

Очень кратко о размерностях величин

Динамическая метеорология. 5
курс
Лекция 1. Часть 3.

Измерение – это сопоставление величины с некоторым эталоном, который называется *единицей измерения*.

- Если изменить единицу измерения (эталон), то изменится и измеренное значение величины.
 - Однако, по смыслу, результат измерения должен отражать физическое явление и не должен зависеть от выбранной единицы измерений.
 - Это возможно, на основе **принципа абсолютности отношений**.
-

Принцип абсолютности отношений - обоснование постоянной связи между разными системами единиц измерения

- Если величину X измерить в единицах $[X_1]$ и получить значение K_1 , а затем эту же величину X измерить в единицах $[X_2]$ и получить значение K_2 , то отношение результатов измерения K_1/K_2 не зависит от значения измеряемой величины.

- Доказательство элементарно:
$$X = K_1 \cdot [X_1] = K_2 \cdot [X_2]$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{[X_2]}{[X_1]} \quad \text{не зависит от } X$$

Пример 1

- Я прошел от метро до РГГМУ расстояние X
 - Для англичанина $X = 1,24$ мили
 - Для Пушкина $X = 1,87$ версты
 - Для нас $X = 2000$ м
 - Поскольку величина одна и та же, то
 - $1 \text{ миля}/1\text{м} = 2000/1,24 = 1609$
 - $1 \text{ верста}/1\text{м} = 2000/1,87 = 1070$
 - **Эти соотношения единиц позволяют измерить любое расстояние в любых единицах!**
-

Первичные (основные) и вторичные величины

- По отношению к процедуре измерения все величины могут быть разбиты на две группы: первичные величины (измеряемые) и вторичные величины (вычисляемые с помощью основных по формулам).
- Вторичные величины имеют свои единицы измерения, которые вычисляются через единицы измерения основных величин по определенным формулам.
- Формулы связи единиц измерения называются *размерностями величин*.
- Обозначения размерности величины X :

$[X]$ или $Dim(X)$

Вспоминаем – 1: основные единицы измерения

- Масса (M) – (в СИ 1 кг)
- Длина (L) (в СИ 1 м)
- Время (t)- (в СИ 1 с)
- Угол (φ) – (в СИ 1 радиан)
- Температура (T)- (в СИ 1 К)

НО ДЛЯ СВОИХ ЗАДАЧ МОЖНО
НАЗНАЧАТЬ ОСНОВНЫМИ
ЛЮБЫЕ УДОБНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Первая теорема теории размерностей Бриджмена:

- Размерность любой физической (измеряемой) величины - $[F]$ - является степенным комплексом основных единиц



Перси Бриджмен, физик, лауреат нобелевской премии

Запись этой теоремы в виде формулы:

$$[F] = M^{\alpha} \cdot t^{\beta} \cdot L^{\gamma} \cdot T^{\delta} \cdot \phi^{\kappa}$$

- Обозначение $[F]$ - читать, как «размерность величины F »
- Не обязательно, чтобы все основные единицы входили в формулу размерности конкретной величины (см. пример 1)
- Эти показатели определяются с помощью формул, определяющих конкретные физические величины (см. пример 1)
- Показатели степени могут быть дробными

Пример 2:

- **Сила (F) – это произведение массы на ускорение, поэтому**

$$[F] = [m] \cdot [a] = M^1 \cdot \frac{L}{t^2} = M^1 L^1 \cdot t^{-2}$$

- **Напряжения трения (как и давление) – это отношение силы к площади**

$$[\tau] = [p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{M^1 L^1 \cdot t^{-2}}{L^2} = M^1 \cdot L^{-1} t^{-2}$$

Доказательство I теоремы -для любознательных (не спрашиваю!)

Пусть проведены два измерения Q_1 Q_2 Тогда результат первого измерения можно записать, как $Q_1=f(E_1)$, а второго - $Q_2=f(E_2)$.

Принцип абсолютности отношений: $Q_1/Q_2=f(E_1)/f(E_2)$ не зависят от выбора единиц измерения.

Тогда можно, например, уменьшить единицу измерения Q в x раз, что приведет к увеличению значений E_1 и E_2 также в x раз

Но отношение $Q_1/Q_2=f(E_1)/f(E_2)=f(x E_1)/f(x E_2)$ не изменится.

Это значит, что справедлива формула

$$f(xE_1) = \frac{f(E_1)}{f(E_2)} \cdot f(xE_2) \Rightarrow E_1 \cdot \frac{df(xE_1)}{d(xE_1)} = \frac{f(E_1)}{f(E_2)} \cdot E_2 \cdot \frac{df(xE_2)}{d(xE_2)}$$

откуда при $x=1$

$$\frac{E_1}{f(E_1)} \cdot \frac{df(E_1)}{dE_1} = \frac{E_2}{f(E_2)} \cdot \frac{df(E_2)}{dE_2} = a$$

значит

$$\frac{E}{f(E)} \cdot \frac{df(E)}{dE} = a \Rightarrow \frac{d\ln(f)}{d\ln(E)} = a \Rightarrow \boxed{f(E) = C_1 \cdot E^a}$$

Вспоминаем – 2: Для своих задач можно использовать удобные единицы измерения

□ Например:

- Тепловую энергию измеряют в килокалориях

- – $1 \text{ ккал} = 4182 \text{ Дж} = 4,182 \text{ кДж}$

- Электроэнергию - в киловаттчасах

- – $1 \text{ кВт}\cdot\text{ч} = 1 \text{ кВт}\cdot 3600 \text{ с} = 3,6 \text{ мДж}$

- Энергопотребление - в тоннах условного топлива

- при сгорании 1 кг УТ выделяется 7000 ккал тепла

Но изменяя одни единицы измерения, следует согласованно изменить и остальные. Пример 3 (Прандтль. логарифмический профиль скорости. Начало док-ва):

Пусть имеется зависимость:
$$F\left(\tau, \rho, \frac{du}{dz}, z\right) = 0$$

В нее входят величины:

$$[\tau] = \frac{H}{m^2} = ML^{-1}T^{-1}, \quad [\rho] = \frac{\kappa z}{m^3} = ML^{-3}, \quad \left[\frac{du}{dz}\right] = \frac{1}{c} = T^{-1}, \quad [z] =$$

Здесь три основные величины (M, L, t), но вместо них можно взять за основу **три другие величины**, например: будем плотность измерять в D ($1 D = 1 \text{ кг/м}^3$), вместо T^{-1} можно использовать 1 (гц) герц, ну и оставим метры для Z.

Тогда, по 1 теореме Бриджмена, следует изменить и размерность напряжения по формуле:

$$[\tau] = [\rho]^\alpha \cdot \left[\frac{du}{dz}\right]^\beta \cdot [z]^\gamma$$

Для перехода к другой системе первичных единиц важно знать:

- Если изменять масштабы основных единиц размерности,
 - То формула размерности не меняется, а значения производных величин меняются на постоянный множитель перевода
 - Найти этот множитель можно на основе формулы размерности величины
-

Пример 4.

Тротиловый эквивалент

- При взрыве 1 кг тринитротолуола (ТНТ) выделяется 4,6 гДж энергии
 - Перейдем к от СИ к системе СГС (см, грамм,сек):
 - $1 \text{ Дж} = 1 \text{ н} \cdot \text{м} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2 = 10^3 \text{ г} \cdot 10^4 \text{ см}^2 / \text{с}^2 = 10^7 \text{ эрг}$ (1 эрг = $1 \text{ гсм}^2 / \text{с}^2$)
 - $4,6 \text{ гДж} = 4,6 \cdot 10^{9+7} \text{ эрг} = 4,6 \cdot 10^{16} \text{ эрг}$
 - (это энергия сильного горного удара)
-

Пример 5

Солнечная постоянная

- В XX веке (и до сих пор в США) применяется удобное для запоминания значение солнечной постоянной
 - $I_0 = 2 \text{ кал/см}^2/\text{мин.}$
 - В СИ $1 \text{ кал} = 4,18 \text{ дж}$, $1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2$
 - Тогда $I_0 = 2 \times 4,18 / 10^{-4} / 60$
[дж/м²/с] = 1393 [вт/м²]
-

-
- Задачи на перевод размерностей – это вопрос 3 в билете
 - Более подробно в 1 главе учебника «Динамическая метеорология (ознакомительный курс)» Русина И. Н.
-