}} \qquad (6.12)$$

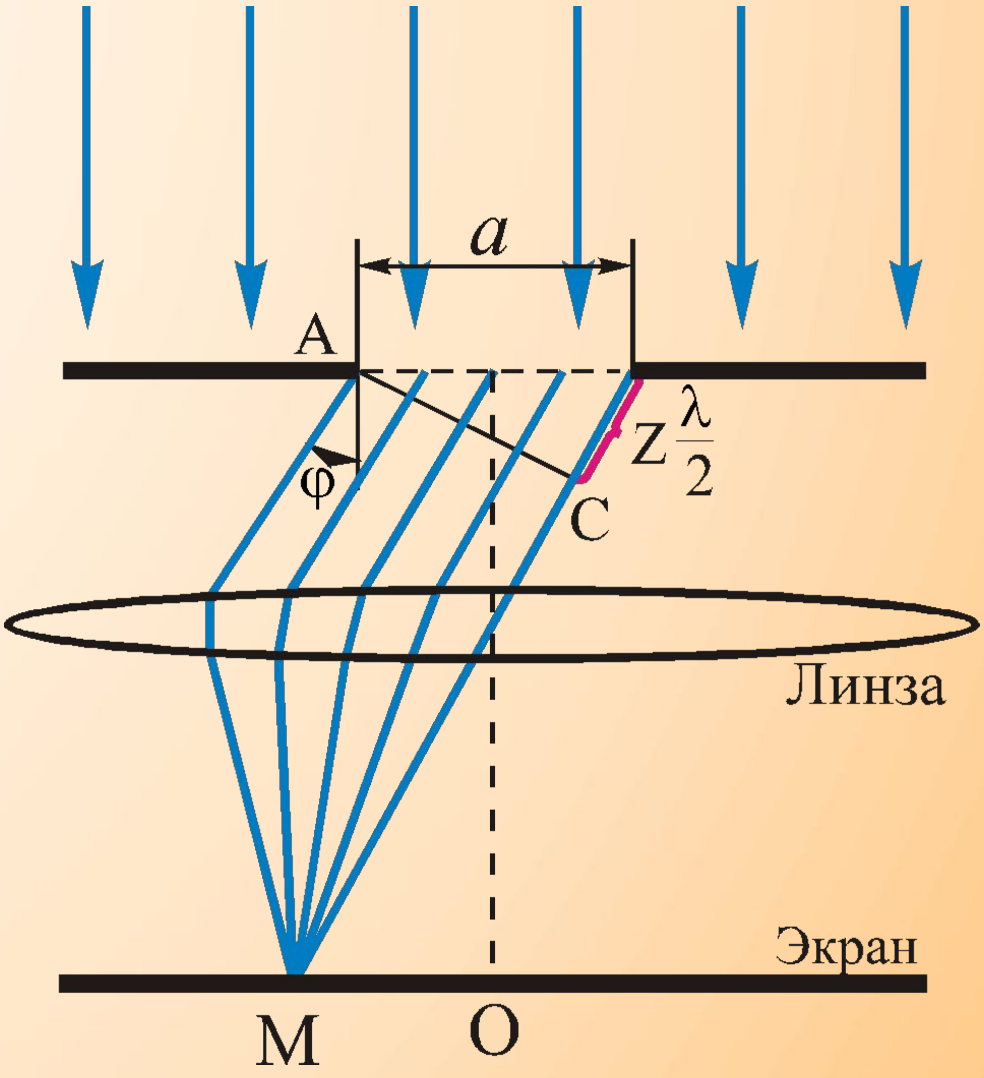
$$\boxed{R = 1/\psi_{min}} \qquad (6.13)$$

$D = 2\cdot 10^{-3}$ м $\quad \lambda = 0.55$ мкм $\quad \Rightarrow \quad \psi = 1'$

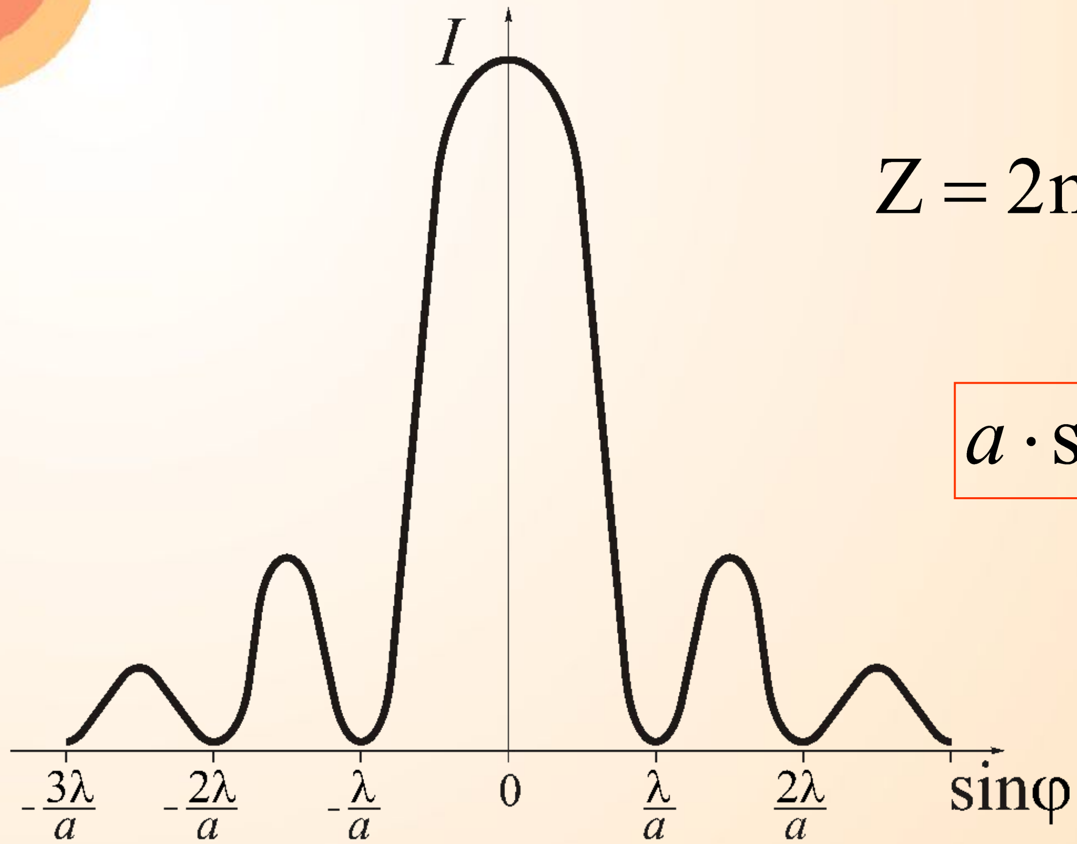
$D = 5$ м $\quad \lambda = 0.55$ мкм $\quad \Rightarrow \quad \psi = 0{,}03$ угл.сек.

6.6. Дифракция на одной щели





$$Z = \frac{a \cdot \sin\varphi}{\lambda/2} \qquad (6.14)$$



$$Z = 2m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2...$$

$$\boxed{a \cdot \sin\varphi_{min} = \pm m\lambda} \quad (6.15)$$

$$\boxed{a \cdot \sin\varphi_{max} = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}} \quad (6.16)$$

$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\varphi\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\varphi\right)^2} \qquad (6.17)$$

Задача 6.2

Определить какую долю от интенсивности центрального максимума составляет интенсивность первого максимума при дифракции Фраунгофера на одной щели. Какова будет угловая ширина спектра в первом максимуме, если щель освещается белым светом, а ширина щели равна 5 мкм.

Решение.

$$a \cdot \sin\varphi = (2m+1)\frac{\lambda}{2} = \frac{3}{2}\lambda \qquad \sin\varphi = \frac{3\lambda}{2a}$$

$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\varphi\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\varphi\right)^2} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\cdot\frac{3\lambda}{2a}\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\cdot\frac{3\lambda}{2a}\right)^2} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} =$$

$$= I_0 \frac{1}{\frac{9\pi^2}{4}} = \frac{4I_0}{9\pi^2} = \underline{0{,}045 I_0}$$

$$\lambda_{кр} = 0{,}78\ мкм \qquad \sin\varphi_{кр} = \frac{3\cdot 0{,}78\ мкм}{2\cdot 5\ мкм} = 0{,}234 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{кр} = 13{,}53^\circ$$

$$\lambda_{фл} = 0{,}38\ мкм \qquad \sin\varphi_{фл} = \frac{3\cdot 0{,}38\ мкм}{2\cdot 5\ мкм} = 0{,}114 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{фл} = 6{,}55^\circ$$

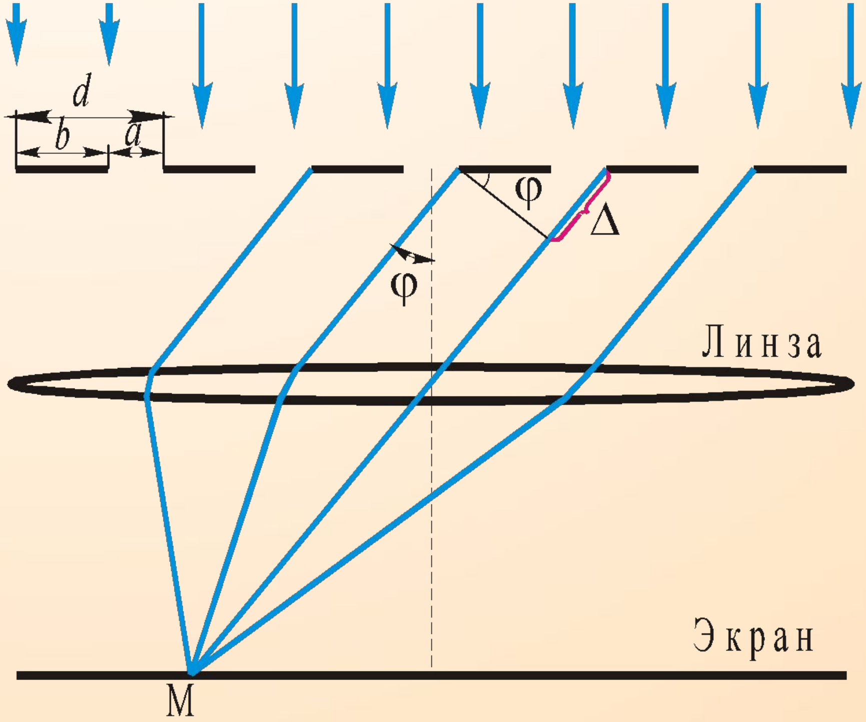
$$\Delta\varphi = 13{,}53^\circ - 6{,}55^\circ \approx \underline{7^\circ}$$

6.7. Дифракционная решетка

$a + b = d$

$$\Delta = \mathrm{d} \cdot \sin\varphi = (a + b)\sin\varphi \qquad (6.18)$$

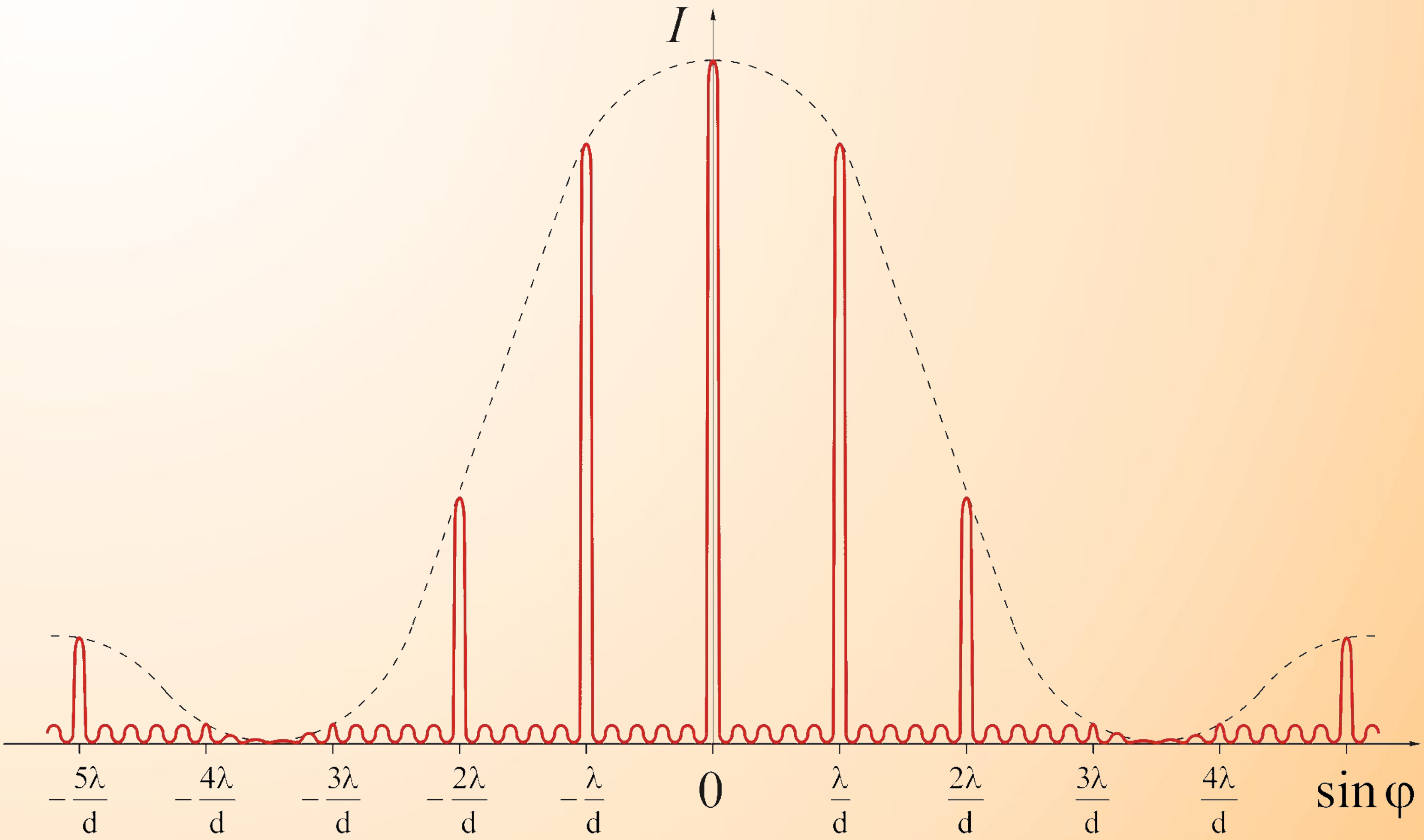
$$\Delta = m\lambda, \text{ где } m = 0, \pm 1, \pm 2... \qquad (6.19)$$



$$\boxed{d \cdot \sin\varphi = \pm m\lambda,} \qquad (6.20)$$

$$m = 0, 1, 2, ...$$

$$I_{max} = N^2 I_\varphi \qquad (6.21)$$


I
$-\frac{5\lambda}{d}$
$-\frac{4\lambda}{d}$
$-\frac{3\lambda}{d}$
$-\frac{2\lambda}{d}$
$-\frac{\lambda}{d}$
0
$\frac{\lambda}{d}$
$\frac{2\lambda}{d}$
$\frac{3\lambda}{d}$
$\frac{4\lambda}{d}$
sin φ

Условия интерференционных минимумов

$$d \cdot \sin\varphi = \pm \frac{m'}{N}\lambda \qquad m' \neq 0, N, 2N,... \tag{6.22}$$

Угловая ширина главных максимумов

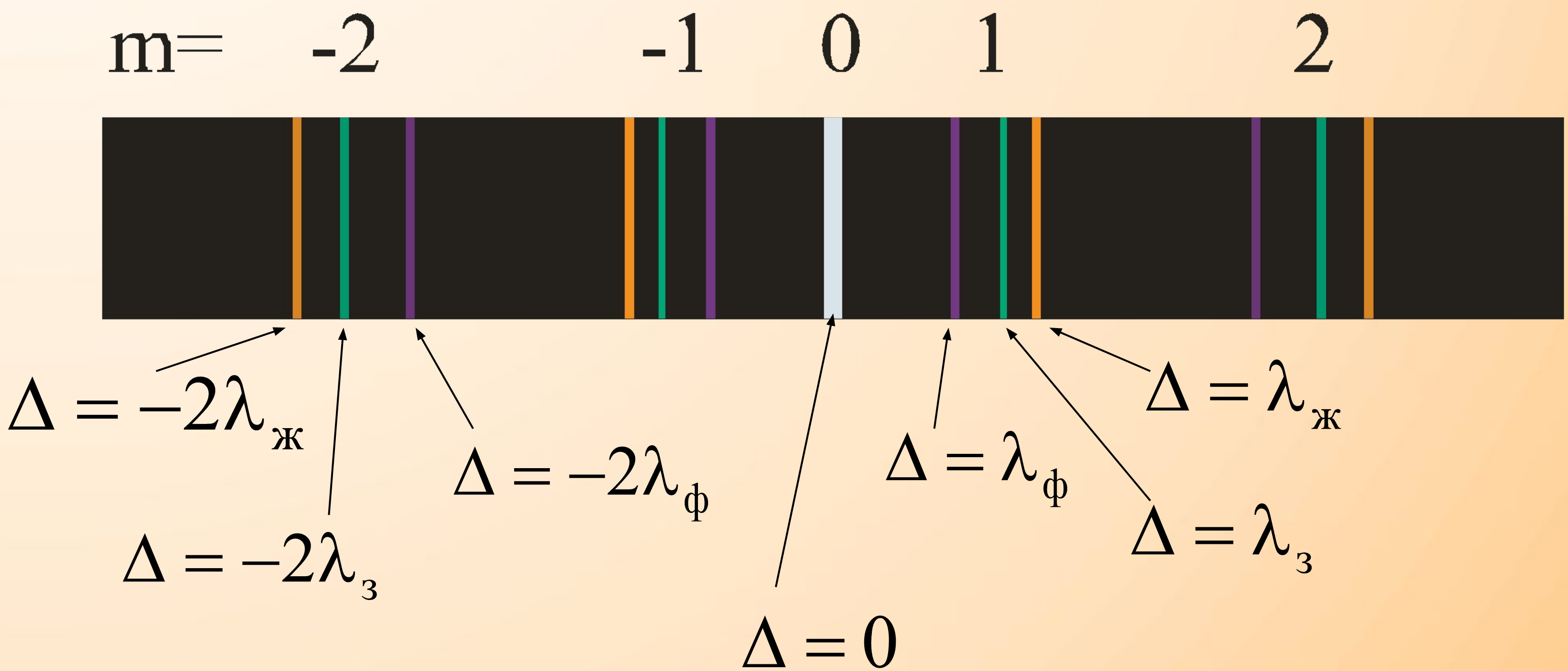
$$\delta\varphi = \frac{\lambda}{Nd \cdot \cos\varphi} \tag{6.23}$$

Интенсивность.

$$I = I_0 \frac{\sin^2(\delta/2)}{(\delta/2)^2} \cdot \frac{\sin^2(N\gamma/2)}{\sin^2(\gamma/2)} \tag{6.24}$$

$$\delta = 2\pi a \sin\varphi/\lambda \qquad\qquad \gamma = 2\pi d \sin\varphi/\lambda$$


m = -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4


m= -2 -1 0 1 2
$\Delta = -2\lambda_ж$
$\Delta = -2\lambda_з$
$\Delta = -2\lambda_ф$
$\Delta = 0$
$\Delta = \lambda_ф$
$\Delta = \lambda_з$
$\Delta = \lambda_ж$

Дифракционная решетка – спектральный прибор.

❖ ***Угловая дисперсия D*** – степень углового разделения волн с различными длинами λ.

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d \cdot \cos\varphi_m} \qquad (6.25)$$

❖ ***Разрешающая способность R***

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \qquad (6.26)$$

$$m\left(m' = mN\right) \ \lambda + \delta\lambda \quad \Leftrightarrow \quad m' = mN + 1 \ \ \lambda$$

δλ – наименьшая разность длин волн спектральных линий, при которой эти линии видны еще отдельно т.е. (***разрешаются***)

$$d \cdot \sin \varphi_m = m \cdot (\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N} \right) \cdot \lambda$$

$$\boxed{\frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN} \qquad (6.27)$$

- ***Область дисперсии*** $\Delta\lambda$ – это ширина спектрального интерва-ла, при которой еще нет перекрытия спектров соседних порядков.

$$m \cdot (\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \qquad (6.28)$$

Задача 6.3

На дифракционную решетку, содержащую 250 штрихов на 1 мм, падает нормально свет с длиной волны 0,6 мкм. Найти общее число дифракционных максимумов, которые дает эта решетка. Определить угол, под которым наблюдается последний дифракционный максимум.

Дано:

$N = 250$

$l = 1\,мм = 10^{-3}\,м$

$\lambda = 0,6\,мкм = 0,6 \cdot 10^{-6}\,м$

$k_{общ} - ?$

$\varphi_{\max} - ?$

Определим период дифракционной решетки:

$$d = \frac{l}{N} = \frac{10^{-3}}{250} = 4 \cdot 10^{-6}$$

Угол направления на дифракционный максимум φ_{max} не может превышать 90º, следовательно:

$$k_{max} \leq \frac{d}{\lambda} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{0,6 \cdot 10^{-6}} \approx 6,67$$

Порядок спектра может быть только целым числом, значит $k_{max}=6$.

Дифракционная картина данной решетки состоит из 6 максимумов справа и 6 максимумов слева от центрального максимума и самого центрального максимума.

$$k_{общ} = 2 \cdot k_{max} + 1 = \underline{13}$$

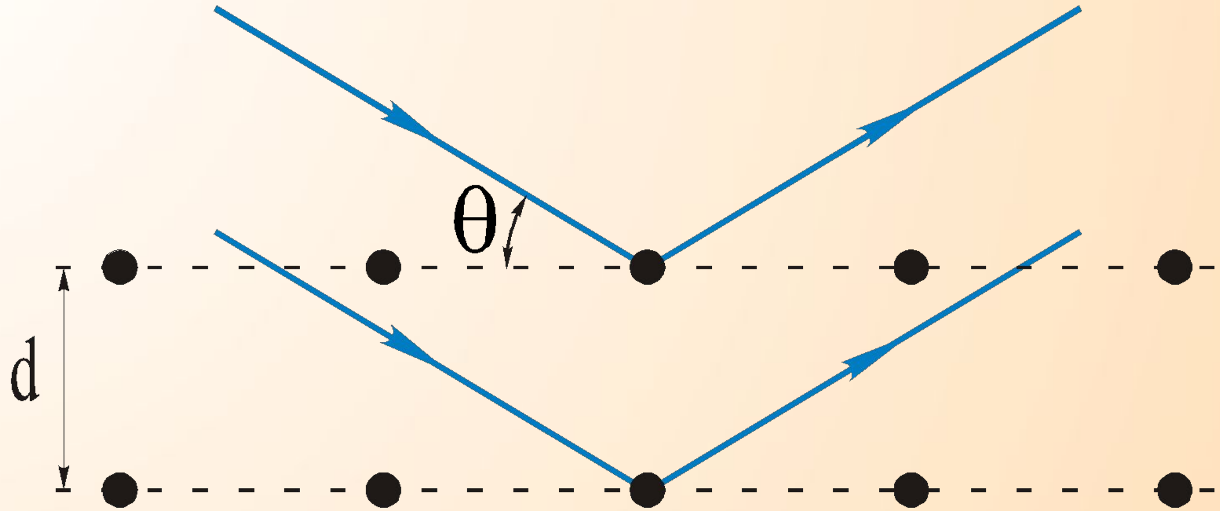
Угол, под которым виден последний дифракционный максимум, найдем из соотношения:

$$d \cdot \sin\varphi = k_{\max}\lambda$$

$$\sin\varphi_{\max} = \frac{k_{\max}\lambda}{d} = \frac{6 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-6}} = 0,9$$

$$\varphi_{\max} = \arcsin 0,9 = \underline{64,2^{0}}$$

Дифракция рентгеновских лучей



$$2d \cdot \sin\theta = \pm m\lambda \qquad (6.15)$$

Задача 6.4

Определить расстояние между атомными плоскостями кристалла, если дифракционный максимум второго порядка рентгеновского излучения с длиной волны 175 пм наблюдается под углом 45º к атомной плоскости.

<u>Дано:</u>

$\lambda = 175$ пм $= 1{,}75\cdot10^{-10}$ м

$\theta = 45^\circ$

$m = 2$

d - ?

$$2d\sin\theta = m\lambda$$

$$d = \frac{m\lambda}{2\sin\theta} = \frac{2\cdot 1{,}75\cdot 10^{-10}\text{ м}}{2\cdot\sqrt{2}/2} = \underline{2{,}47\cdot 10^{-10}\text{ м}}$$