

Квазигеострофическая модель умеренных широт

Теорема Эртеля

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{(\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}) \cdot \nabla \theta}{\rho} \right] = 0$$

$\frac{(\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}) \cdot \nabla \theta}{\rho}$ инвариант частицы



При невязком адиабатическом движении бароклиной жидкости в каждой частице сохраняется потенциальный вихрь

Упрощение формулы потенциального вихря для движений синоптических масштабов

$$\frac{(\Omega + 2\omega) \cdot \nabla \theta}{\rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \left[(\Omega_x + 0) \frac{\partial \theta}{\partial x} + (\Omega_y + 2\omega_y) \frac{\partial \theta}{\partial y} + (\Omega_z + 2\omega_z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \approx$$

$$\approx \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(-\frac{\partial u}{\partial z} + 2\omega \cos \varphi \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2\omega \sin \varphi \right] \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\} \approx$$

$$\begin{array}{ccc} \cancel{10^{-3} \cdot 10^{-5}} & \cancel{10^{-3} \cdot 10^{-5}} & \boxed{10^{-4} \cdot 10^{-2}} \end{array}$$

$$\approx \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2\omega \sin \varphi \right] \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{\rho} (\zeta + f) \theta_z$$



Потенциальный вихрь в первую очередь отражает вращение воздуха в горизонтальной плоскости, т.е. вертикальную составляющую вихря

Квазигеострофический потенциальный вихрь

Разделим среднее состояние и малые отклонения:

$$\theta = \bar{\theta} + \theta'; \theta_z = \bar{\theta}_z + \theta'_z; \rho = \bar{\rho} + \rho'$$

Учитывая (см. предыдущие формулы), что $\bar{\theta}_z = N^2 \bar{\theta} / g$ и $\theta'_z = -\frac{\bar{\theta}_z}{\rho} \rho'_z$

$$\begin{aligned} \text{получим } \frac{1}{\rho} (\zeta + f) \theta_z &= \frac{(\zeta + f)}{\rho + \rho'} \cdot \bar{\theta}_z \cdot \left(1 + \frac{\theta'_z}{\bar{\theta}_z} \right) \approx \\ &\approx \frac{\bar{\theta}_z}{\rho} (\zeta + f) \left(1 - \frac{g}{N^2 \bar{\rho}} \rho'_z \right) \approx \frac{\bar{\theta}_z}{\rho} (\zeta + f) \left(1 + \frac{g}{N^2 \bar{\rho}} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{если учесть, что } f \gg \zeta, \text{ то } \frac{1}{\rho} (\zeta + f) \theta_z = \frac{\bar{\theta}_z}{\rho} \left(\zeta + f + \frac{g \cdot f}{N^2 \bar{\rho}} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right)$$

используя геострофические соотношения получим
квазигеострофический потенциальный вихрь

$$\left[\frac{1}{\rho} (\zeta + f) \theta_z \right]_g = \frac{\bar{\theta}_z}{\rho} \left(\frac{1}{\rho f} \nabla^2 p + \frac{g \cdot f}{N^2 \bar{\rho}} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + f \right)$$

Обозначение и расчетная формула потенциального вихря квазигеострофическом варианте

$$PV = \left[\frac{1}{\rho} (\zeta + f) \theta_z \right]_g =$$

$$= \frac{\overline{\theta_z}}{\overline{\rho}} \left(\frac{1}{\overline{\rho f}} \nabla^2 p + \frac{g \cdot f}{N^2 \overline{\rho}} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + f \right) =$$

в декартовых координатах

$$= \frac{1}{f} \nabla^2 \Phi + f + \frac{\partial f_0}{\partial p} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \quad \Phi = gH$$

в изобарических координатах



Уравнение сохранения для потенциального вихря!



$$PV = \frac{\zeta + f}{\rho} \cdot \frac{\delta\theta}{\delta z} = \text{const},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta + f}{\rho} \cdot \frac{\delta\theta}{\delta z} \right) = 0,$$

$$\frac{dPV}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial PV}{\partial t} + u \frac{\partial PV}{\partial x} + v \frac{\partial PV}{\partial y} = 0$$

Квазигеострофическая форма уравнения сохранения потенциального вихря

$$\frac{DPV}{Dt} = \text{или} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla \right) PV =$$

$$\text{или} \quad \frac{\partial PV}{\partial t} = -\frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial PV}{\partial x} + \frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial PV}{\partial y}$$

$$\text{иначе} \quad \frac{\partial PV}{\partial t} = \frac{g}{l} (H, PV),$$

где через $(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}$ обозначен якобиан

В курсе численных прогнозов погоды это уравнение
называется

бароклиной квазигеострофической моделью

Для любознательных: использованные свойства якобиана

Якобиан одной и той же функции равен нулю

$$(f, f) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Якобиан суммы равен сумме якобианов

$$(f, \varphi + \psi) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi + \psi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi + \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = (f, \varphi) + (f, \psi)$$

Дифференцирование якобиана

$$(f, \varphi)'_s = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)'_s = \frac{\partial f'_s}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi'_s}{\partial y} - \frac{\partial f'_s}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi'_s}{\partial x} = (f'_s, \varphi) + (f, \varphi'_s)$$

Другой подход

Вывод бароклиной
квазигеострофической модели
как второе приближения к
точному решению

Второе приближение: система уравнений агеострофического движения атмосферы

$$\frac{d\mathbf{U}_s}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \mathbf{k} \times l\mathbf{U}_s = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_s + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$p = \rho \cdot R \cdot T$$

$$C_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0$$

Формы записи адвекции

Полное описание ускорения

$$\frac{dU_s}{dt} = \frac{\partial U_s}{\partial t} + u \frac{\partial U_s}{\partial x} + v \frac{\partial U_s}{\partial y} + w \frac{\partial U_s}{\partial z} = \frac{\partial U_s}{\partial t} + (U_s \cdot \nabla) \cdot U_s + w \frac{\partial U_s}{\partial z}$$

Оператор адвекции

$$\frac{dF}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (U_s \cdot \nabla) + w \frac{\partial_s}{\partial z} \right) F \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (U_s \cdot \nabla) + w \frac{\partial_s}{\partial z} \right)}$$

Геострофическая адвекция

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u_g \frac{\partial F}{\partial x} + v_g \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial t} + (U_g \cdot \nabla) \cdot F \Rightarrow \boxed{\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (U_g \cdot \nabla) \right)}$$

Во втором приближении адвекция происходит по горизонтали со скоростью геострофического ветра

Квазигеострофическая система уравнений – второе приближение описания атмосферы

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{k} \times l \mathbf{U}_g = 0$$

$$\frac{d\mathbf{U}_g}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{k} \times l \mathbf{U}_s = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_s + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$p = \rho \cdot R \cdot T$$

$$C_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0$$



$$\mathbf{U}_g = \mathbf{k} \times \frac{1}{l\rho} \nabla p$$

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{k} \times \frac{1}{l} \frac{D\mathbf{U}_g}{Dt}$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\nabla \cdot \mathbf{U}_s$$

$$p = \rho \cdot R \cdot T$$

$$C_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0$$

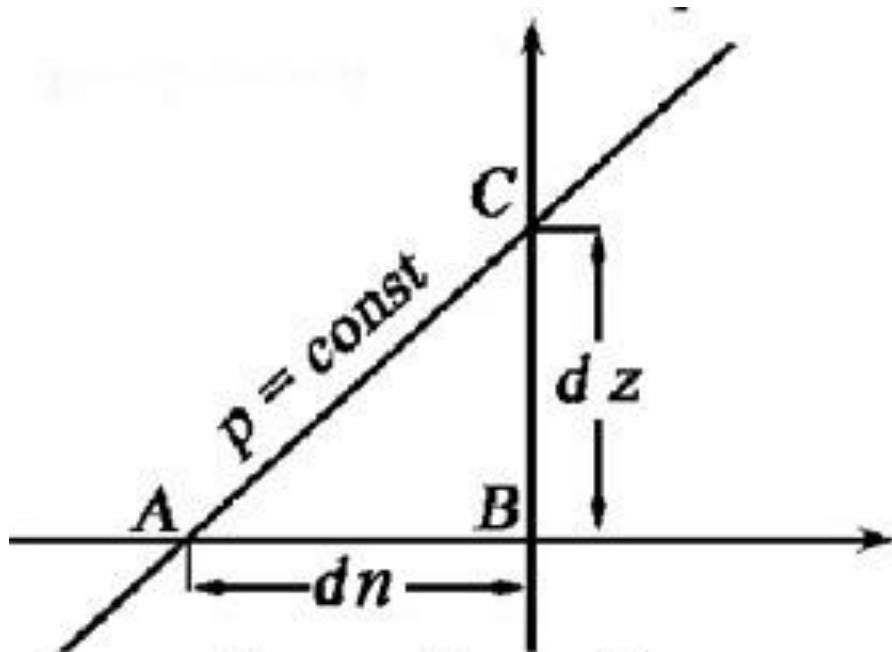
Замена ветра в адвекции на \mathbf{V}_g

Переход к потенциальной температуре в адиабатическом уравнении притока тепла

$$\begin{aligned} C_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} &= 0 \Rightarrow C_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \frac{dp}{dt} = 0 \\ \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R}{C_p p} \frac{dp}{dt} &= \frac{d \ln(T)}{dt} - \frac{R}{C_p} \frac{d \ln(p)}{dt} = \\ &= \frac{d \ln(T)}{dt} - \frac{d \ln(p^{\frac{R}{C_p}})}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\ln \left(\frac{T}{p^{\frac{R}{C_p}}} \right) \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\ln \left(\frac{T}{T_0} \cdot \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{C_p}} \right) \right] = \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{\theta}{T_0} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} = 0} \end{aligned}$$

Изобарическая система координат

Переход к изобарической системе координат



$$0 = dp = \frac{\partial p}{\partial n} dn + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \frac{\partial p}{\partial n} dn - \rho g dz$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = g \frac{\partial z}{\partial n}$$

$$U_g = k \times \left(\frac{1}{\rho l} \nabla p \right)$$

$$\frac{1}{\rho l} \nabla p = \frac{1}{\rho l} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} \right) =$$

$$= \frac{1}{l} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} \right) = \frac{1}{l} \nabla z$$

$$U_g = k \times \left(\frac{1}{l} \nabla z \right)$$

Высота изобарической поверхности $p = \text{const}$ – теперь стала функцией : $z(t, x, y, p)$

Квазигеострофическая система уравнений в изобарических координатах

$$\mathbf{U}_g = \mathbf{k} \times \frac{g}{l} \nabla H$$

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{k} \times \frac{1}{l} \frac{D\mathbf{U}_g}{Dt}$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = -g \Rightarrow \frac{p}{RT} \frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{1}{g} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{RT}{gp}}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = -\nabla \cdot \mathbf{U}_s, \quad \omega = \frac{dp}{dt}$$

$$p = \rho RT \Rightarrow \rho = \frac{p_0}{R\theta} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p} - 1}$$

$$\frac{D\theta}{Dt} + \omega \frac{\partial \theta}{\partial p} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{D\theta}{Dt} + \Gamma \omega = 0}, \quad \Gamma = \overline{\frac{\partial \theta}{\partial p}}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{U}_g \nabla) = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}$$

Уравнения динамики атмосферы в изобарической системе координат

Уравнение импульса $\boxed{\frac{D\mathbf{V}}{Dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} = -\nabla\Phi}$, где $\Phi = gH$ – геопотенциал

Уравнение статики $\boxed{\frac{\partial\Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}}$

Уравнение неразрывности $\nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial\omega}{\partial p} = 0$, где $\left(\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

Уравнение притока тепла $\boxed{\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \right] T - S_p \omega = \frac{Q}{C_p}}$,

где $S_p = -\frac{T}{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial p}$ – параметр устойчивости (иногда обо значают σ),

а $\frac{Q}{C_p}$ - приток тепла (в адиабатическом приближении равен нулю)

Напоминка: умей объяснить, как получить вертикальный градиент потенциальной температуры

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} \quad \text{причем} \quad R/c_p = \frac{287}{1005} \approx 0,286$$

$$\ln(\theta) = \ln(T) + R/c_p \ln(p_0) - R/c_p \ln(p) +$$

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} - R/c_p \cdot \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} + \frac{R}{c_p} \cdot \frac{\rho g}{\rho R T}$$

$$\boxed{\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dz} = \frac{(\gamma_a - \gamma)}{T}} = \frac{N^2}{g} \Rightarrow \boxed{\theta_z = -\frac{\theta N^2}{g}}$$

ПОМНИТЬ, ЧТО $\gamma_a = \frac{g}{c_p}$ и $g \frac{(\gamma_a - \gamma)}{T} = N^2$, $N \approx 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ — частота Брента-Вяйсяля

Вывод уравнение вихря в квазигеострофическом приближении

Уравнение движения $\frac{dU_s}{dt} = -\nabla\Phi - k \times lU_s$

$$\boxed{\frac{dU_s}{dt} = k \times lU_g - k \times lU_s = -k \times lU_a}, \quad U_a = U_s - U_g$$

$$k \times \left(\frac{dU_s}{dt} = -k \times lU_a \right) \Rightarrow \boxed{lU_a = k \times \frac{dU_s}{dt}}$$

преобразование уравнения неразрывности:

$$-\frac{\partial\omega}{\partial p} = \nabla \cdot U_s = \nabla \cdot (U_g + U_a) = \nabla \cdot U_a = \nabla \cdot \left[\frac{1}{l} k \times \left(\frac{dU_s}{dt} \right) \right]$$

суть квазигеострофического приближения:

$$\boxed{-\frac{\partial\omega}{\partial p} = \nabla \cdot \left[\frac{1}{l} k \times \left(\frac{D_g U_g}{Dt} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{l} \frac{D_g v_g}{Dt} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{l} \frac{D_g u_g}{Dt} \right) = \frac{1}{(1 + \Omega_g)} \frac{D_g \Omega_g}{Dt}}$$

$$\Omega_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{1}{l} \nabla^2 \Phi$$

Важная
детали-
зация:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{l} \frac{D_g v_g}{Dt} \right) = -\frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) = \\
 & = -\frac{1}{l} \left\{ \left[\frac{\partial (v_g)_x}{\partial t} + u_g \frac{\partial (v_g)_x}{\partial x} + v_g \frac{\partial (v_g)_x}{\partial y} \right] + \left[(u_g)_x (v_g)_x \right] + \left[(v_g)_x (v_g)_y \right] \right\} \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{l} \frac{D_g u_g}{Dt} \right) = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) = \\
 & = \frac{1}{l} \left\{ \left[\frac{\partial (u_g)_y}{\partial t} + u_g \frac{\partial (u_g)_y}{\partial x} + v_g \frac{\partial (u_g)_y}{\partial y} \right] + \left[(u_g)_y (u_g)_x \right] + \left[(v_g)_x (u_g)_y \right] \right\} \\
 & \quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{l} \frac{D_g v_g}{Dt} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{l} \frac{D_g u_g}{Dt} \right) = \\
 & = -\frac{1}{l} \left[\frac{\partial \left[(v_g)_x - (u_g)_y \right]}{\partial t} + u_g \frac{\partial \left[(v_g)_x - (u_g)_y \right]}{\partial x} + v_g \frac{\partial \left[(v_g)_x - (u_g)_y \right]}{\partial y} \right] + \\
 & \quad - \left[(u_g)_x \left[(v_g)_x - (u_g)_y \right] + (v_g)_y \left[(v_g)_x - (u_g)_y \right] \right] = \\
 & = \frac{D_g \Omega_g}{Dt} + \cancel{\left[(u_g)_x + (v_g)_y \right]} \left[(v_g)_x - (u_g)_y \right] = \frac{D_g \Omega_g}{Dt}
 \end{aligned}$$

Исключаем вертикальную скорость из уравнений вихря и притока тепла

Уравнение неразрывности (вихря)

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial p} = -\frac{1}{(l + \Omega_g)} \frac{D_g \Omega_g}{Dt} \cong -\frac{1}{l^2} \frac{D_g \nabla^2 \Phi}{Dt}}, \quad \left(\Omega_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{1}{l} \nabla^2 \Phi \right)$$

Уравнение притока тепла

$$\boxed{S_p^\omega = \frac{D_g T}{Dt} = \frac{p}{R} \frac{D_g}{Dt} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)}, \quad \left(T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)$$

Оператор переноса через якобиан

$$\frac{D_g ?}{Dt} = \frac{\partial ?}{\partial t} + v_g \frac{\partial ?}{\partial y} + u_g \frac{\partial ?}{\partial x} = \frac{\partial ?}{\partial t} + \frac{1}{l} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial ?}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial ?}{\partial x} \right) = \frac{\partial ?}{\partial t} + \frac{1}{l} J(\Phi, ?)$$

Вывод уравнения тенденции геопотенциала

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla(\zeta_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) = -\vec{V}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + \sigma \omega,$$

$$\nabla^2 \chi = -f_0 \vec{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi + f \right) + f_0^2 \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial p} = -\vec{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) - \sigma \omega.$$

$$\chi = \partial \phi / \partial t$$

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \chi = -f_0 \vec{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi + f \right) - \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\vec{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right)$$

Уравнение тенденции – это и есть уравнение переноса потенциального вихря в квазигеострофическом приближении

Учитывая, что
$$\frac{Rf_0^2}{p\sigma} \left[-\frac{\partial}{\partial p} (-\vec{V}_g \cdot \nabla T) \right] = \frac{Rf_0^2}{p\sigma} \left[\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial p} \cdot \nabla T - \vec{V}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial T}{\partial p} \right) \right]$$

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial p} \cdot \nabla T \quad \text{Доказать, что это рано нулю!}$$

Уравнение тенденции примет вид:

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \chi = -f_0 \vec{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi + f \right) - \frac{Rf_0^2}{p\sigma} \left(-\vec{V}_g \cdot \nabla \frac{\partial T}{\partial p} \right)$$

$$T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \phi}{\partial p}$$

А с учетом уравнения статики можно получить

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \chi = -f_0 \vec{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi + f \right) - \frac{f_0^2}{\sigma} \left(\vec{V}_g \cdot \nabla \frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} \right)$$

Три основных формы квазигеострофического приближения

- I. Уравнение тенденции
- II. Уравнение переноса
квазигеострофического
потенциального вихря
- III. Уравнение для диагноза
вертикальной скорости (оно же омега-
уравнение)

Три важных случая использования бароклининой модели

- Баротропная модель или уравнение среднего уровня (Россби)
- Трехмерное решение (Чарни) для задачи стратосферных потеплений
- Синоптические применения

Вклад адвекции вихря в изменении тенденции

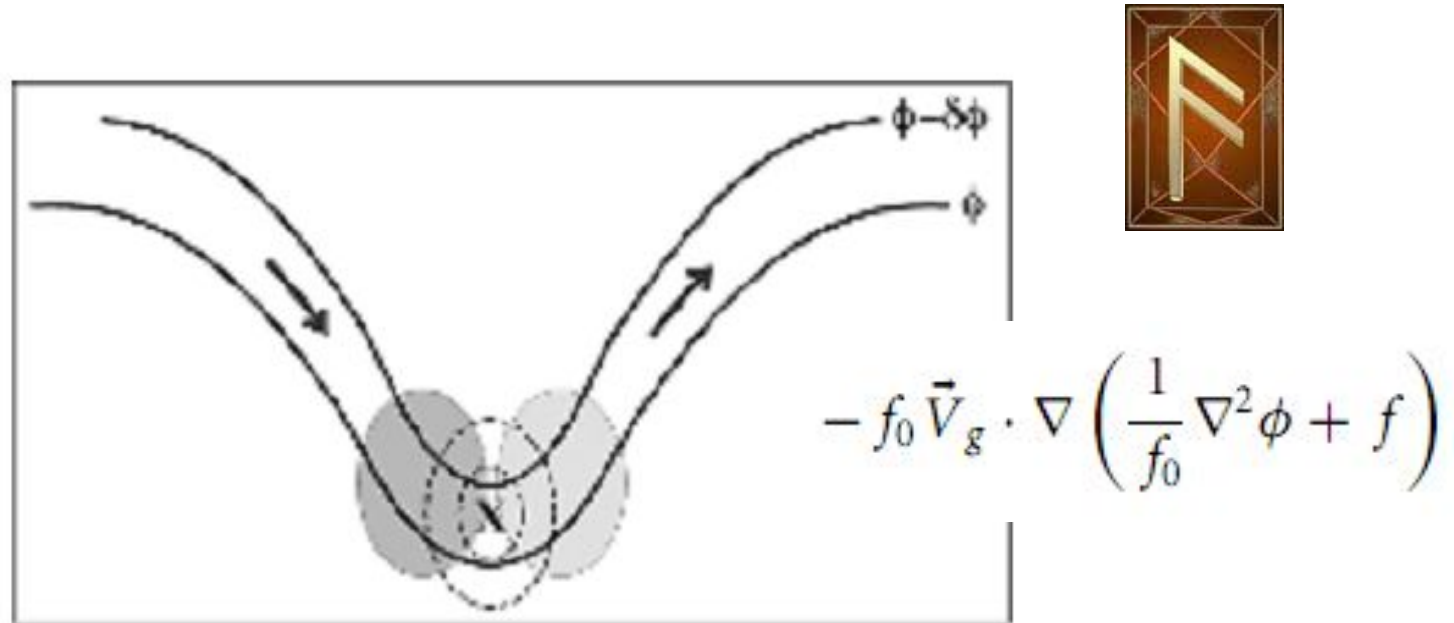
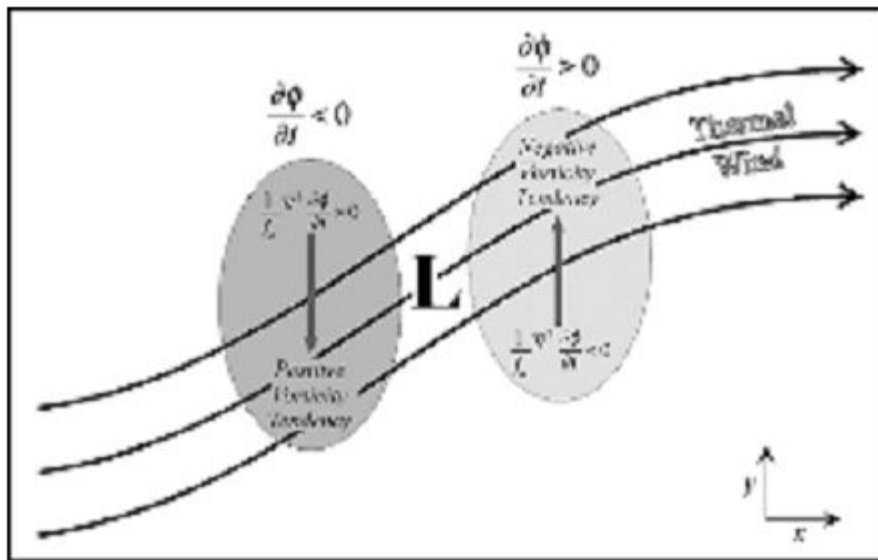


Figure 8.8 Upper tropospheric trough in the northern hemisphere. Thick black lines are isopleths of geopotential. Gray arrows are geostrophic wind vectors and the dashed lines are contours of cyclonic vorticity with the 'X' indicating the vorticity maximum. Light (dark) shading represents region of positive (negative) vorticity advection

Вклад в изменении тенденции изменения адвекции температуры с высотой



$$-\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{V}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right]$$

То же самое, что

$$\frac{Rf_0^2}{p\sigma} \left[-\frac{\partial}{\partial p} (-\vec{V}_g \cdot \nabla T) \right]$$

Figure 8.9 The effect of horizontal temperature advection on geopotential tendency. Solid black arrows are streamlines of the lower tropospheric thermal wind. Surface low-pressure center is indicated with 'L' and the gray arrows represent the lower tropospheric winds associated with the storm. Light (dark) shaded region identifies an area where warm (cold) air advection decreases with height leading to height rises (falls) and a negative (positive) vorticity tendency

Если геострофическая адвекция температуры возрастает (убывает) с высотой, то высота изобарической поверхности уменьшается (растет)

Омега-уравнение для вертикальной скорости

Для исключения производной $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$:

$$\frac{\partial}{\partial p} \cdot \left| l^2 \frac{\partial \omega}{\partial p} = -\frac{D_g \nabla^2 \Phi}{Dt} \text{ от уравнения } \left(\frac{\partial}{\partial p} \right. \right. \text{ вихря) } \right.$$

$$\nabla^2 \cdot \left| S_p \omega = \frac{p}{R} \frac{D_g}{Dt} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \text{ от уравнение притока тепла) } \right.$$

Складываем и преобразуем правую часть

$$\sigma \nabla^2 \omega + l^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = l \left[\left(\frac{\partial V}{\partial p} \cdot \nabla \Omega_g \right) - \nabla^2 \left(V \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]$$

Доказуемое упрощение правой части

$$l \left[\left(\frac{\partial V}{\partial p} \cdot \nabla \Omega_g \right) - \nabla^2 \left(V \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] \cong 2l \left(\frac{\partial V}{\partial p} \cdot \nabla \Omega_g \right)$$

Интерпретация ω -уравнения

$$\sigma \nabla^2 \omega + l^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = 2l \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} \cdot \nabla \Omega_g \right)$$

На примере частного решения вида:

$$\omega(x, y, p) = W_0 \sin\left(\frac{\pi p}{p_0}\right) \sin(kx) \sin(my)$$

Понятно, что левая часть пропорциональна ω

$$\left(\nabla^2 + \frac{l^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega \cong - \left[k^2 + m^2 + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{l\pi}{p_0} \right)^2 \right] \omega$$

Тогда ω -уравнение показывает, что

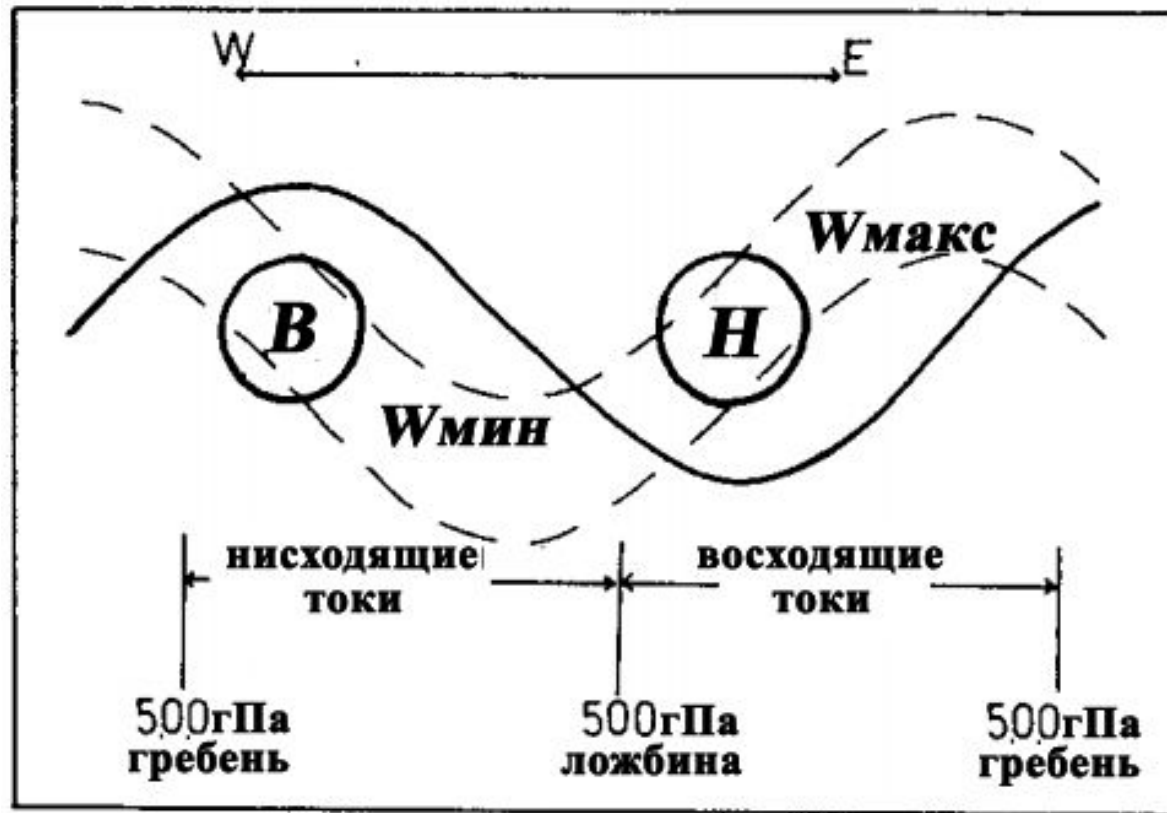
$$\omega \propto -2l \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} \cdot \nabla \Omega_g \right)$$

$$w \propto -l \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} \cdot \nabla \Omega_g \right)$$



**Это значит, что
вертикальные
скорости
создаются за счет
адвекции вихря
термическим
ветром**

Запомнить районы расположения значительных вертикальных скоростей за счет адвекции вихря термическим ветром



Сплошные – изогипсы АТ1000. Пунктир – изогипсы ОТ500/1000.

Отмечены положения приземных центров и областей максимальных ($W_{\text{макс}}$) восходящих и нисходящих ($W_{\text{мин}}$) токов.

Принципиальная схема развития циклона умеренных широт

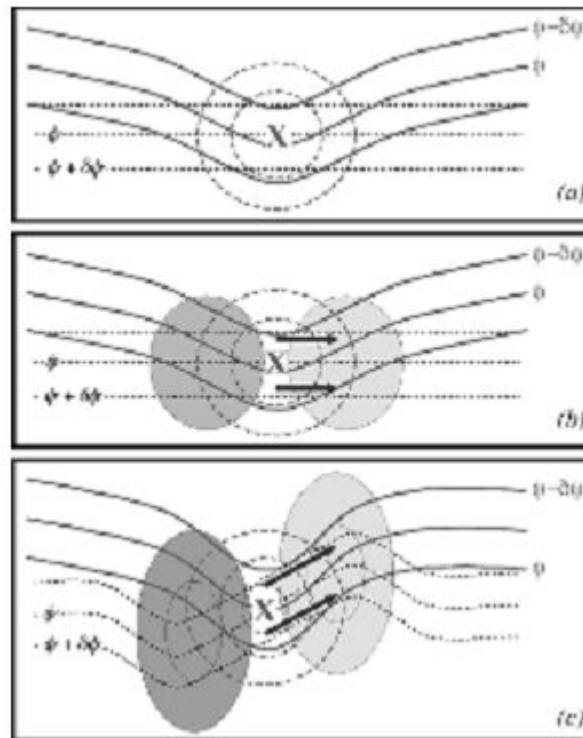
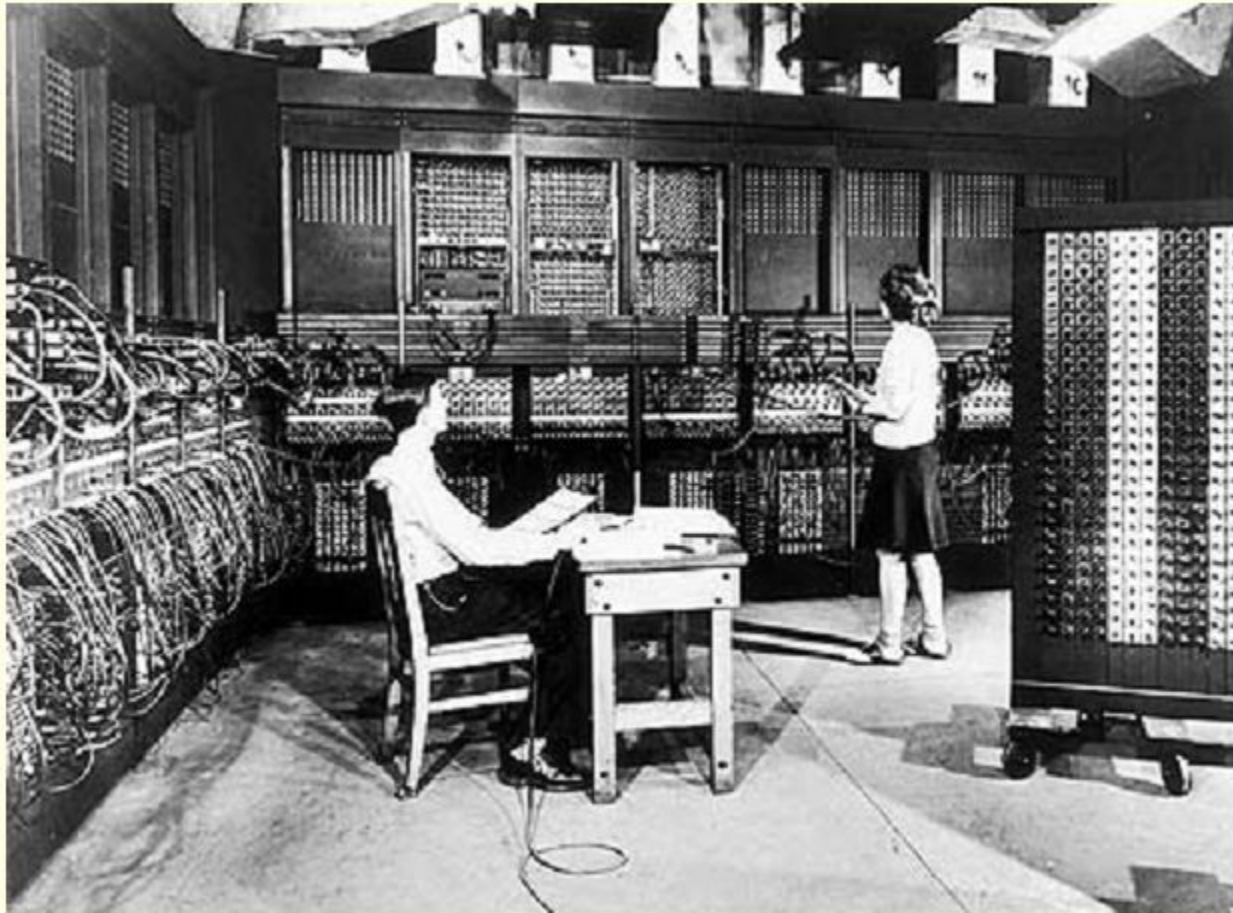


Figure 8.10 Initial thermal and mass field adjustments to cyclogenesis. (a) Upper tropospheric vorticity maxima in a zonal thermal wind. Gray solid lines are 500 hPa geopotential heights, gray dashed lines are 500 hPa geostrophic absolute vorticity, and the black dashed lines are 1000–500 hPa thickness isopleths. 'X' marks the location of the maximum absolute vorticity. (b) As for (a) with the gray arrows representing the \bar{Q}_{TR} vectors. Light (dark) shaded area is a region of upward (downward) vertical motion and upper tropospheric divergence (convergence). (c) As for (b) but for a subsequent time in the cyclone's development. Note the development of the thermal ridge downstream of the upper trough axis and the thermal trough upstream of it. Larger \bar{Q}_{TR} vectors and greater vertical motions are the result of intensification of the 500 hPa trough–ridge couplet

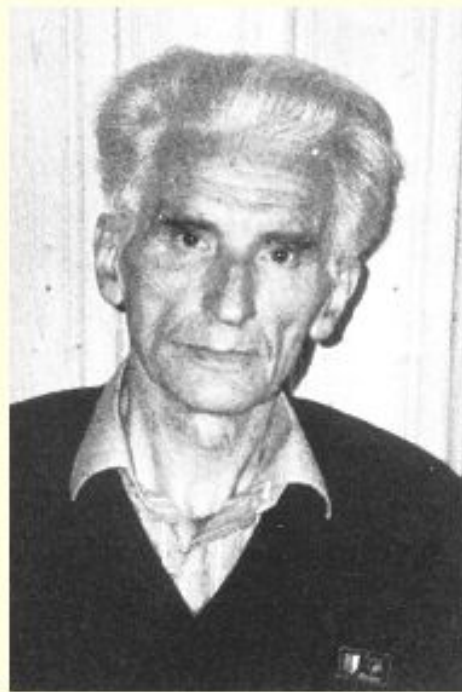
ENIAC



Отцы-основатели у них



Юлиус Чарни



Рагнар Фьортофт



Джон фон Нейман

Первые советские ЭВМ



**Сергей
Александрович
Лебедев**



Первая в СССР мощная ЭВМ БЭСМ-1

Отцы-основатели у нас



Николай Иванович Булеев
Гурий Иванович Марчук



Илья Афанасьевич Кибель