

Геострофическое
равновесие— основное
динамическое равновесие
атмосферы

Старое и новое

Полная система уравнений, которая, является
 достаточной для компьютерного
 моделирования атмосферы всех движений
 воздуха

$$\frac{dV}{dt} = -g - \mathbf{V}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \frac{1}{\rho} \nabla p \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + l \cdot v \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - l \cdot u \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \end{cases}$$

$$\text{div}(\mathbf{U}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad \rho = \frac{p}{RT}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \left\{ -\left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] - \left(w \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right\} + \frac{RT}{P} \frac{dP}{dt},$$

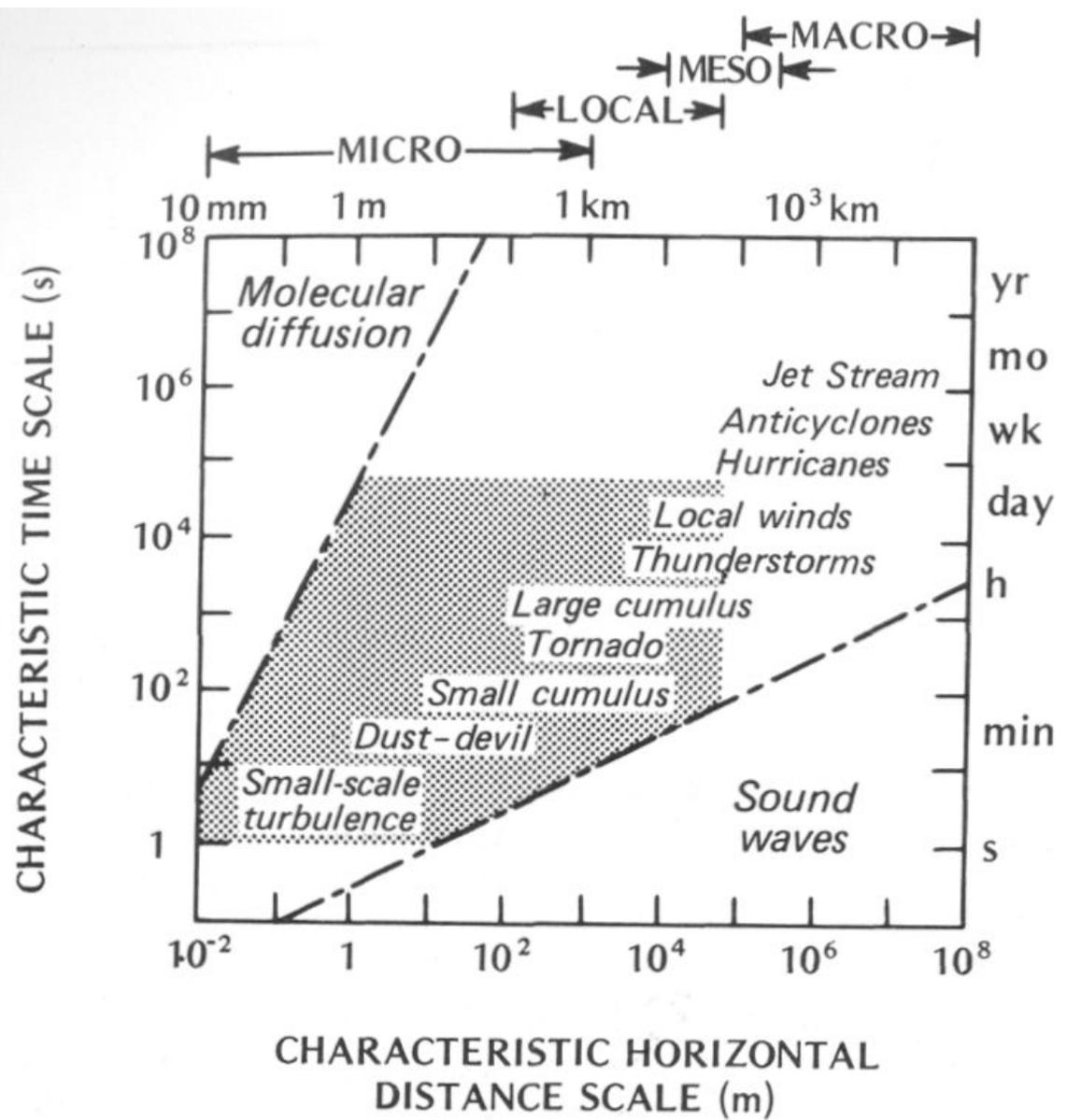


Figure 1.1 Time and space scales of various atmospheric phenomena. The shaded area represents the characteristic domain of boundary layer features (modified after Smagorinsky, 1974).

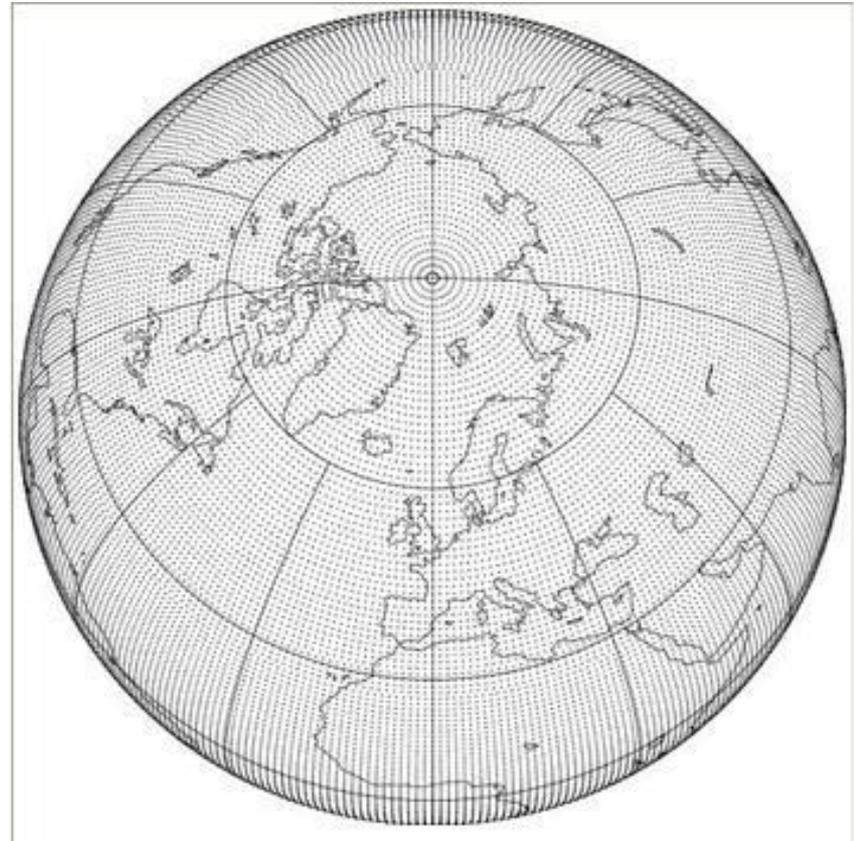
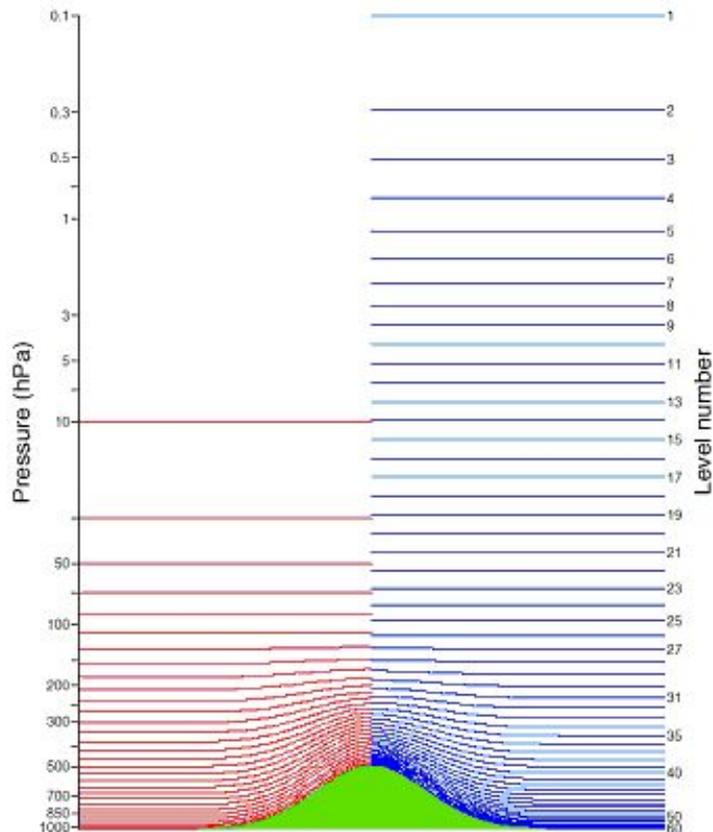
Oke (1987)

Характерные масштабы атмосферных движений



Трудности моделирования атмосферных процессов – следствие многомасштабности движений

Уравнения преобразуются в дискретную форму,
когда переменные определяются через их
значения в узлах сетки

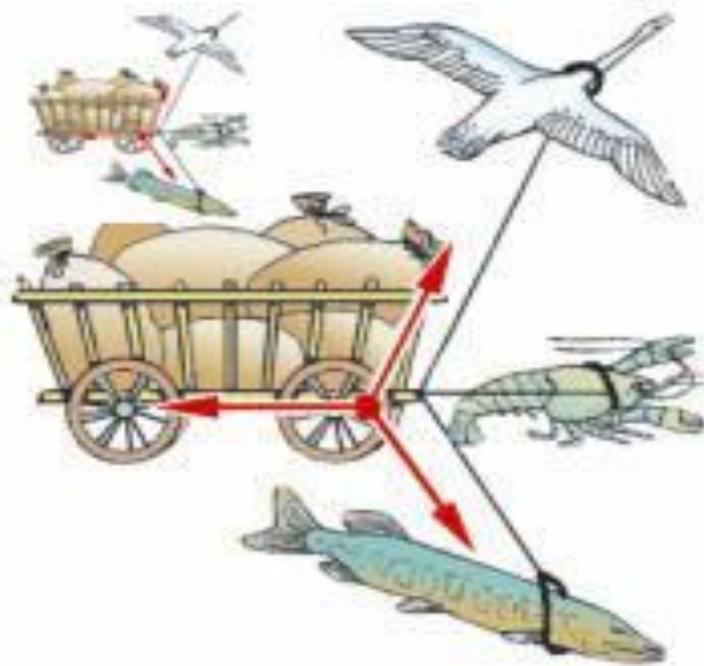
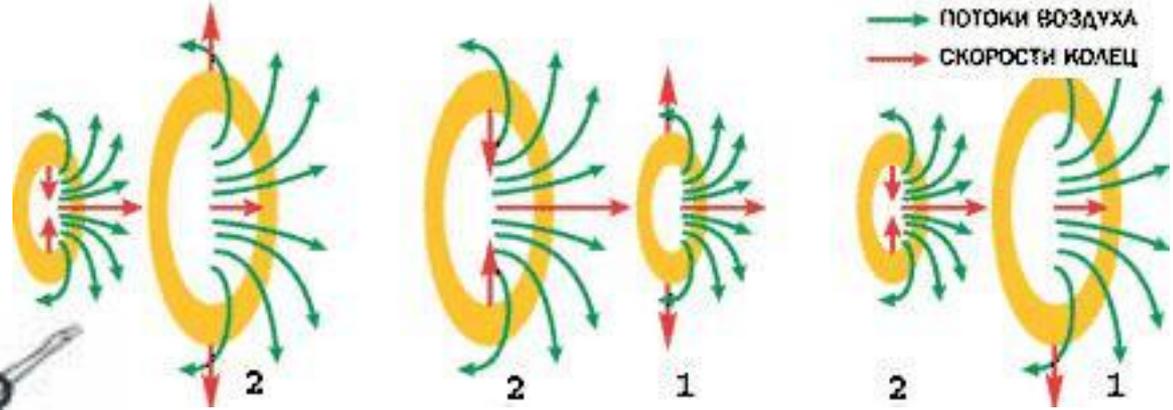


**Вычисления ведутся шагами по времени по сезонам или векам
в зависимости от целей исследователя**

Для получения численной модели нужных движений применяется метод подобия

Кинематическое подобие

Динамическое подобие



Требования к моделированию



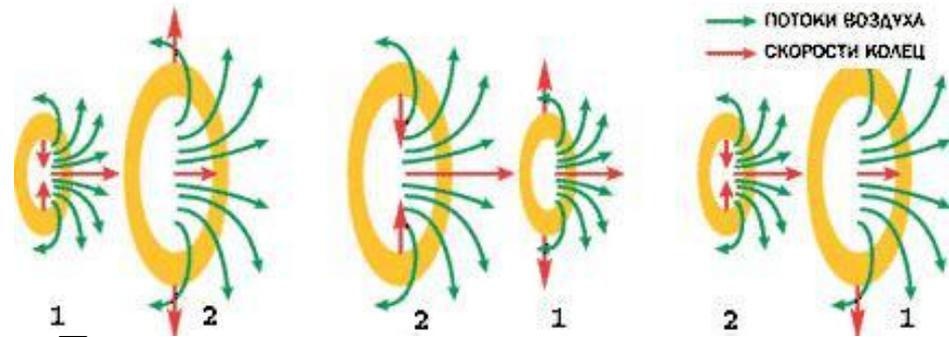
Геометрическое подобие

- Геометрическое подобие представляет собой пропорциональность сходственных размеров и равенство соответствующих углов.
- Под геометрическим подобием понимают подобие тех поверхностей, которые ограничивают потоки

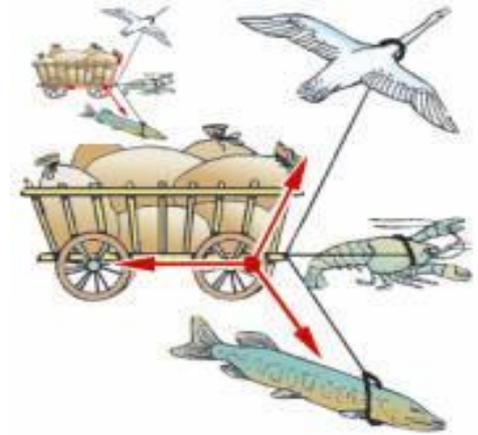
Невозможность геометрического подобия в геофизике



В 2007 году рабочие Дорогобужского химического завода решили сделать из старого ГАЗГОЛЬДЕРА глобус. Получился самый большой глобус в Европе (больше только в Нью-Йорке). Дорогобужский глобус достигает в высоту 12 метров, диаметра — 10,5 метра, вес 12 тонн, располагается на шести столбах в метре над землей. Шар расписывали профессиональные смоленские художники под началом руководителя проекта, известного дизайнера Михаила Шведова, который и задумал сделать его географической картой мира. Слой атмосферы до 30 км (тропосфера и стратосфера) над этим глобусом представлял бы собой пленку толщиной 2,5 см.



- Кинематическое подобие означает пропорциональность местных скоростей в сходственных точках и равенство углов, характеризующих направление этих скоростей
- Из кинематического подобия вытекает геометрическое подобие линий тока. Очевидно, что для кинематического подобия требуется геометрическое подобие русел.



- Динамическое подобие – это пропорциональность действующих на сходственные объемы в кинематически подобных потоках и равенство углов, характеризующих направление этих сил.
- В потоках жидкостей обычно действуют разные силы: силы давления, вязкости (трения), тяжести и др.
- Соблюдение их пропорциональности означает полное гидродинамическое подобие.
- Осуществление на практике полного гидродинамического подобия оказывается весьма затруднительным, поэтому обычно имеют дело с частичным (неполным) подобием, при котором соблюдается пропорциональность лишь основных, главных сил.

При теоретическом анализе выбирают *постоянные масштабы моделируемых переменных.*

- При выборе масштаба обычно принимают, что в модели значения масштабируемой величины не должны существенно отличаться от единицы.

$$\frac{u}{u_m} = U \quad \text{или} \quad u = U \cdot u_m$$



- Например, если в реальных условиях составляющая скорости u может меняться от нуля (штиль) до 40 м/с (ураганный ветер), то выбрав в качестве масштаба значение $U=10$ м/с, можно ожидать,
- что аналогичная составляющая в модели u_m , будет безразмерной и меняющейся от нуля до 4, так как в условиях кинематического подобия должны выполняться равенства.

Для выявления динамического подобия используют КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

- Критерий подобия— это отношение двух множителей порядка в определяющем уравнении
- Критерий подобия — безразмерная величина, составленная из размерных физических параметров, определяющих рассматриваемое физическое явление
- Равенство всех однотипных критериев подобия для двух физических явлений и систем — необходимое и достаточное условие физического подобия этих систем

В гидромеханике важнейшими критериями подобия являются:

Название	Формула	Определяет отношение:
Число Рейнольдса	$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot l}{\mu} = \frac{ul}{\nu}$	Силы вязкости к силе инерции
Число Маха	$M = \frac{u}{a^*}$	Скорости потока к скорости звука
Число Фруда	$Fr = \frac{u^2}{g \cdot l}$	Силы инерции к силе тяжести

В этих примерах:

ρ — плотность жидкости или газа, l — характерный размер, u — скорость течения, a^* — местная скорость распространения звука в движущейся среде.

μ — динамический коэффициент вязкости, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ — кинематический коэффициент вязкости,

Основными критериями подобия процессов теплопередачи между жидкостью (газом) и обтекаемым телом являются:

Название критерия	Формула	Отношение
число Прандтля	$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu \cdot C_p}{\lambda}$	Коэффициентов вязкости к <u>температуропроводности</u>
число Нуссельта	$Nu = \frac{a \cdot L}{\lambda}$	Потока тепла конвекции к потоку теплопроводности
число <u>Грасгофа</u>	$Gr = \frac{b \cdot g \cdot l^3 \cdot \Delta T}{\nu^2}$	Силы Архимеда к силам вязкости

Здесь α — коэффициент теплопередачи, λ — коэффициент теплопроводности, c_p — удельная теплоёмкость жидкости или газа при постоянном давлении, b — коэффициент объёмного расширения, ΔT — разность температур поверхности

тела и жидкости (газа), $a = \frac{l}{\rho c_p}$ — коэффициент температуропроводности |

Характерные масштабы параметров движений синоптического масштаба.



Наименование моделируемой величины:	Горизонтальные скорости (u, v)	Вертикальная скорость (w)	Горизонтальное расстояние (x, y)	Вертикальное расстояние (z)	Горизонтальное изменение давления (Δp)	Плотность (ρ)	Время (t)
Обозначение масштаба:	U	W	L	H	ΔP	ρ_0	T ($=L/U$)
Значение масштаба:	10 м/с	0,01 м/с	1000000 м (1000км)	10000 м (10км)	1000 Па (10гПа)	1 кгм ⁻³	10 ⁵ с (1 сутки)

Пример введения безразмерных переменных в определяющие уравнения

Исходная форма

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - 2u\omega \sin \varphi + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right)$$

Введение безразмерных переменных

$$\frac{U}{\tau} \frac{\partial v_m}{\partial t_m} + \frac{U^2}{L} \left(u_m \frac{\partial v_m}{\partial x_m} + v_m \frac{\partial v_m}{\partial y_m} \right) + \frac{UW}{H} w_m \frac{\partial v_m}{\partial z_m} =$$

$$-\frac{\Delta P}{roL} \frac{1}{\rho_m} \cdot \frac{\partial p_m}{\partial y_m} - lU \cdot lu_m + \frac{ro \cdot vU}{roL^2} \cdot \frac{1}{\rho_m} \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xym}}{\partial x_m} + \frac{\partial \tau_{yym}}{\partial y_m} + \frac{\partial \tau_{zym}}{\partial z_m} \right)$$



Если разделить все члены уравнения на один из множителей порядка, то можно получить безразмерное уравнение с коэффициентами, которые называют критериями подобия

Анализ масштабов вертикального движения атмосферы

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + 2u\omega \cos \varphi + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

Оценка порядков слагаемых и сравнение влияния динамических факторов в уравнении вертикального ускорения

1	$\frac{\partial w}{\partial t}$	$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y}$	$w \frac{\partial w}{\partial z}$	$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}$	g	$2u\omega \cos \varphi$	$\frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right)$	$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$	c
2	$\frac{WU}{L}$	$\frac{WU}{L}$	$\frac{W^2}{H}$	$\frac{P}{\rho H}$	g	$2aU \cos 45^\circ$	$\frac{\nu W}{L^2}$	$\frac{\nu W}{H^2}$	c
3	$10^{-7} \cdot \frac{m}{c^2}$	$10^{-7} \cdot \frac{m}{c^2}$	$10^{-8} \cdot \frac{m}{c^2}$	$10 \cdot \frac{m}{c^2}$	$10 \cdot \frac{m}{c^2}$	$10^{-3} \cdot \frac{m}{c^2}$	$10^{-19} \cdot \frac{m}{c^2}$	$10^{-15} \cdot \frac{m}{c^2}$	c



$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

движения атмосферы происходят квазистатически

Оценка порядков слагаемых в уравнении меридионального ускорения путем сравнения с ускорением Кориолиса.

1	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$	$w \frac{\partial v}{\partial z}$	$-\frac{l}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	$l \cdot u$	$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right)$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$
2	$\frac{U}{\tau} = \frac{U^2}{L}$	$\frac{U^2}{L}$	$\frac{UW}{H}$	$\frac{\Delta P}{\rho L}$	lU	$\frac{\nu U}{L^2}$	$\frac{\nu U}{H^2}$
3	$10^{-4} \cdot \text{м/с}^2$	$10^{-4} \cdot \text{м/с}^2$	$10^{-5} \cdot \text{м/с}^2$	$10^{-3} \cdot \text{м/с}^2$	$10^{-3} \cdot \text{м/с}^2$	$10^{-16} \cdot \text{м/с}^2$	$10^{-12} \cdot \text{м/с}^2$
4	1	1	$\frac{WL}{UH}$	$\frac{\Delta P}{\rho U^2}$	$\frac{lL}{U}$	$\frac{\nu}{UL}$	$\frac{\nu L}{UH^2}$
5	1	1	10^{-1}	10^1	10^1	10^{-12}	10^{-8}
6	$\frac{U}{l \cdot L}$	$\frac{U}{l \cdot L}$	$\frac{W}{H \cdot l}$	$\frac{\Delta P}{\rho \cdot l \cdot LU}$	1	$\frac{\nu}{l \cdot L^2}$	$\frac{\nu}{l \cdot H^2}$
7	10^{-1}	10^{-1}	10^{-2}	1	1	10^{-13}	10^{-9}

Параметр Кориолиса

$$l = 2\omega \sin \varphi$$

$$\tau_{xy} = T_{xy} \cdot \tau_{xym} \quad T_{xy} \approx \rho \cdot \nu \cdot \frac{U}{L}$$

откуда

Для оценки поверхностных сил принята гипотеза Ньютона

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{T_{xy}}{L} \cdot \frac{\partial \tau_{xym}}{\partial x_m} = \frac{\rho \cdot \nu \cdot U}{L^2} \cdot \frac{\partial \tau_{xym}}{\partial x_m}$$



Число Россби-Кибеля $Ro=U/(IL)$



$$Ro = \frac{U}{l \cdot L} \quad \text{число Россби}$$



$Ro \ll 1$ Преобладает ускорение Кориолиса

$Ro \approx 1$ Оба фактора имеют равное значение

$Ro \gg 1$ Преобладает относительное ускорение

- Это безразмерный комплекс, который позволяет оценить, какой из факторов компенсируют воздействие силы барического градиента
 - относительное ускорение частицы воздуха
 - или ускорение Кориолиса

Роль числа Ro

- При одинаковой величине барического градиента балансирующие его ускорения могут быть различными для движений с разным горизонтальным масштабом L .
- При $L \approx 1000$ км и $Ro < 1$ выполняется баланс, который называется *геострофическим равновесием*.
- Но если рассматриваются процессы, у которых $L \approx 100$ км, то $Ro \approx 1$ и баланс *градиентным равновесием*.
- Для процессов еще меньшего масштаба $L \approx 10$ км и менее уже $Ro > 1$ и главным становится баланс между барическим градиентом и относительным ускорением.
- (В зарубежной литературе этот случай иногда называют циклострофическим равновесием).



Основное равновесие атмосферы при синоптическом анализе

- Влияние молекулярной вязкости на эти потоки несущественно.
- Главными динамическими факторами являются сила барического градиента и сила Кориолиса.
- С относительной ошибкой около 10% можно использовать уравнения горизонтального движения синоптического масштаба в виде



Система уравнений геострофического движения атмосферы. ¶

⊕

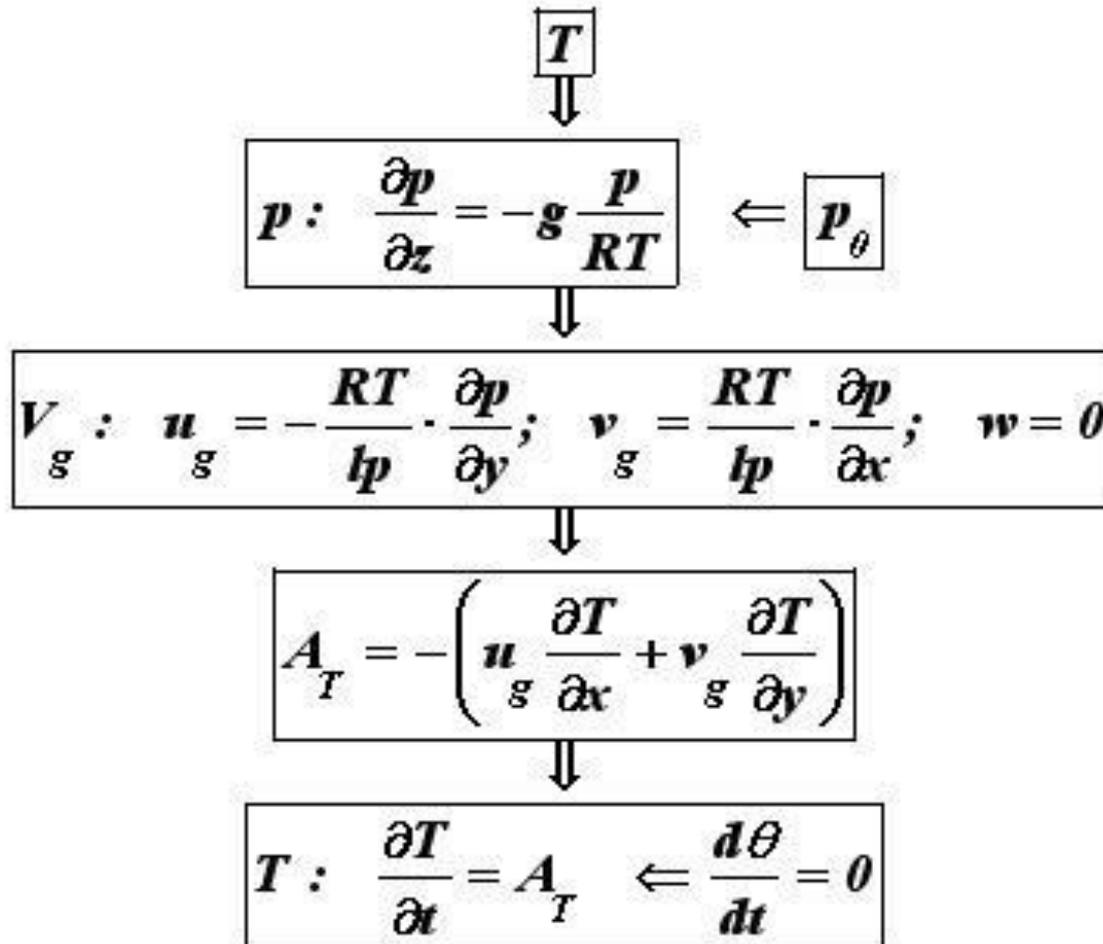
Название уравнения □	Вид уравнения □	Для каких переменных применяется □
Уравнения геострофического движения □	$-\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{k} \times \mathbf{U}_g = 0$ □	Горизонтальные скорости, u, v □
Уравнение статики □	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g$ □	Атмосферное давление, p □
Уравнение неразрывности □	$\nabla \cdot \mathbf{U}_g + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ □	Вертикальная скорость, w □
Уравнение состояния □	$p = \rho \cdot R \cdot T$ □	Плотность воздуха, ρ □

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ:

Система уравнений геострофического движения атмосферы в первом приближении является диагностической (не содержит производных по времени).

Название уравнения	Вид уравнения	Для каких переменных применяется
Уравнения геострофического движения	$-\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{k} \times \mathbf{U} \mathbf{g} = 0$	Горизонтальные скорости, u, v .
Уравнение статики	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g$	Атмосферное давление, p
Уравнение неразрывности	$\nabla \cdot \mathbf{U} \mathbf{g} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$	Вертикальная скорость, w
Уравнение состояния	$p = \rho \cdot R \cdot T$	Плотность воздуха, ρ

Геострофическая модель -- основная концептуальная модель прогноза погоды



Геострофическое равновесие

И его основные
свойства



Разложение силы Кориолиса на горизонтальную и вертикальную составляющие

$$\boxed{V = \{u, v, w\} = U_S + w \cdot k}, \quad \text{где} \quad U_S = u \cdot i + v \cdot j + 0 \cdot k$$

$$\boxed{\omega = 0 \cdot i + l_y \cdot j + l_z \cdot k}, \quad \text{где} \quad l_y = \omega \cos \varphi \quad l_z = \omega \sin \varphi$$

$$-2\omega \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & l_y & l_z \\ u & v & w \end{vmatrix} =$$

$$= (l_z v - \cancel{l_y w}) \cdot i - l_z u \cdot j + l_y u \cdot k \cong$$

$$= l_z v \cdot i - l_z u \cdot j + l_y u \cdot k = -k \times l_z U_S + l_y u \cdot k$$

$$\text{проверка: } -k \times l_z U_S = l_z \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = l_z v \cdot i - l_z u \cdot j$$

$$\text{Откуда для силы Кориолиса: } \boxed{-2\omega \times V} = \boxed{-k \times l_z U_S + l_y u \cdot k}$$

Геострофическое равновесие

$$0 = -\mathbf{g} - \mathcal{L}(\mathbf{v} \times \mathbf{k}) - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

выписав компоненты получим

$$\left(-g \cdot \mathbf{k} - \cancel{l_y u \cdot \mathbf{k}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \mathbf{k} \right) + \left(l_z v \cdot \mathbf{i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \mathbf{i} \right) + \left(-l_z u \cdot \mathbf{j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \mathbf{j} \right) = 0$$

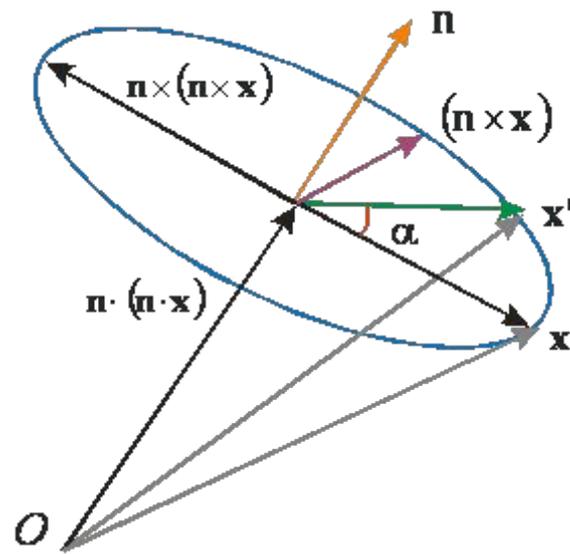
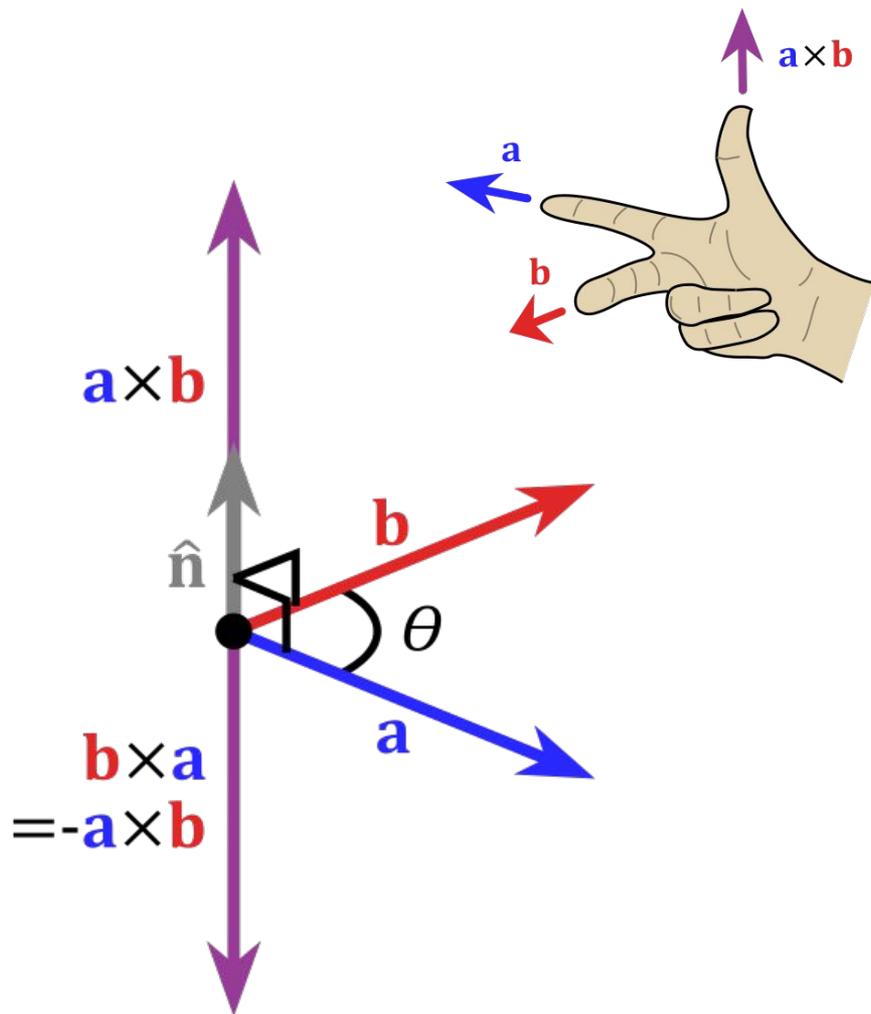
принятая запись

$$\mathbf{k} : \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

$$\mathbf{s} : \quad -\mathbf{k} \times l_z \mathbf{U}_s - \frac{1}{\rho} \nabla_s p = 0$$

Это принятая векторная запись геострофического равновесия. Индексы (s), указатели плоских векторов, обычно опускают!

Вспомним вектора:



$$k \times (k \times A) = -A$$

Решение векторного уравнения геострофического равновесия

$$\mathbf{k} \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{k} \times l_z \mathbf{U}_g \right) = 0 \Rightarrow -\mathbf{k} \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + l_z \mathbf{U}_g = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{U}_g = \mathbf{k} \times \left(\frac{1}{\rho l_z} \nabla p \right)}$$

Для справки:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times l \mathbf{U}_g) &= \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \cdot l \mathbf{U}_g) - l \mathbf{U}_g (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) = \\ &= \mathbf{k} \cdot (0 \cdot l u_g + 0 \cdot l v_g + 1 \cdot 0) - l \mathbf{U}_g \cdot (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1) = -l \mathbf{U}_g \end{aligned}$$

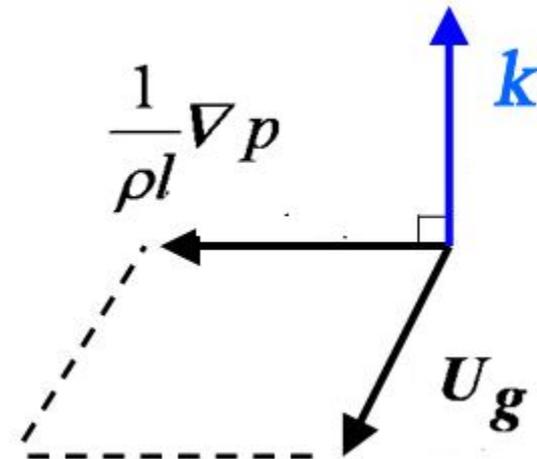
$$\begin{Bmatrix} l u_g \\ l v_g \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{i} + \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{u_g = -\frac{1}{l \rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}; \quad v_g = \frac{1}{l \rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}}$$

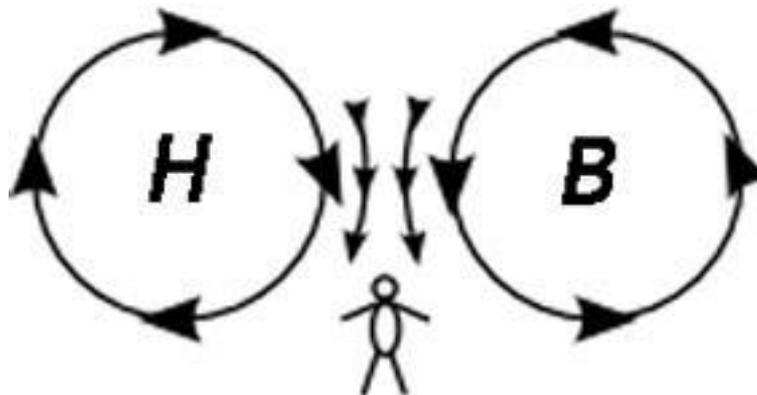
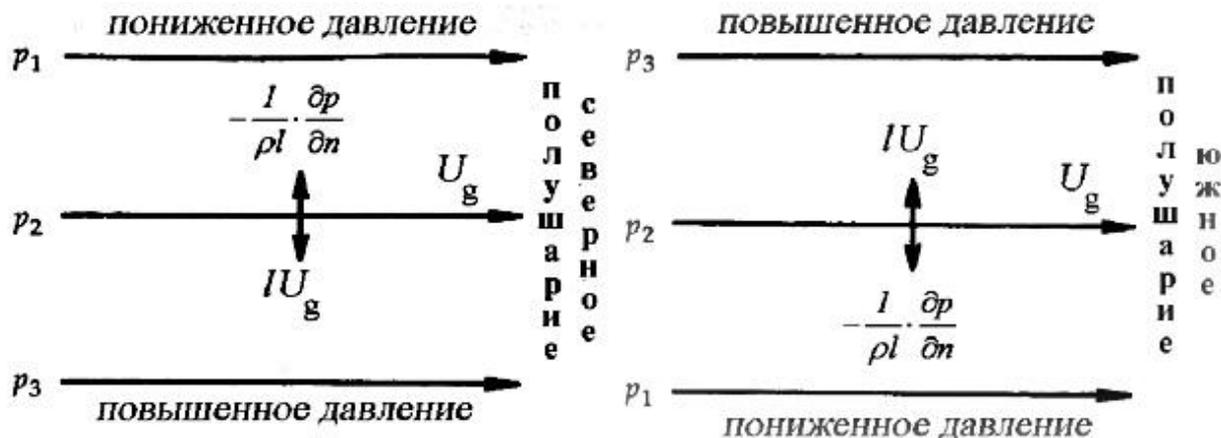
Задача: НАПРАВЛЕНИЕ геострофического ветра

- Используя правило правой руки, убедиться, что геострофический ветер направлен в северном полушарии влево от градиента давления, а значит по отношению к изобарам в соответствии с законом Бейс-Балло

$$U_g = k \times \left(\frac{1}{\rho l} \nabla p \right)$$



Как векторное произведение,
вектор направлен влево от вектора
градиента давления и перпендикулярен ему



Правило Бейс-Балло

Следует помнить, что геострофический ветер не может «дуть» – это приближенная оценка, а не реальный природный феномен.

Задача: а что меняется в южном полушарии?

- Ответ: единичный вектор вертикали –к там будет иметь направление противоположное вектору угловой скорости вращения земли
- Поэтому разложение угловой скорости будет иметь вид

$$2\boldsymbol{\omega} = 0 \cdot \mathbf{i} + l_y \cdot \mathbf{j} - l_z \cdot \mathbf{k}$$

Откуда для силы Кориолиса: $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = \mathbf{k} \times l_z \mathbf{U}_S + l_y u \cdot \mathbf{k}$

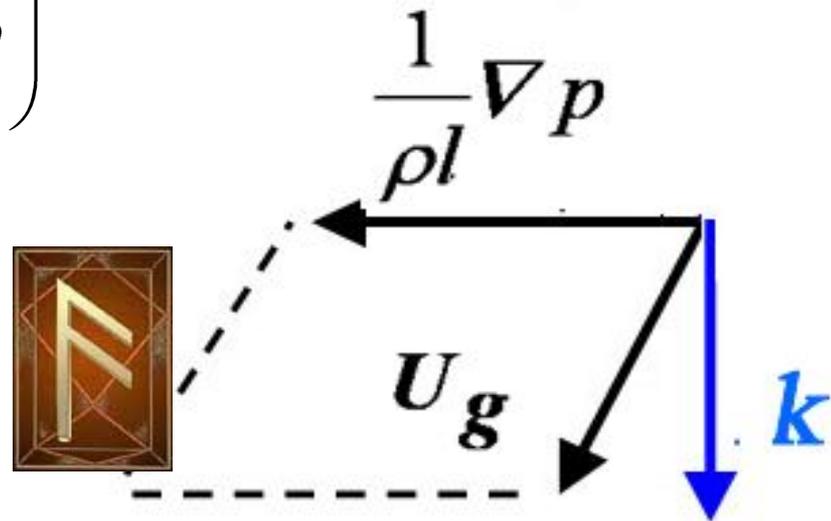
Геострофическое равновесие: $\mathbf{k} \times l_z \mathbf{U}_S - \frac{1}{\rho} \nabla_S p = 0$

Геострофический ветер: $\mathbf{U}_g = -\mathbf{k} \times \left(\frac{1}{\rho l_z} \nabla p \right)$

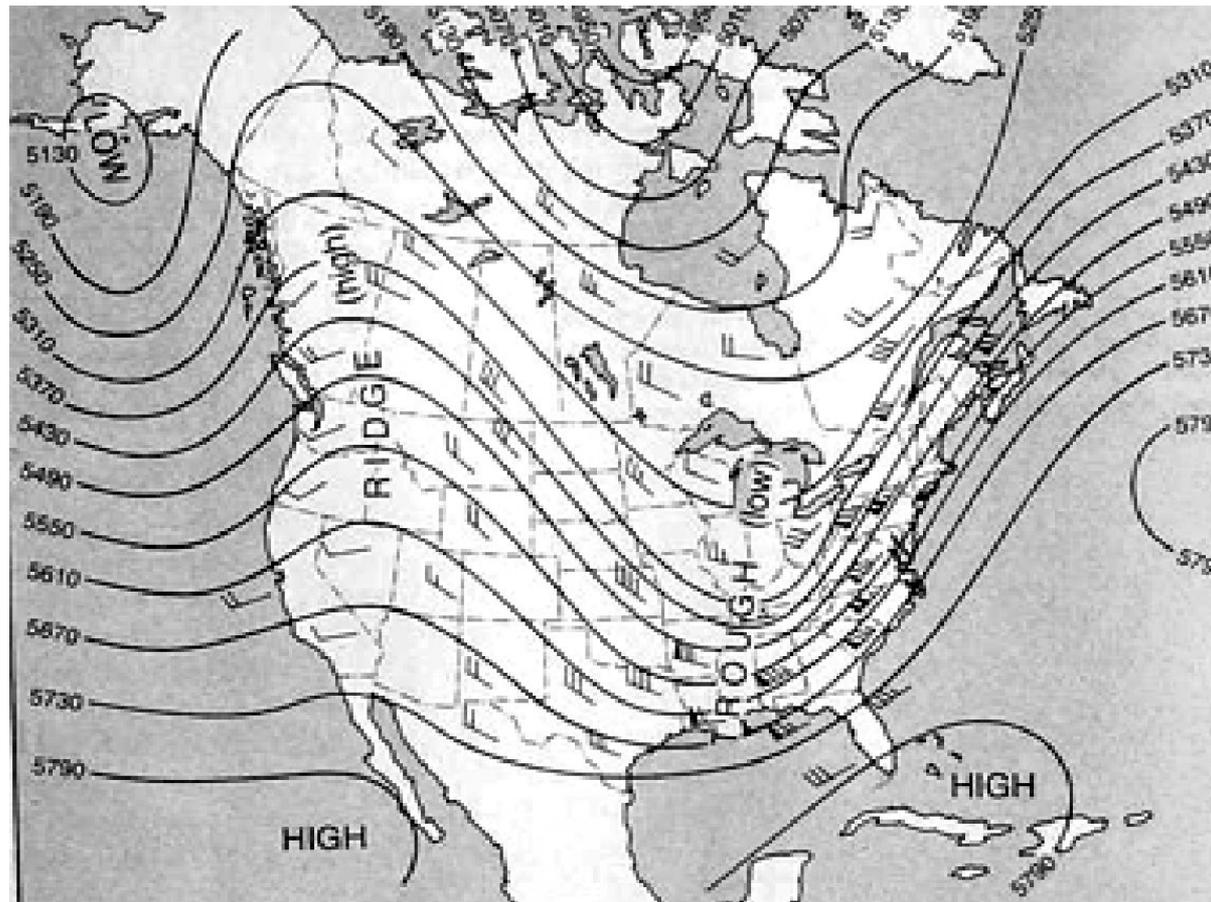
Задача: НАПРАВЛЕНИЕ геострофического ветра

- Используя правило правой руки, убедиться, что геострофический ветер направлен в ЮЖНОМ полушарии вправо от градиента давления
- Модифицировать правило Бейс-Балло в этом случае

$$U_g = -k \times \left(\frac{1}{\rho l} \nabla p \right)$$



Зачем он нужен ?



В свободной атмосфере (выше 1 км) ветер по скорости и направлению очень близок к геострофическому

Способ оценки.

Рабочая формула для вычисления модуля скорости геострофического ветра

$$U_g = \sqrt{\left(-\frac{1}{l\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{1}{l\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}\right)^2} = \frac{1}{l\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{2\omega \sin\varphi \cdot \rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial n}$$

Пример оценки величины скорости геострофического ветра:

$$U_g \left[\frac{м}{с} \right] = \frac{100 \frac{Па}{гПа}}{2 \cdot 7,29 \cdot 10^{-5} \left[\frac{с^{-1}}{м} \right] \cdot \sin\varphi \cdot 1,29 \left[\frac{кг}{м^3} \right] \cdot 100 \left[\frac{м}{гПа} \right] \cdot \frac{\partial p}{\partial n} \left[\frac{гПа}{м} \right]}{\cdot 100} = \frac{5,3}{\sin\varphi} \frac{\partial p}{\partial n}$$

Геострофический ветер не может быть определен на экваторе!

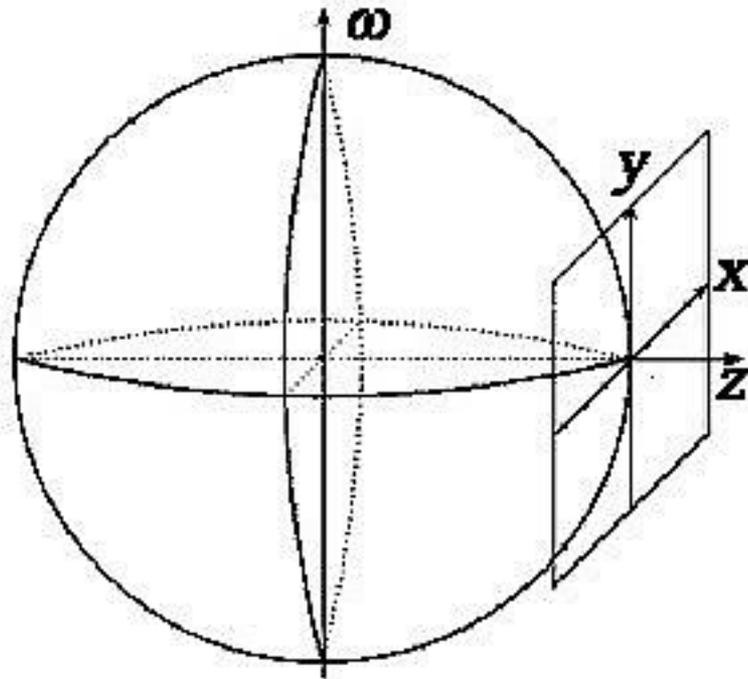
Вектор угловой скорости вращения Земли в этой стандартной системе координат имеет вид .

$$\omega = \{0; \omega; 0\}$$



Вектор силы Кориолиса имеет компоненты

$$\begin{aligned}
 -2(\omega \times V) &= -2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \omega & 0 \\ u & v & w \end{vmatrix} = \\
 &= -2 \cdot (\omega w \cdot i + 0 \cdot j - \omega u \cdot k)
 \end{aligned}$$



Расположение осей стандартной системы координат на экваторе

Уравнения геострофического баланса у экватора имеют вид

$$-g - \mathcal{V}(\quad \times \quad) - \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \Rightarrow$$
$$-g \cdot \mathbf{k} - 2 \cdot (\omega w \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} - \omega u \cdot \mathbf{k}) - \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \mathbf{k} \right) = 0$$
$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - 2\omega w = 0; \quad -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + 0 = 0; \quad -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + 2\omega u - g = 0;$$

Отсюда следует, что

аналогом геострофического потока у экватора будет движение в вертикальном направлении,

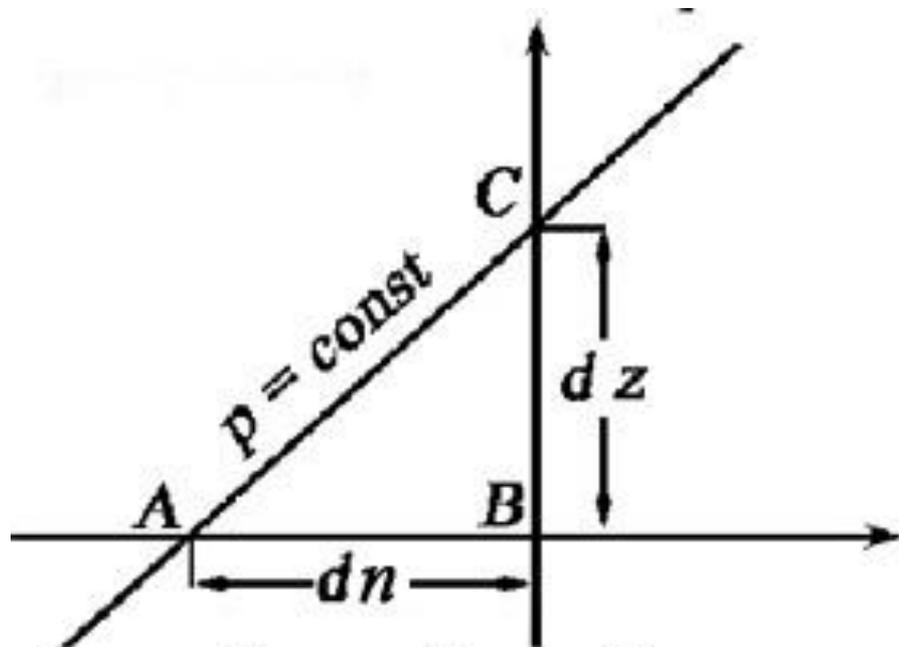
при условии образования вдоль экватора экстремума барического поля.

Рассчитать горизонтальные скорости по этим равенствам невозможно.

Поэтому говорят, что геострофический ветер у экватора не

Геострофического ветра в изобарической системе координат

Переход к изобарической
системе координат



$$0 = dp = \frac{\partial p}{\partial n} dn + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \frac{\partial p}{\partial n} dn - \rho g dz$$



$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = g \frac{\partial z}{\partial n}$$

$$U_g = k \times \left(\frac{1}{\rho l} \nabla p \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho l} \nabla p &= \frac{1}{\rho l} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} \right) = \\ &= \frac{1}{\rho l} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} \right) = \frac{1}{\rho l} \nabla z \end{aligned}$$

$$U_g = k \times \left(\frac{1}{\rho l} \nabla z \right)$$

Высота изобарической поверхности $p = \text{const}$ –
теперь стала функцией : $z(t, x, y, p)$

Изменение геострофического ветра с высотой между изобарическими поверхностями

$$\Delta z = z_2 - z_1 = \frac{RT_{cp}}{g} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \text{ барометрическая формула}$$

тогда вектор изменения геострофического ветра в слое от p_1 до p_2

$$\Delta U_g = U_g(p_2) - U_g(p_1) = k \times \left(\frac{g}{l} \nabla (z_2 - z_1) \right) = k \times \left(\frac{R}{l} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \nabla T_{cp} \right)$$

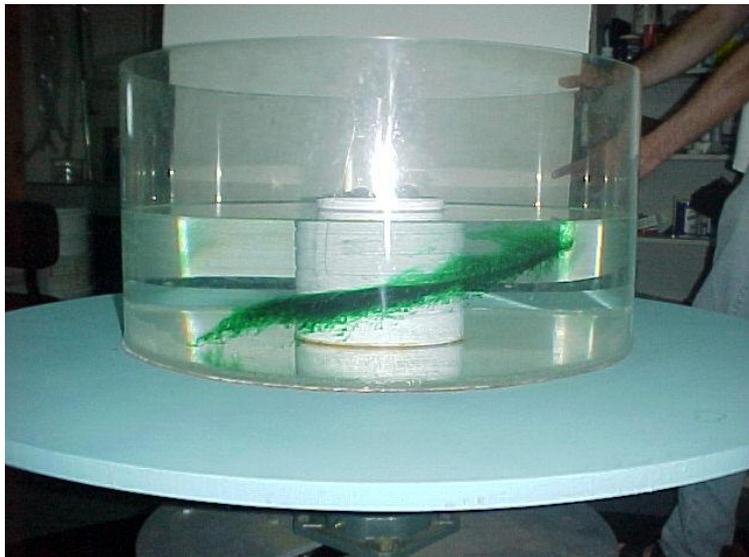
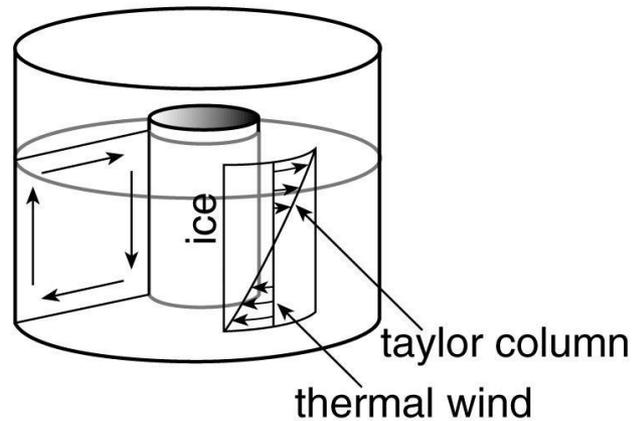
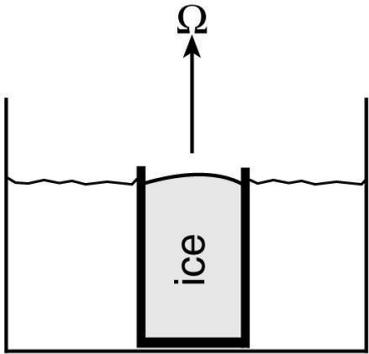
или
$$\Delta U_g = k \times \left(\frac{g \cdot \Delta z}{l \cdot T_{cp}} \nabla T_{cp} \right)$$

$$\frac{dU_g}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta U_g}{\Delta z} = k \times \left(\frac{g}{l \cdot T} \nabla T \right)$$



ΔU_g – этот вектор называется «*термический ветер*»

Термический ветер в лаборатории



Мы заполняем цилиндрический резервуар водой (глубина 15 см), и вращаем его очень медленно - не более чем в 0,8 об / мин (или даже меньше) в против часовой стрелки. В центре мы размещаем оловянный цилиндр 15 см в диаметре со льдом. Оставляем на 20 минут для установления. Затем кидаем нескольких кристаллов марганцовки. Они падают вертикально на дно. Полосы не остаются вертикальными: они наклоняются в азимутальном направлении все сильнее с увеличением высотой от дна. Мы посыпаем кусочки черной бумаги на поверхность и они движутся в том же направлении, но быстрее, чем, вращается стол (суперротация).

Запомнить!

- Изменение вектора геострофического ветра с высотой выражается как в увеличение скорости, так и в изменении направления.
- Вектор *термического ветра*, перпендикулярен *термическому градиенту* т.е. «дует» вдоль *изотерм средней температуры слоя от p_1 до p_2*
- *Квази Бейс-Балло*: *термический ветер «дует» вдоль изотерм так, чтобы (если встать к нему спиной), слева оказывалась область холода (в северном полушарии)*



Пример термического ветра 1: объяснение струйного течения

- В широтной зоне от 30 до 40 N зональный градиент температуры в тропосфере достигает 20°C/1000 км. Задать недостающие параметры и оценить скорость ветра на высоте 8 км. (U(0)=0)



$$\Delta U_{\mathbf{g}} = \mathbf{k} \times \left(\frac{g \cdot \Delta z}{l \cdot T_{cp}} \nabla T_{cp} \right) \Rightarrow U_{\mathbf{g}}(8) - U_{\mathbf{g}}(0) = U_{\mathbf{g}}(8) =$$

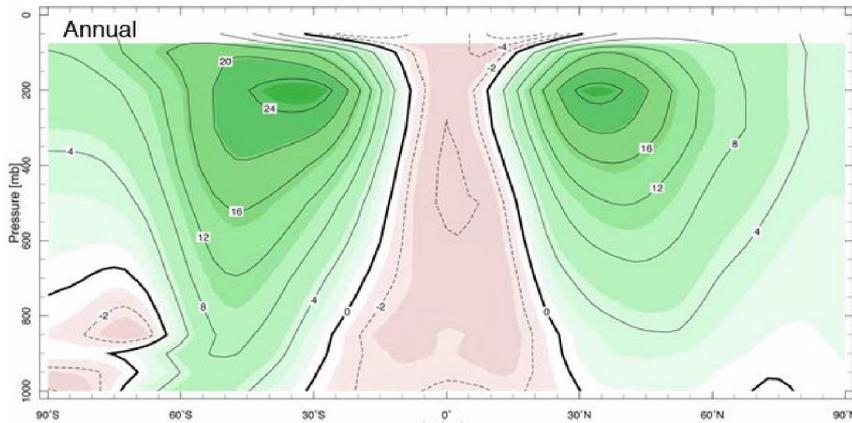
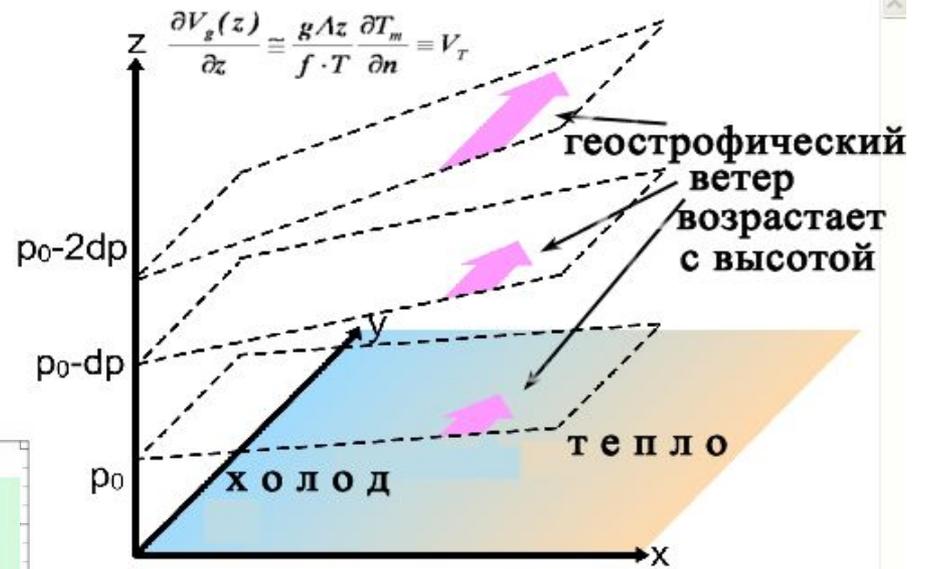
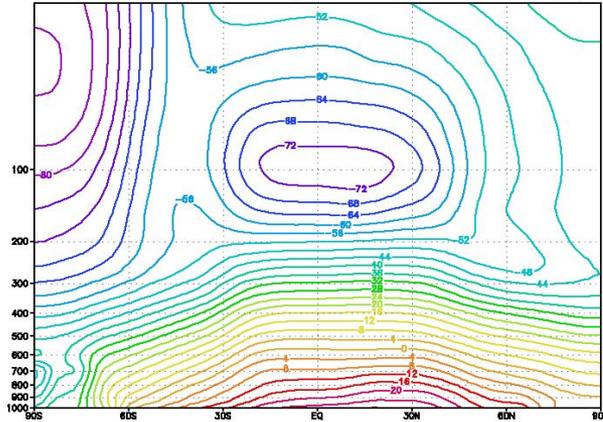
$$= \left[\frac{g \cdot \Delta z}{l \cdot T_{cp}} \left(\frac{\partial T_{cp}}{\partial x} \mathbf{k} \times \mathbf{i} + \frac{\partial T_{cp}}{\partial y} \mathbf{k} \times \mathbf{j} \right) \right] \Rightarrow U_{\mathbf{g}}(8) = - \frac{g \cdot \Delta z}{2\omega \sin \varphi \cdot T_{cp}} \frac{\partial T_{cp}}{\partial y} \mathbf{i} =$$

$$= \frac{9.8 \cdot 8000 \cdot (-20)}{2(2\pi/24/3600) \sin 30^0 \cdot (273 + 13 - 6.5 \cdot 4) \cdot 10^6} \mathbf{i} =$$

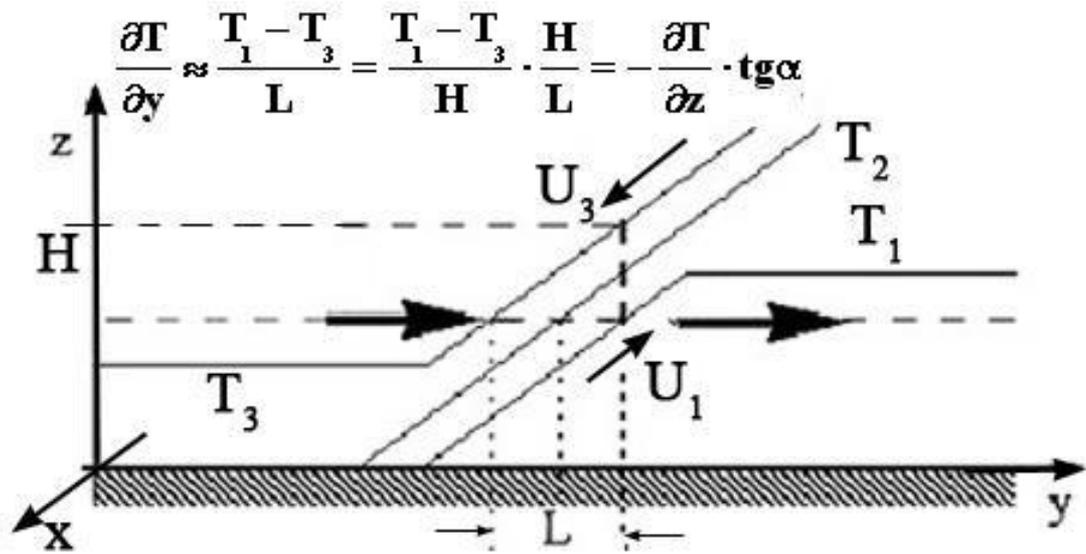
$$= \frac{196 \cdot 8000}{7.27 \cdot 10^{-5} \cdot 260 \cdot 10^6} \mathbf{i} = 113 \left[\frac{-1}{30} \right] \text{ км} \left[\text{ч} \cdot -1 \right]$$

Смотри рисунок!

July 1000–100hPa Temperature (C) (zonal average)



Пример термического ветра 2: Наклон фронтальных зон в атмосфере



$$\Delta U_g = -\frac{g \cdot \Delta z}{l \cdot T_{cp}} \frac{\partial T_{cp}}{\partial y}$$



Если $\Delta U_{gp} \approx \Delta U \approx U_3 - U_1$ и $z \cdot \nabla T = H \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \approx (T_1 - T_3) \cdot \text{tg}\alpha$ то

$$\boxed{\text{tg}\alpha = \frac{l \cdot T_{cp}}{g} \cdot \frac{U_3 - U_1}{T_1 - T_3}} \text{ — формула Маргулеса}$$

Оценка угла наклона фронта и изобарической поверхности

- Для фронта
 - $U_3 - U_1 = 10$ [м/с], $T_3 = 273$ К, $T_1 = 283$ К, $T_{ср} = 278$ К
 - Тогда $\text{tg}\alpha = U_{ср}/g = 0.0036$ ($= 0.2^\circ$) при $\phi = 45^\circ$
- Для изобарической поверхности:
 - $dp = p_x dx + p_z dz = 0$ откуда
 - $\text{tg}\beta = dz/dx = -p_x/p_z = (\rho l V / \rho g) = 0.00013 = (0.007^\circ)$
- Хотя оба угла очень малы, но
 - $\text{tg}\alpha / \text{tg}\beta = 28$
 - Т.е. если изобару изобразить под углом 1° к горизонтали, то фронт следует изобразить под углом 30° к горизонтали



Баротропность

- Если температура горизонтально однородна, то горизонтальный барический градиент зависит только от изменений плотности. Это легко доказать с помощью уравнения состояния



$$\nabla (p = R\rho T) \Rightarrow \nabla p = R\rho \nabla T + RT \nabla \rho = RT \nabla \rho$$

- В этом случае (реки) изобарические поверхности должны быть параллельны изостерическим (поверхностям постоянной плотности).
- Такое состояние является *баротропным*.
- В этом случае термический ветер **ОТСУТСТВУЕТ!**

Математическое выражение баротропности плоскопараллельного потока

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \rho(x, y) \\ p = p(x, y) \end{array} \right\} \Leftrightarrow p = p(\rho) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{dp}{d\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0$$

Если якобиан давления и плотности равен нулю, то поток баротропен

Бароклинность

- Если температура горизонтально НЕОДНОРОДНА, то горизонтальный барический градиент зависит от изменений плотности и температуры. Это легко доказать с помощью уравнения состояния



$$\nabla (p = R\rho T) \Rightarrow \nabla p = R\rho \nabla T + RT \nabla \rho$$

- В этом случае (атмосфера, океан) изобары поверхности не должны совпадать с изотермами по направлению (на одной и той же изобарической поверхности).
- Такое состояние является **бароклинным**.
- При нем термический ветер обязательно существует
- Это значит, что изменение вектора ветра с высотой является признаком **бароклинности** атмосферы.

Математическое выражение бароклинности плоскопараллельного потока

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \rho(x, y) \\ p = p(x, y) \end{array} \right\} \Rightarrow \rho = \rho(p, T) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$J(p, \rho) = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

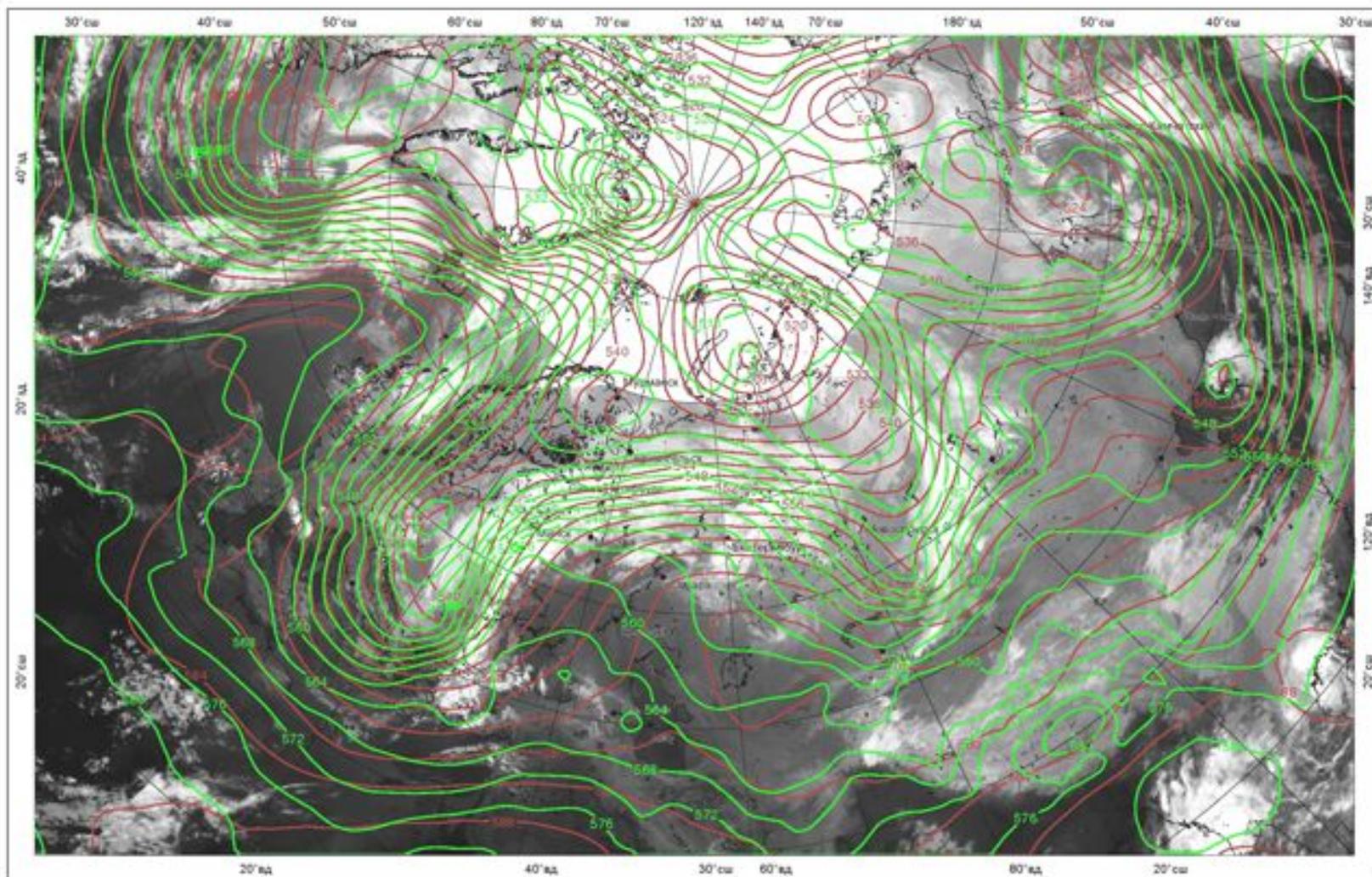
$$\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) +$$

$$+ \frac{\partial \rho}{\partial T} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Rightarrow \boxed{J(p, \rho) = \frac{\partial \rho}{\partial T} J(p, T)}$$

В атмосфере якобиан давления и плотности пропорционален якобиану давления и температуры. Если изобары и изотермы не параллельны, он не равен нулю, т.е. атмосфера бароклинна!



ГУ "НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР КОСМИЧЕСКОЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИИ "ПЛАНЕТА"



Монтаж изображений с геостационарных спутников GOES-E, METEOSAT-9,7, MTSAT-1R,

совмещенный с картой термобарического поля

ИК-диапазон 10,5-12,5 мкм

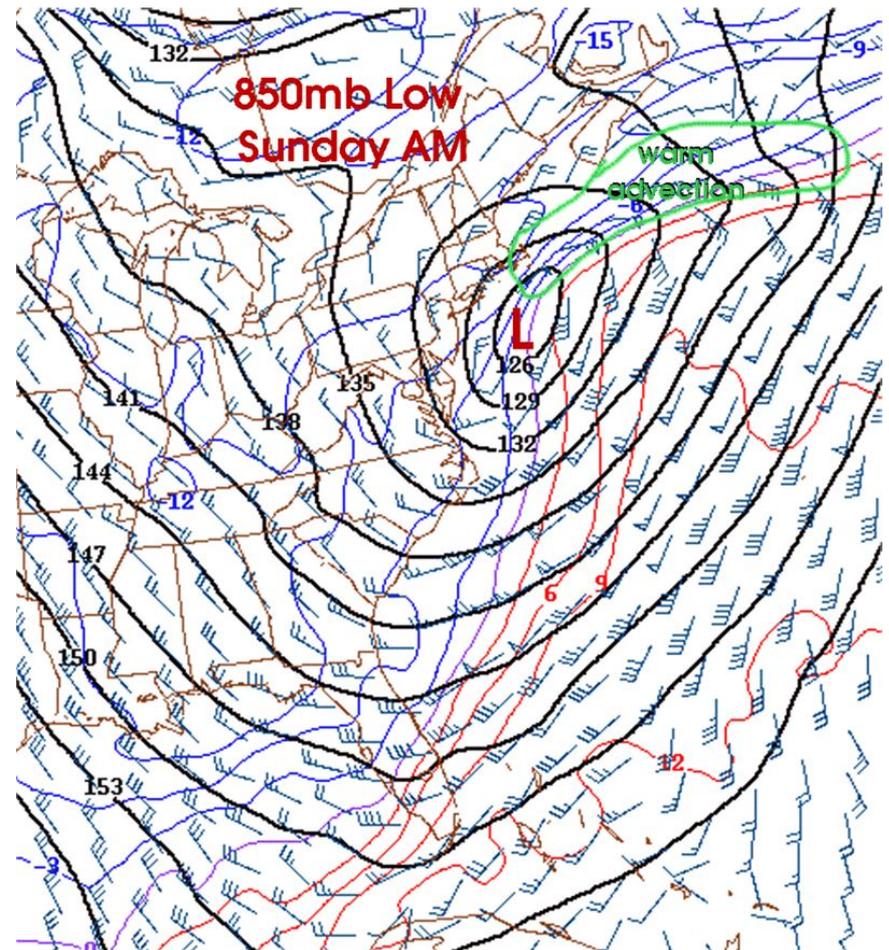
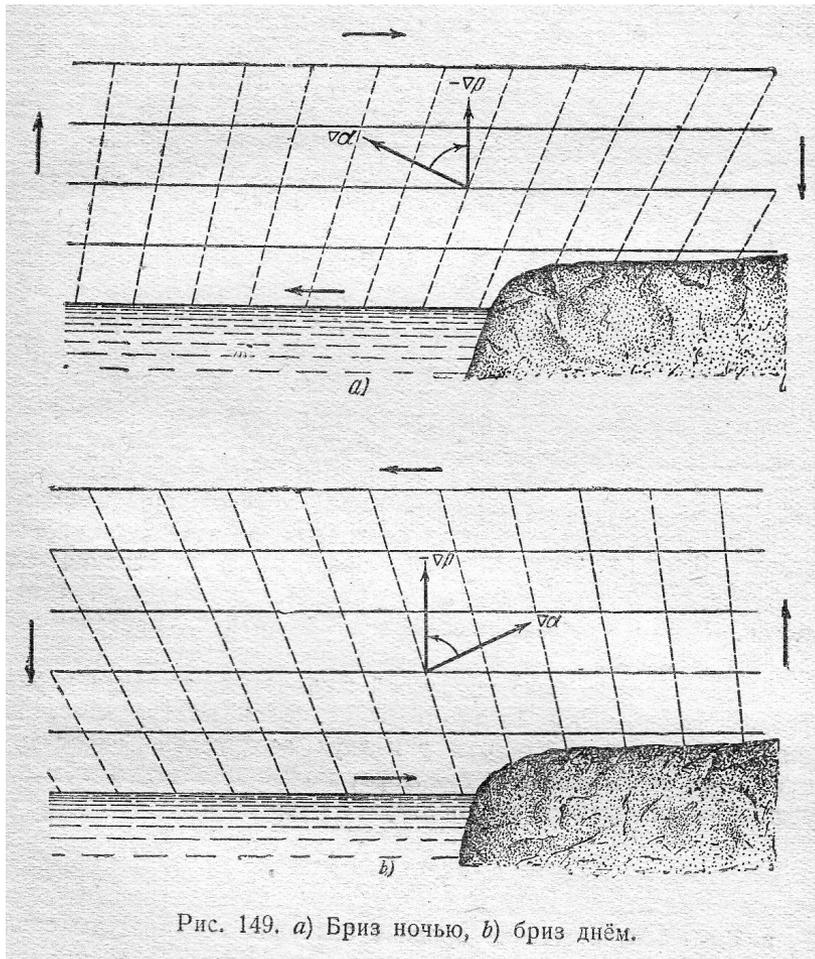
13.10.2009 18:00 СГВ

Условные обозначения

— AT₁₀₀₀
— OT₅₀₀

Масштаб
0 500 1000 км

В бароклинной атмосфере образуются изобаро-изостерические соленоиды



Адвекции температуры

$$\frac{dT}{dt} = \text{Уравнение переноса тепла ветром}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = A_T + C_T,$$

$$\text{где } A_T = - \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -\mathbf{U}_s \cdot \nabla T \quad C_T = -w \frac{\partial T}{\partial z}$$

- Величина A_T называется в метеорологии адвективным изменением температуры или *адвекцией* температуры
- Если $A_T > 0$, то воздух в выбранном пункте нагревается. В этом случае говорят об адвекции тепла.
- Если $A_T < 0$, то воздух в выбранном пункте охлаждается. В этом случае говорят об адвекции холода.

Геострофическая адвекция температуры выражается через поворот ветра с высотой

$$A_{Tg} = -\left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y}\right) = -\mathbf{U}_g \cdot \nabla T$$

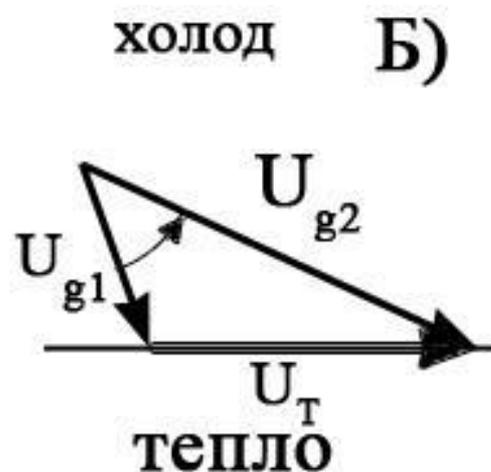
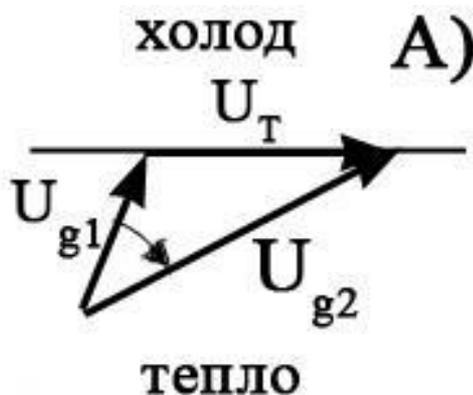
Если $\mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{U}_g}{dz} = \mathbf{k} \times \left(\mathbf{k} \times \left(\frac{g}{l \cdot T} \nabla T\right)\right) = -\frac{g}{l \cdot T} \nabla T$ и $\operatorname{tg} \alpha = v_g / u_g$

$$A_{Tg} = -\mathbf{U}_g \cdot \nabla T = \frac{l \cdot T}{g} \mathbf{U}_g \cdot \left(\mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{U}_g}{dz}\right) = \frac{l \cdot T}{g} \cdot \begin{vmatrix} u_g & v_g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{du_g}{dz} & \frac{dv_g}{dz} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{l \cdot T}{g} \cdot \left(u_g \frac{dv_g}{dz} - v_g \frac{du_g}{dz}\right) = -\frac{l \cdot T \cdot u_g^2}{g} \cdot \frac{d(v_g / u_g)}{dz} = -\frac{l \cdot T \cdot (U_g \cdot \cos \alpha)^2}{g} \cdot \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{dz}$$

$$\boxed{A_{Tg} = -\frac{l \cdot T \cdot U_g^2}{g} \cdot \frac{d\alpha}{dz}}$$

Геострофическая адвекция температуры



- При повороте геострофического ветра с высотой по часовой стрелке (положение А) происходит перенос более теплого воздуха в сторону более холодного (адвекция тепла),
- а при повороте геострофического ветра с высотой против часовой стрелке (положение Б) происходит перенос более холодного воздуха в сторону более теплого (адвекция холода).

Геострофическая адвекция температуры (а значит и термический ветер!) выражает бароклинность атмосферы



$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{RT} \right) = -\frac{1}{\rho T}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = l v_g, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -l u_g$$

$$J(p, \rho) = -\frac{1}{\rho T} J(p, T) = -\frac{1}{\rho T} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$J(p, \rho) = -\frac{l}{T} \left(u_g \frac{\partial T}{\partial y} + v_g \frac{\partial T}{\partial x} \right) = A_{Tg} = -\frac{l \cdot T \cdot U_g^2}{g} \cdot \frac{d\alpha}{dz}$$

Чем сильнее ветер меняет направление с высотой, тем сильнее бароклинность атмосферы



Геострофическая адвекция и спиральность геострофического потока (забежим вперед)

$$S = \mathbf{V} \cdot \text{rot} \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{V})$$

$$S = \mathbf{V} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{cases} u \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ 10 \cdot 10^{-2} & 10 \cdot 10^{-2} & 10^{-2} \cdot 10^{-5} \end{cases}$$

с углом наклона α к горизонту

$$S = v \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial z} = -|\mathbf{V}|^2 \frac{\partial \alpha}{\partial z}, \quad \text{где } \text{tg } \alpha = \frac{v}{u}$$

Спиральность ветра пропорциональна геострофической адвекции температуры

Память о войне:



- Возрастание α с высотой есть поворот ветра против часовой стрелки (влево), т.е. свидетельство адвекции холода.

Убывание α с высотой есть поворот ветра по часовой стрелки (вправо), т.е. свидетельство адвекции тепла.

