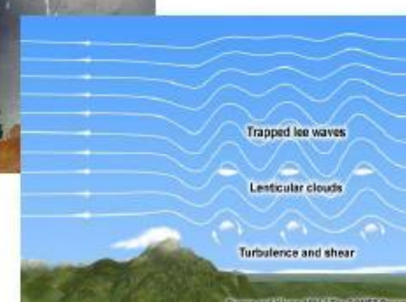
Волны в атмосфере

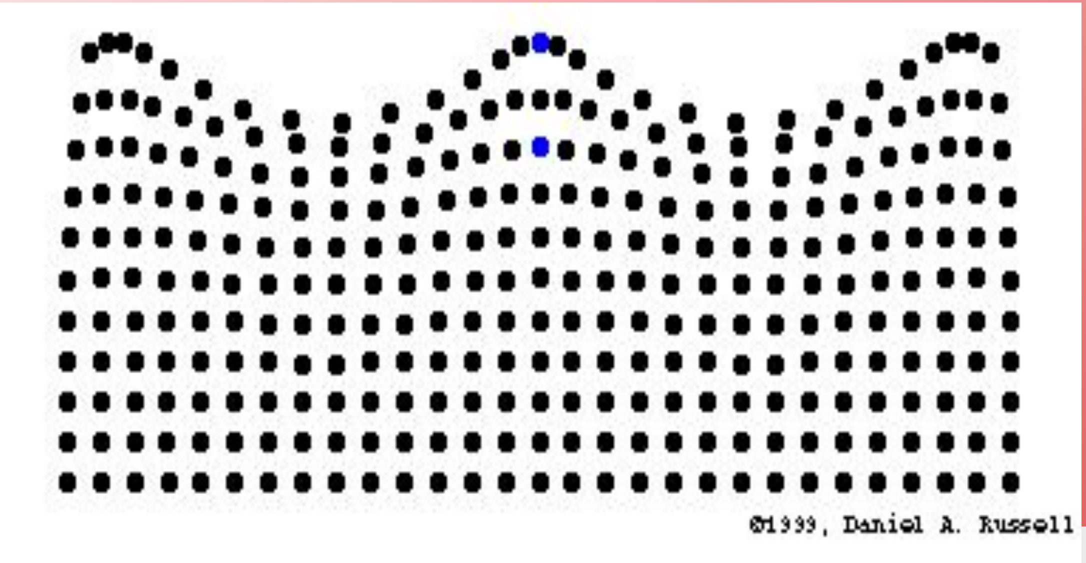
Типы атмосферных волн в зависимости от природы возвращающей силы (фактора)

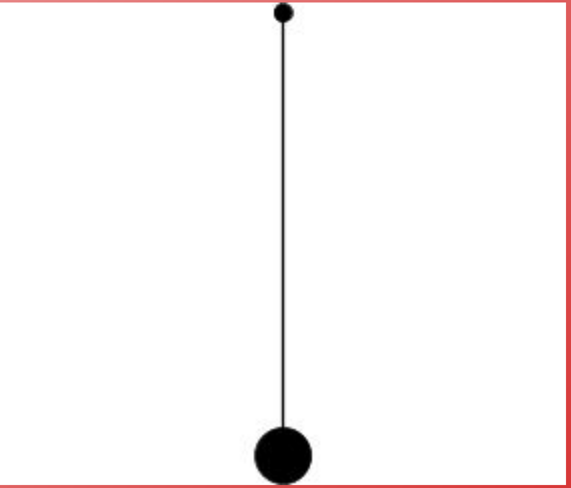
- Звуковые-сжимаемость (температура)
- Гравитационные — пловучесть (стратификации плотности)
- Инерционные – сила Кориолиса (угловая скорость земли)
- Волны Россби – изменение силы Кориолиса с широтой (радиус Земли)

По природе образования- звуковые, ударные, гравитационные (поверхностные и внутренние)



Напоминалка из физики:
Чем волны отличаются от колебаний? – Связями между частицами!





$$z(t,x) = A\sin(\omega t - kx + \varphi) \qquad x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

комплексная форма с частотой и волновым числом

$$z(t,x) = \mathrm{Im}\left[A\exp(i\left(kx - \omega t + \varphi\right)\right] \qquad x(t) = \mathrm{Re}\left\{ Ae^{i(\omega t+\varphi)} \right\}$$

Для нас волны – это частные решения уравнений динамики атмосферы

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-l\cdot v+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+l\cdot u+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}+g\rho=0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

Для упрощения анализа используют приближение политропности атмосферы:

$$\left.\begin{aligned}\frac{p}{p_0}&=\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma}}\\ \frac{p}{p_0}&=\frac{\rho T}{\rho_0 T_0}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}\frac{p}{p_0}&=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\kappa}\\ \kappa&=g\big/(g-R\gamma)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}=\frac{\kappa}{\rho}\frac{d\rho}{dt}}$$

Линеаризация – основной прием получения волновых уравнений

Разложение переменных
На основное состояние и
Малое возмущение

$$u = \bar{u} + u', \quad \rho = \bar{\rho} + \rho', \quad p = \bar{p} + p',$$

$$\text{причем} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial s} = 0 \quad \text{при} \quad s = t, x$$

$$\text{и} \quad |u'| << |\bar{u}|, |p'| << |\bar{p}|, |\rho'| << |\bar{\rho}|$$

Смысл линеаризации:

$$(100+1)\cdot(333+2) \cong 100\cdot 333 + 100\cdot 2 + 333\cdot 1 + \cancel{1\cdot 2}$$

$$(\bar{u} + u')\cdot(\bar{p} + p') \cong \bar{u}\cdot\bar{p} + \bar{u}\cdot p' + \bar{p}u' + \cancel{u'p'}$$

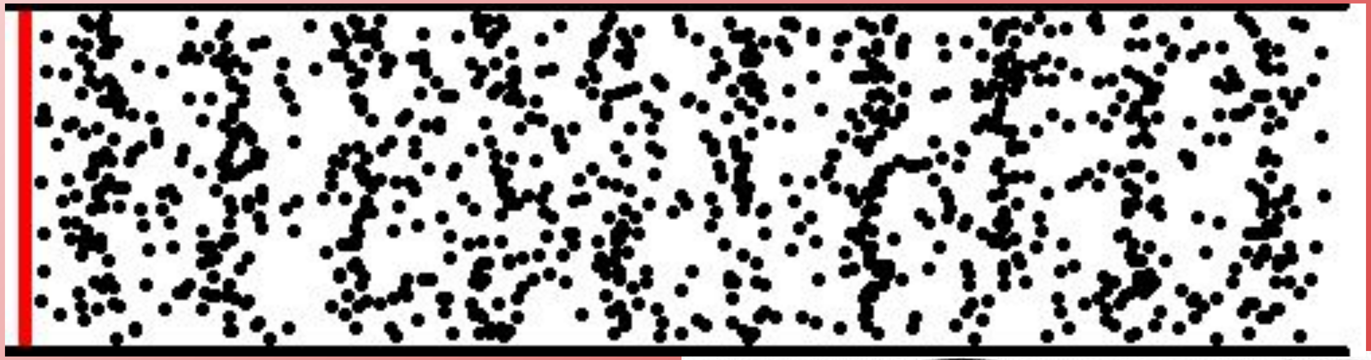
Пример применения:

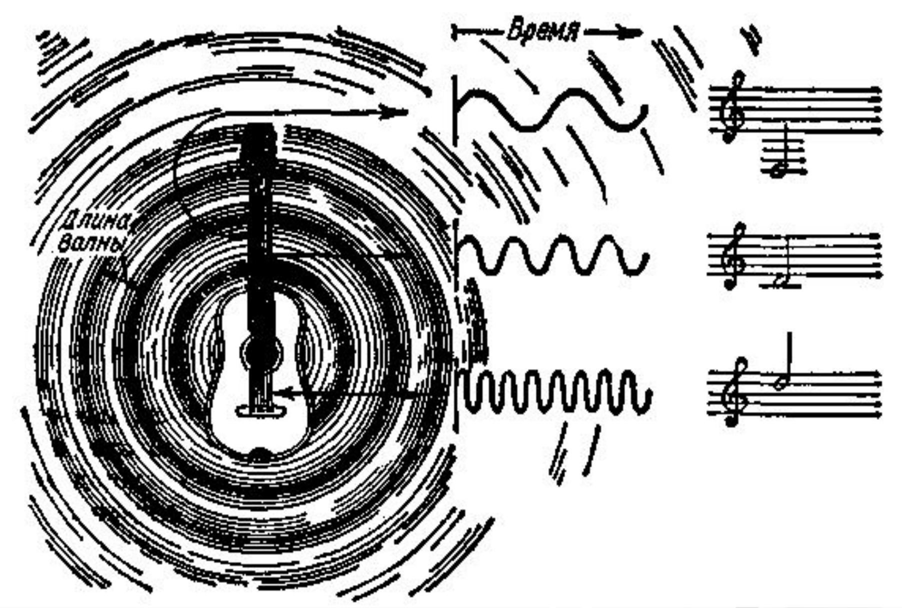
$$\boxed{u\frac{\partial p}{\partial x} = (\bar{u} + u')\frac{\partial \bar{p} + p'}{\partial x} = \underbrace{\bar{u}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}}_{=0} + u'\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{u}\frac{\partial p'}{\partial x} + \cancel{u'\frac{\partial p'}{\partial x}}}$$

Методика анализа волновых явлений

1. Вывести модель волнового процесса
2. Выбрать вид решения (уравнение элементарной волны)
3. Подставить (2) в (1) и получить дисперсионное соотношение
4. Решить (3) и получить формулу фазовой скорости
5. Выяснить есть ли дисперсия у среды распространения волн (зависит ли фазовая скорость от волнового числа)
6. Вычислить групповую скорость

Звуковая волна - упругая продольная волна, представляющая собой зоны сжатия и разряжения упругой среды (воздуха), передающаяся на расстояние с течением времени.





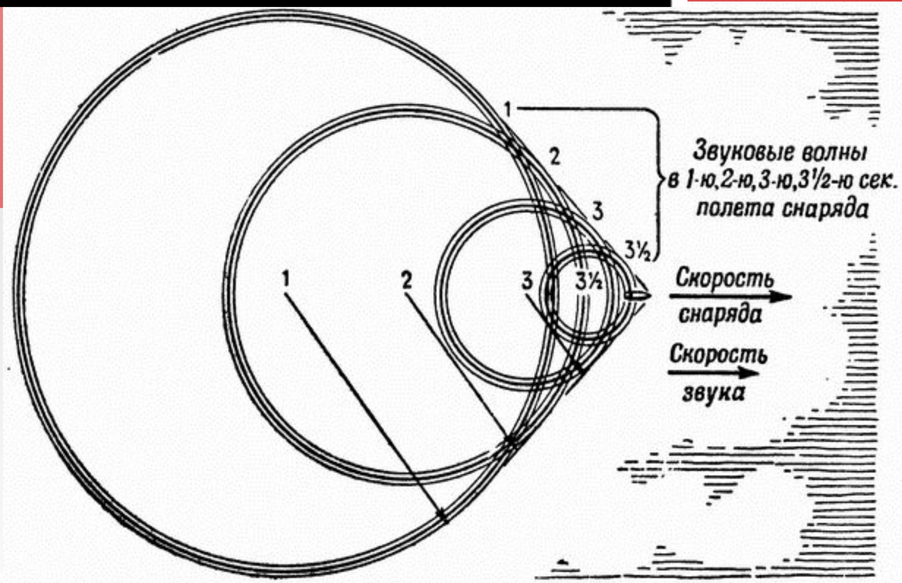


Рис. 142. Распространение звуковых волн, порожденных в воздухе снарядом, двигающимся быстрее звука

Звуковые волны – продольные.
При их анализе можно полагать, что все переменные зависят только от t и одной координаты -x

Исходная система:
$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+\kappa\, p\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

Линеаризация:
$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \bar{u}+u'}{\partial t}+\left(\bar{u}+u'\right)\frac{\partial \bar{u}+u'}{\partial x}+\frac{1}{\bar{\rho}+\rho'}\cdot\frac{\partial \bar{p}+p'}{\partial x}=0\\&\frac{\partial \bar{p}+p'}{\partial t}+\left(\bar{u}+u'\right)\frac{\partial \bar{p}+p'}{\partial x}+\kappa\left(\bar{p}+p'\right)\frac{\partial \bar{u}+u'}{\partial x}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}&\frac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial p'}{\partial x}=0\\&\frac{\partial p'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial p'}{\partial x}+\kappa\,\bar{p}\frac{\partial u'}{\partial x}=0\end{aligned}$$

Приведение к виду волнового уравнения:
$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'+\frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial p'}{\partial x}=0\\&\kappa\,\bar{p}\frac{\partial u'}{\partial x}+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)p'=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'=-\frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial p'}{\partial x}=0\\&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)p'=-\kappa\,\bar{p}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)p'=\frac{\kappa\,\bar{p}}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}}$$

Порядок решения волнового уравнения (на примере звуковых волн):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)p' = \frac{\kappa\bar{p}}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}$$ ищем решение в виде волны $$\boxed{p'(x,t)=Ae^{i\alpha(x-ct)}}$$

$$\frac{\partial p'(x,t)}{\partial x} = i\alpha\, p'(x,t) \qquad \frac{\partial^2 p'(x,t)}{\partial x^2} = (i\alpha)^2\, p'(x,t) = -\alpha^2 p'$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -i\alpha\, p' \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)p' = i\alpha\left(\bar{u}-c\right)p'$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)p' = \left[i\alpha\left(\bar{u}-c\right)\right]^2 p'\left(=-\alpha^2\left(\bar{u}-c\right)^2 p'\right)$$

подставив в исходное, получим $\cancel{-\alpha^2}\left(\bar{u}-c\right)^2 p' = \cancel{-\alpha^2}\left(\frac{\kappa\bar{p}}{\bar{\rho}}\right)p'$

видно, что выбранное выражение будет частные решением уравнения при

откуда $\boxed{c=\bar{u}\pm\sqrt{\kappa\,\bar{p}/\bar{\rho}}=\bar{u}\pm\sqrt{\kappa R\bar{T}}}$, где $\kappa = g/(g-R\gamma)$

Полученное ограничение на параметр С называется "ДИСПЕРСИОННЫМ СООТНОШЕНИЕМ"

Описать волну – это найти дисперсионное соотношение ее параметров в данном процессе

Внимание!
Дисперсионное соотношение имеет такой смысл:

Если оно выполняется, то выбранное выражение для решения, действительно является частным решением анализируемого волнового уравнения

То есть:

выбранное выражение $p'(x,t) = Ae^{i\alpha(x-ct)}$

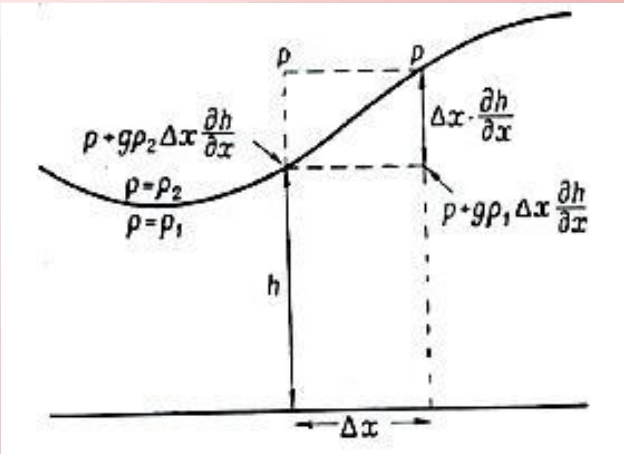
будет частныс решением уравнения $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)p' = \frac{\kappa\bar{p}}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}$

если параметр С будет таким $c = \bar{u} \pm \sqrt{\kappa \bar{p}/\bar{\rho}} = \bar{u} \pm \sqrt{\kappa R\bar{T}}$, где $\kappa = g/(g - R\gamma)$

Получение дисперсионного соотношения – главная задача при нахождении волновых решений, т.к. оно показывает при каких соотношениях между параметрами задачи возможны волны!

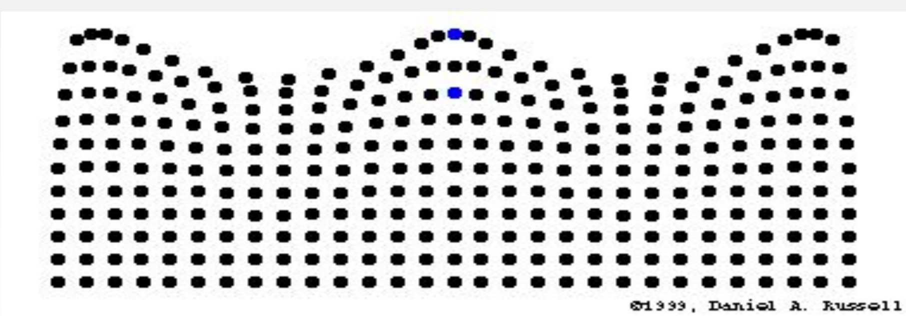
- ***Звуковые волны делятся:***
  - **слышимый звук - от - 20 Гц (17 м) - до 20 000 Гц (17 мм);**
  - **инфразвук ниже 20 Гц;**
  - **ультразвук выше 20 000 Гц.**
- ***Скорость звука зависит от упругих свойств среды и от температуры, например:***
- ***в воздухе V = 331 м/с (при t=0оС) и V= 3317 м/с (при t=10 С);***
- ***в воде V = 1400 м/с: в стали V=5000 м/с.***
- ***Звук, издаваемый гармонически колеблющимся телом, называется музыкальным тоном.***
- ***Не путай высоту, т. е. тон звука, с силой его. Высота звука зависит не от амплитуды, а от частоты колебаний. Толстая и длинная струна, например, создает низкий тон звука, т. е. колеблется медленнее, чем тонкая и короткая струна, создающая высокий тон звука.***

(Внешние) гравитационные волны–Это вертикально поперечные волны.



$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = -\frac{\partial g\rho_1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\left(\rho_1 - \rho_2\right)\frac{\partial h}{\partial x}$$



- *Чтобы исключить из рассмотрения горизонтально поперечные волны, нужно ограничить движение частиц так, чтобы оно происходило в плоскостях, параллельных плоскости* (x, z)*,*
- *Для исключения волн сжатия, (звуковых), будем считать атмосферу несжимаемой жидкостью.*
- *Пусть атмосфера состоит из двух однородных слоев с плотностями* ρ1 *и* ρ2*, разделенных поверхностью разрыва плотности.*

Решение для внешних гравитационных волн

уравнение движения: $$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\cdot\frac{\partial h}{\partial x} = 0}$$

уравнение неразрывности: $$\int_0^h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz = 0 \quad\Rightarrow\quad h\frac{\partial u}{\partial x} + w_{z=h(t,x)} = 0$$

$$w_{z=h(t,x)} = \frac{dh}{dt} \Rightarrow h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dh}{dt} = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial x} = 0}$$

линеаризация:

$$u = \bar{u} + u', \quad h = H + h' \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} = \frac{\partial H}{\partial s} = 0 \quad (s = t, x) \quad |u'| << |\bar{u}|, |h'| << H$$

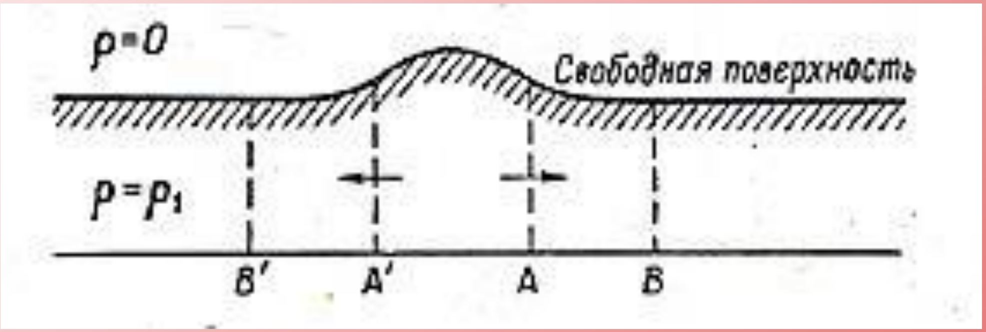
$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + g\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\cdot\frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial h'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial h'}{\partial x} + H\frac{\partial u'}{\partial x} = 0$$

приведение к волновому: $$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)h' = gH\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2}}$$

выбор вида решения и получение дисперсионного соотношения

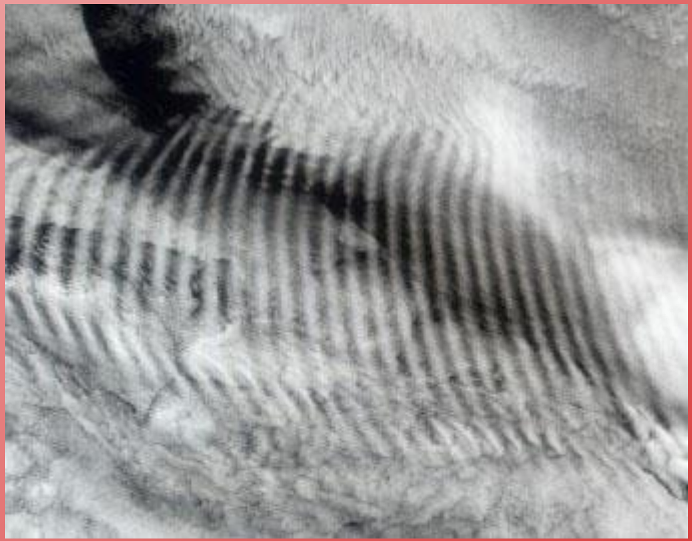
$$h'(x,t) = Ae^{i\alpha(x-ct)}, \qquad c = \bar{u} \pm \sqrt{gH(1 - \rho_2/\rho_1)}$$

Механизм: эти волны получаются потому, что возмущение поверхности двигается много быстрее, чем частицы жидкости



- Большая глубина, жидкости лежит слева от линии А,
- Масса, находящаяся над некоторой точкой, расположенной левее А, будет больше, чем лежащая правее А.
- Согласно закону гидростатики, горизонтальный градиент давления по всей линии А будет направлен вправо, и будет ускорять жидкость в этом направлении.
- Тогда в течение следующего очень короткого промежутка времени жидкость по всей линии А будет двигаться. направо, тогда как жидкость по всей линии В будет все еще неподвижна.
- Т.е. общий перенос жидкости через А будет происходить быстрее, чем через В. и поверхность раздела между А и В должна приподняться

Внутренние гравитационные волны (волны плавучести) –тоже вертикально поперечные



- Вертикально-поперечные волны, образующиеся в устойчиво стратифицированной атмосфере за счет возникновения выталкивающей силы Архимеда
- Проявляются в виде гряд волнообразных облаков
- Часто возникают при обтекании ветром горных хребтов
- Теория этих волн обобщает известные из синоптики «метод частицы» и «метод слоя»

Внутренние (гравитационные) волны–Это вертикально поперечные волны, в негидростатической атмосфере

Исходные уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0$$ - продольное движение

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g=0$$ - вертикальное движение

(негидростатично!)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$ - уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t}+u\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+w\frac{\partial \vartheta}{\partial z}=0$$ - уравнение притока тепла

(адиабатическое приближение)

$$\vartheta=T\left(\frac{P_0}{p}\right)^k=\frac{p}{\rho R}\left(\frac{P_0}{p}\right)^k$$ - потенциальная температура

(определение через T или)

Переход к возмущениям функций и преобразование Буссинеска

$$u=\bar{u}+u',\quad w=w',\ p=\bar{p}(z)+p',\ \rho=\rho_0+\rho',\ \vartheta=\bar{\vartheta}+\vartheta'$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}+g=0 \text{ основное состояние гидростатично}$$

$$\frac{\vartheta'}{\bar{\vartheta}}=\cancel{\frac{1}{\rho_0 RT}\frac{p'}{\bar{p}}}-\frac{\rho'}{\rho_0} \text{ доказывается из определения}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g}=\frac{1}{\rho_0+\rho'}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}+\frac{\partial p'}{\partial z}\right)+g=\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\underbrace{\left(\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)}_{=-g}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z}+g=$$

$$=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z}+g\frac{\rho'}{\rho_0}=\boxed{\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z}-g\frac{\vartheta'}{\bar{\vartheta}}} \text{ приближение Буссинеска}$$

Приближение Буссинеска позволяет в явном виде ввести в рассмотрение силу Архимеда и существенно упрощает решение

Справка:

Сила Архимеда (плавучест

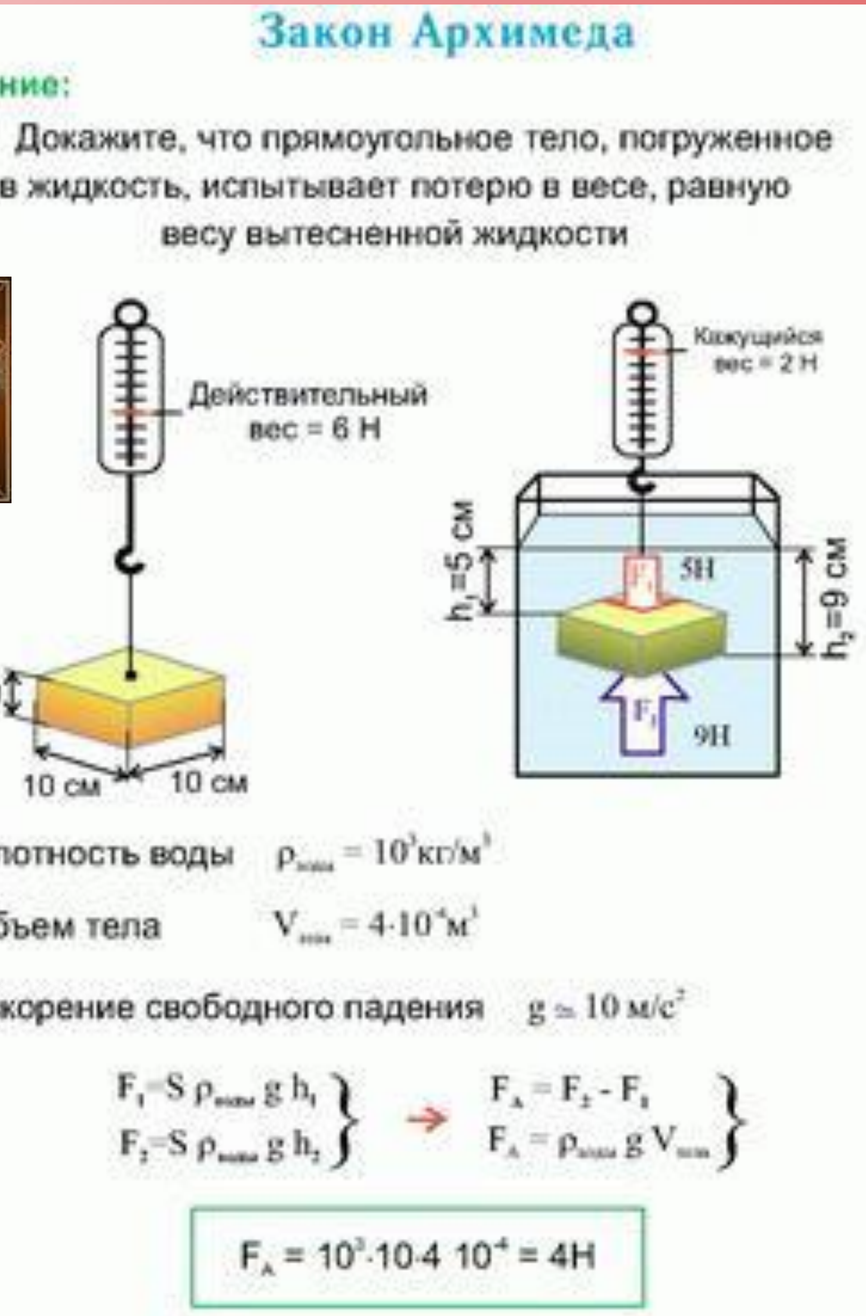
возникает из-за разности

давлений!

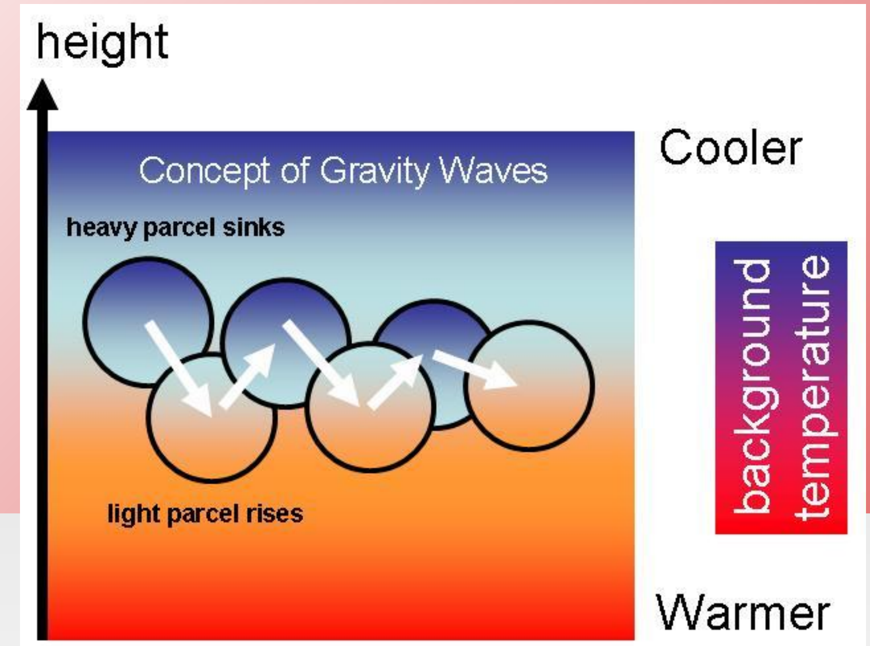
$$P_{2w}\cdot S = \left(P_1 + g\rho_w h\right)\cdot S \text{ в воде}$$

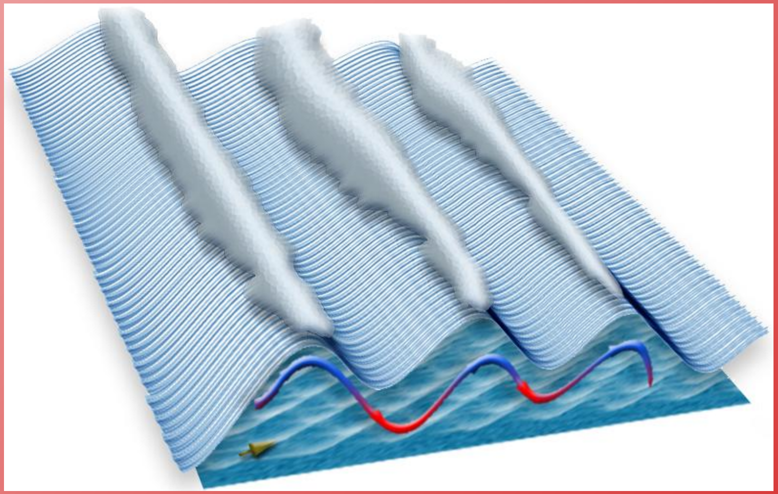
$$P_{2a}\cdot S = \left(P_1 + g\rho_a h\right)\cdot S \text{ в кубике}$$

$$F_a = \Delta F = g\left(hS\right)\left(\rho_w - \rho_a\right)$$



Иллюстрации концепции описания волн плавучести





Волны плавучести – это пример плоских (двумерных) волн. Но в атмосфере они трехмерны!

Именно неустойчивость (взрывной рост амплитуд) волн плавучести приводит к началу отрывов и конвективных подъемов термиков!

Линеаризация и вывод уравнения волн плавучести

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u' + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (А)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)w' + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} - g\frac{\vartheta'}{\bar{\vartheta}} = 0 \quad (Б)$$

$$\frac{\partial^2 (А)}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 (Б)}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u'}{\partial z\,\partial x}\right) - \frac{g}{\bar{\vartheta}}\frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (В) \Rightarrow \frac{\partial (В)}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\vartheta' + w'\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial z} = 0 \quad (Г) \Rightarrow \frac{g}{\bar{\vartheta}}\frac{\partial^2 (Г)}{\partial x^2} \Rightarrow \left(\frac{g}{\bar{\vartheta}}\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-\frac{g}{\bar{\vartheta}}\frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x^2}\right)$$

исключая из второго уравнения $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-\frac{g}{\bar{\vartheta}}\frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x^2}\right)$, получим

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right) + N^2\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = 0}$$

где $N^2 = \frac{g}{\bar{\vartheta}}\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial z}$ – частота Брента-Вяйсяля

В рамке показано уравнение волн плавучести

Дисперсионное соотношение для волн плавучести

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right)+N^2\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}=0$$

ищем комплексное волновое решение

$$w' = \mathrm{Re}\left[\left(W_{re}+iW_{im}\right)\exp(i\phi)\right]=W_{re}\cos\phi - W_{im}\sin\phi,\ \phi = kx+mz-\omega t$$ - фаза волны,

здесь $k=\dfrac{2\pi}{Lx}$, $m=\dfrac{2\pi}{Lz}$ -волновые числа по горизонтали и вертикали

подставляя предполагаемое решение в волновое уравнение получим:

дисперсионное соотношение: $\left(\omega-\bar{u}\cdot k\right)^2\left(k^2+m^2\right)-N^2k^2=0$

$\omega=\bar{u}\cdot k\pm\dfrac{N}{\sqrt{k^2+m^2}}$ частота колебаний относительно скорости ветра $\bar{u}$

Анализ свойств волн плавучести

(Иллюстрацию см. в файле ВолПлавуч.xls)

$$\omega = \bar{u} \cdot k \pm \frac{N}{\sqrt{k^2 + m^2}}$$ частота волн плавучести

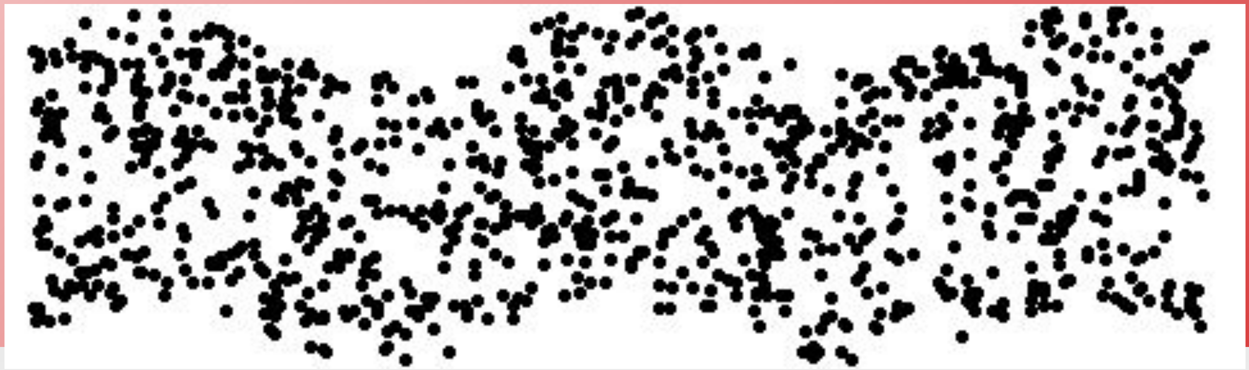
$$C_x = \frac{\omega}{k}, \quad C_z = \frac{\omega}{m}$$ фазовые скорости по X и Z

$$\left.\begin{aligned} C_{gx} &= \frac{\partial \omega}{\partial k} = \bar{u} \pm \frac{Nm^2}{\left(k^2 + m^2\right)^{3/2}} \\ C_{gz} &= \frac{\partial \omega}{\partial k} = \pm \frac{\left(-N \cdot m \cdot k\right)}{\left(k^2 + m^2\right)^{3/2}} \end{aligned}\right\}$$ групповые скорости по X и Z

$$\cos(\mathbf{K},\mathbf{Cg}) = \left(k\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e_2}\right) \cdot \left(C_{gx}\mathbf{e}_1 + C_{gy}\mathbf{e_2}\right) = C_{gx}k + C_{gy}m = \bar{u}k$$

Если ветра нет ($\bar{u}$=0), то энергия переносится вдоль линий ϕ=const

Горизонтально поперечные волны в атмосфере



Уравнения баротропной атмосферы («мелкой воды»)

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g\frac{\partial H}{\partial x}+l\cdot v\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g\frac{\partial H}{\partial y}-l\cdot u\\
&\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}+H\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0
\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}
&\frac{du}{dt}=-g\frac{\partial H}{\partial x}+l\cdot v\\
&\frac{dv}{dt}=-g\frac{\partial H}{\partial y}-l\cdot u\\
&\frac{dH}{dt}+H\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right.
$$

$$
\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}
$$

<u>Инерционные волны</u>

- ***Так называются горизонтально-поперечные колебания в поле стационарного продольно неоднородного геострофического ветра***

пусть $v = \dfrac{dY(\delta Y)}{dt}$, тогда:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -g\underbrace{\cancel{\frac{\partial H}{\partial x}}}_{=0} + l\cdot v \\ \frac{dv}{dt} &= \underbrace{-g\frac{\partial H}{\partial y} - l\cdot u}_{=l(u_g - u)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u(\delta Y) = \int_0^t \frac{du}{dt}dt = l\int_0^t \frac{dY}{dt}dt = u(0) + l\cdot\delta Y = u_g(0) + l\cdot\delta Y \Rightarrow$$

$$= u_g(\delta Y) = u_g(0) + \frac{\partial u_g}{\partial Y}\delta Y$$

$$\boxed{u_g - u = -\left(l - \frac{\partial u_g}{\partial Y}\right)\delta Y = -\frac{\partial M}{\partial Y}\delta Y}$$

$\left(M = l\cdot Y - u_g\right.$ это импульс частицы в абсолютной системе координат $\left.\right)$

$$\frac{dv}{dt} = l(u_g - u) \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\delta Y}{dt^2} + l\frac{\partial M}{\partial Y}\delta Y = 0}$$ уравнение продольных колебаний частицы

Решение:

$$\frac{d^2\delta Y}{dt^2} + F^2\delta Y = 0$$ где $$F^2 = l\frac{\partial M}{\partial Y} = l\left(l - \frac{\partial u_g}{\partial Y}\right)$$

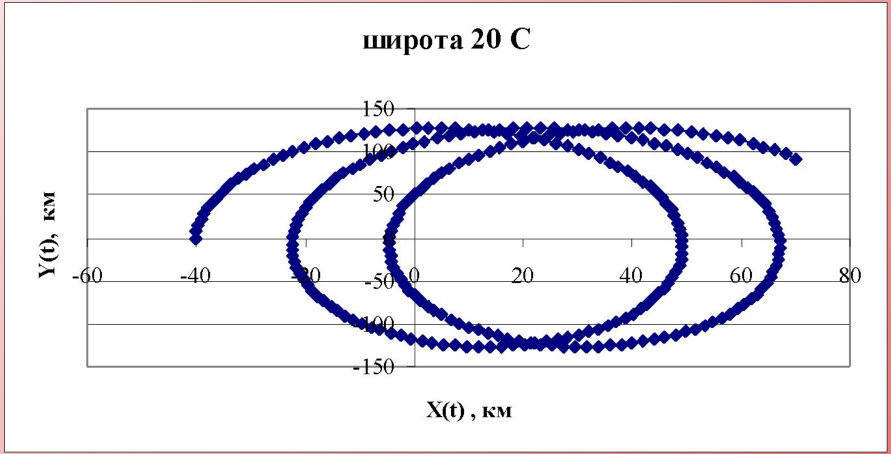
$$\delta Y_c(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} : \quad \lambda^2 = -F^2$$

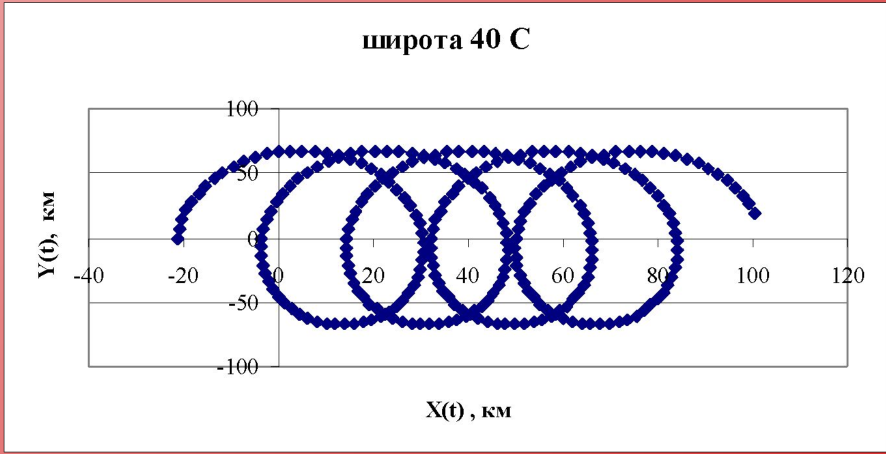
$-F^2 > 0$ $\left(l - \frac{\partial u_g}{\partial Y}\right)$ неустойчивость (взрыв) $\delta Y_c(t) = \boxed{C_1 e^{Ft}} + C_2 e^{-Ft}$ -

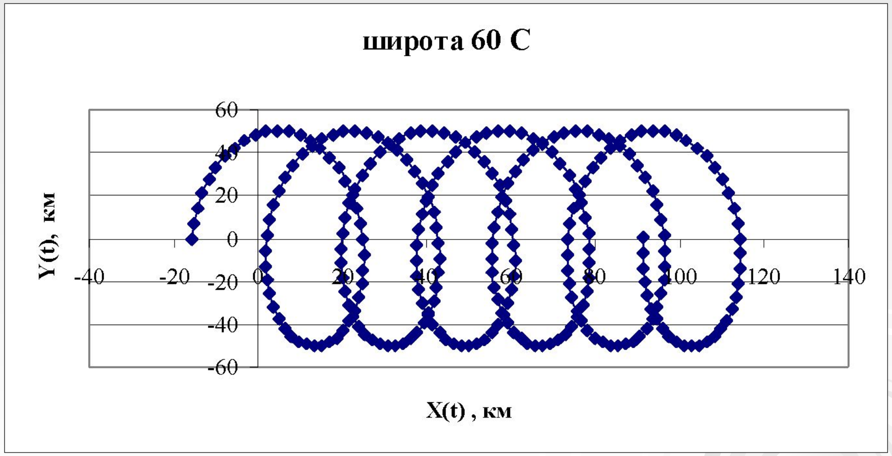
$-F^2 < 0$ $\left(l - \frac{\partial u_g}{\partial Y}\right)$ устойчиво $\delta Y_c(t) = C_1 e^{iFt} + C_2 e^{-iFt}$ - сть (колебания)

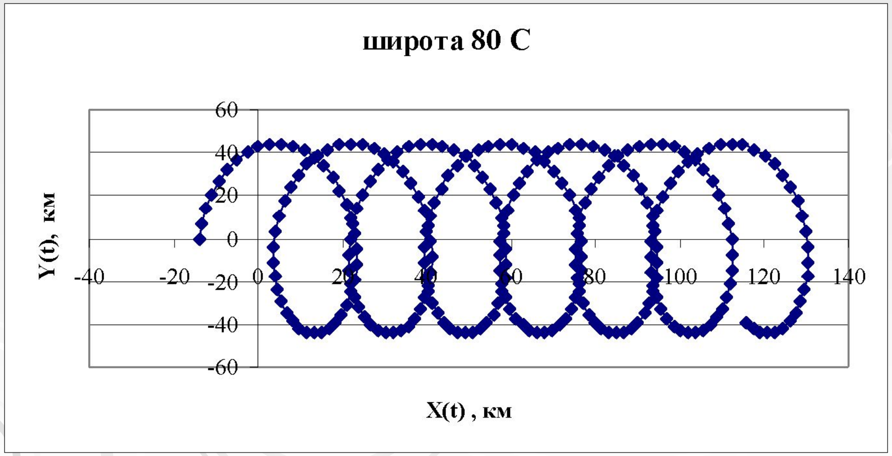
В зависимости от значения увеличения скорости геострофического ветра с широтой могут создаться условия разрушения инерционных волн и образования вихрей!
Этот эффект важен для образования сильных мезоконвективных ячеек.
Вернемся позже!

Траектории частицы при инерционном колебании на разных широтах









Инерционные колебания атмосферы – это движение под действием постоянного начального поля давления

- Если градиент давления отсутствует, частота инерционных колебаний равна $l=2\omega\sin\phi_0$
- (Период этой частоты называется маятниковыми сутками)

Инерционно-гравитационные волны: линеаризация

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial x} - f_0 v' = 0$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial v'}{\partial x} + f_0 u' = 0$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \phi'}{\partial x} + \overline{\phi}_0\frac{\partial u'}{\partial x} - \overline{u} f_0 v' = 0$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ \phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \\ \phi^* \end{pmatrix} \exp[i k_x (x - ct)]$$

$$(c - \overline{u})^3 - \left(\overline{\phi}_0 + \frac{f_0^2}{k_x^2}\right)(c - \overline{u}) - \frac{f_0^2}{k_x^2}\overline{u} = 0$$

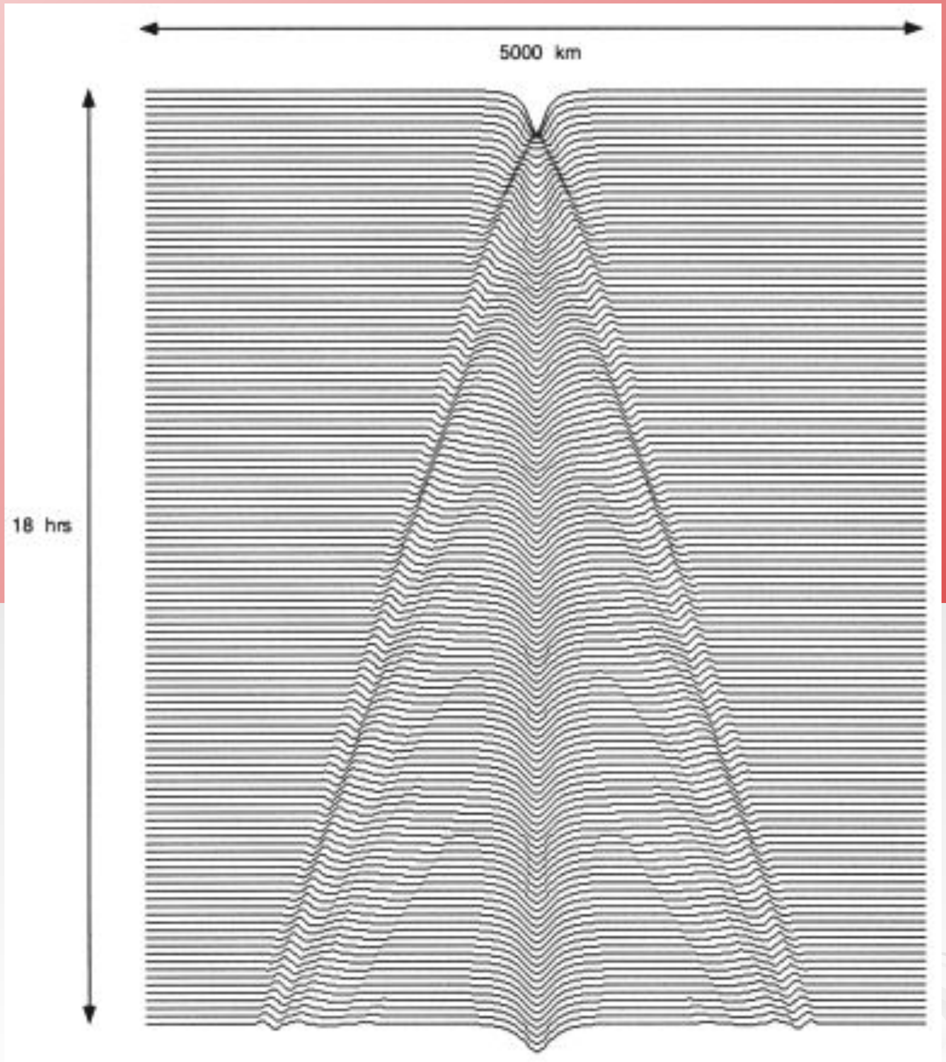
Две группы инерционно-гравитационных волн

$$(c-\overline{u})^3-\left(\overline{\phi}_0+\frac{f_0^2}{k_x^2}\right)(c-\overline{u})-\frac{f_0^2}{k_x^2}\overline{u}=0$$

$$|c_1-\overline{u}|^2 \ll \overline{\phi}+f_0^2/k_x^2 \qquad (c_{2,3}-\overline{u})^3 \gg \overline{u}\,f_0^2/k_x^2$$

$$c_1 \approx \overline{u}\frac{\overline{\phi}}{\overline{\phi}+f_0^2/k_x^2} \qquad \boxed{c_{2,3}=\overline{u}\pm\sqrt{\overline{\phi}+f_0^2/k_x^2}}$$

Роль быстрых гравитационно-инерционных волн в атмосфере – адаптация



При условиях:

$\bar{u} = 0 \qquad h \equiv \bar{h} + \eta, \qquad \eta \ll \bar{h} \quad h=\bar{h} + \eta\,, \quad f = \text{const}$

Система уравнений гравитационно-инерционных волн

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} + fv\,,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu,$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\bar{h}\frac{\partial u}{\partial x}\,.$$

Имеет два стационарных решения (состояния):

$u = 0,\ v = 0,\ \eta = 0$ - состояние покоя

$fv = g\dfrac{\partial \eta}{\partial x};\ u = 0$ - состояние геострофического баланса

Получим уровнение для колебаний высоты:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g\bar{h}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \bar{h}f\zeta = 0\,, \qquad \zeta = \partial v/\partial x.$$

И исключим с помощью уравнения вихря

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\zeta}{f} - \frac{\eta}{\bar{h}}\right) = 0 \quad \text{или} \quad (\zeta / f - \eta / \bar{h}) = \zeta_{\text{pot}}$$

Постановка простейшей задачи адаптации полей к геострофическому соотношению

Пусть в начале возмущение поверхности имеет вид ступеньки

$$\eta = -\eta_0 \operatorname{sgn}(x), \quad \operatorname{sgn}(x)=+1 \text{ if } x>0 \text{ and } \operatorname{sgn}(x)=-1 \text{ if } x<0$$

Тогда потенциальный вихрь все время будет:

$$\zeta_{pot}(t=0) = \frac{\eta_0}{\bar{h}} \operatorname{sgn}(x).$$

Значит относительный вихрь имеет вид:

$$\bar{h} f \zeta = \eta f^2 + \eta_0 f^2 \operatorname{sgn}(x)$$

Подставив его в уравнение возмущения высоты и перейдя к описанию стационарного состояния $\partial^2 \eta / \partial t^2 = 0$

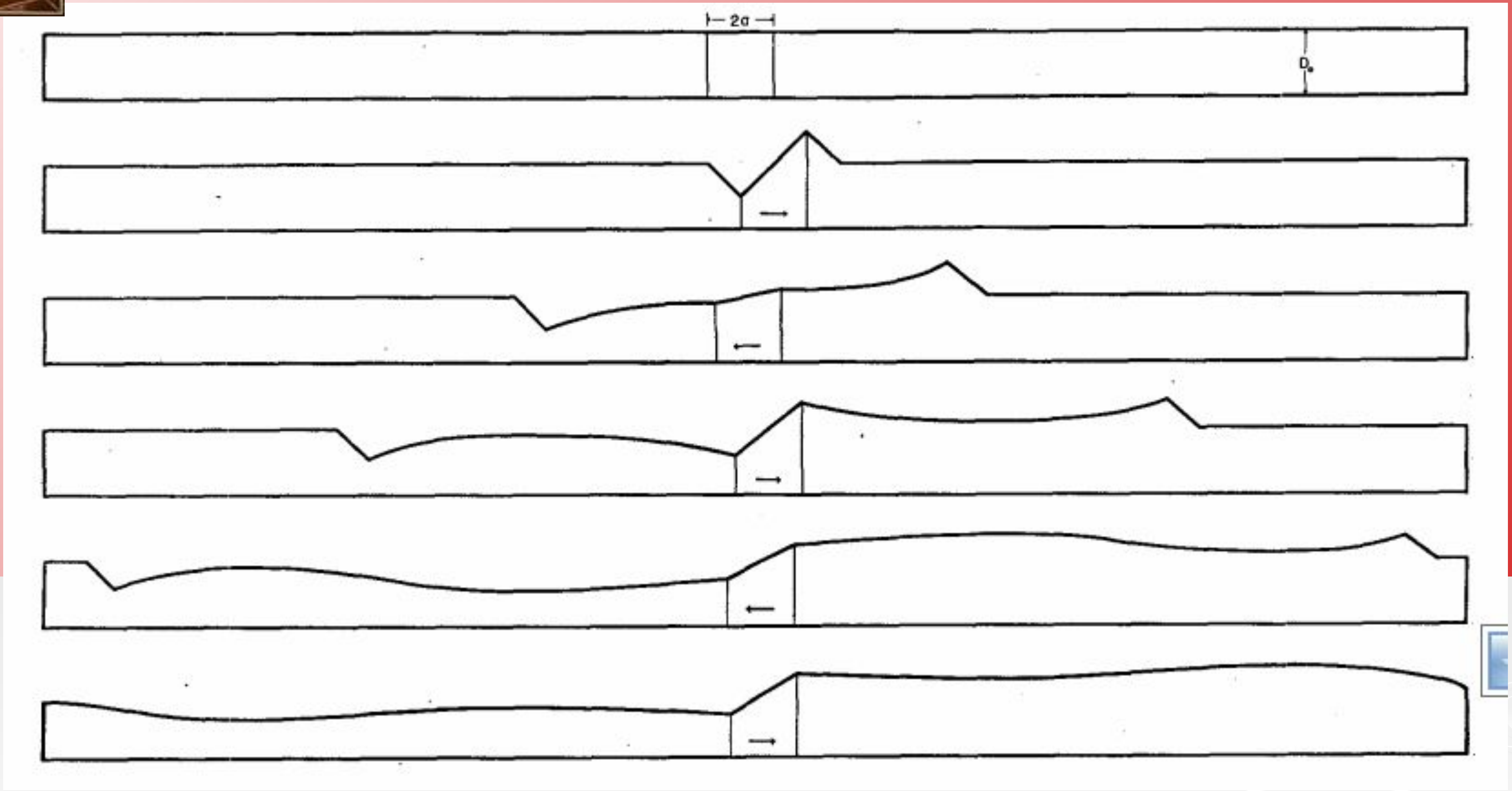
Получим уравнение установившейся высоты:

$$g\bar{h} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - f^2 \eta = \eta_0 f^2 \operatorname{sgn}(x).$$

Его решение:

$$\frac{\eta}{\eta_0} = -\operatorname{sgn}(x) + \operatorname{sgn}(x) \exp\left[\frac{-x \operatorname{sgn}(x)}{\lambda}\right], \text{ где } \lambda = \frac{\sqrt{gh}}{f}.$$

Как выглядит процесс адаптации?



Сверху вниз: распространение возмущения свободной поверхности поперек канала из-за начального импульса скорости в центральной части канала (импульс направлен от наблюдателя) вверх по течению

Вывод:

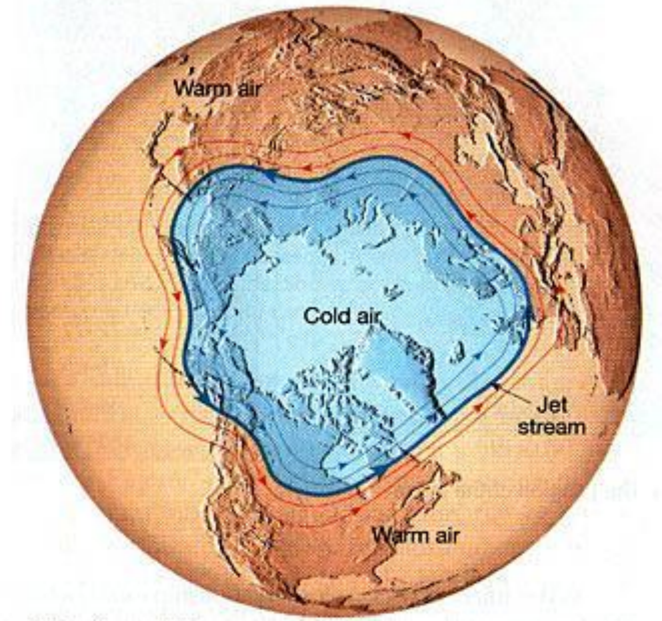
- ***Если в начальный момент атмосфера имела потенциальный вихрь (а это есть всегда)***
- ***То быстрые инерционно-гравитационные волны приведут ее*** *не в состояние покоя*,
- ***А в состояние*** *геострофического равновесия*, ***соответствующее распределению*** *исходного потенциального вихря*
- ***В этом процессе значительная часть доступной потенциальной энергии рассеивается на образование коротких волн***

Планетарные волны и связанные ними атмосферные процессы

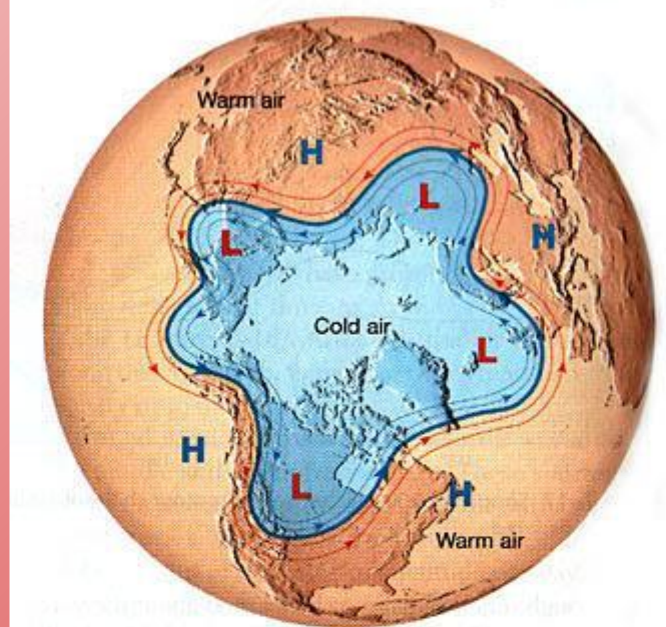
Зачем нужно знать?

- *В них проявляется смена форм циркуляции («цикл индекса»)*
- *Без планетарных волн – нет переноса тепла и момента импульса от экватора к полюсу*
- *Без планетарных волн не могут возникать вихри*

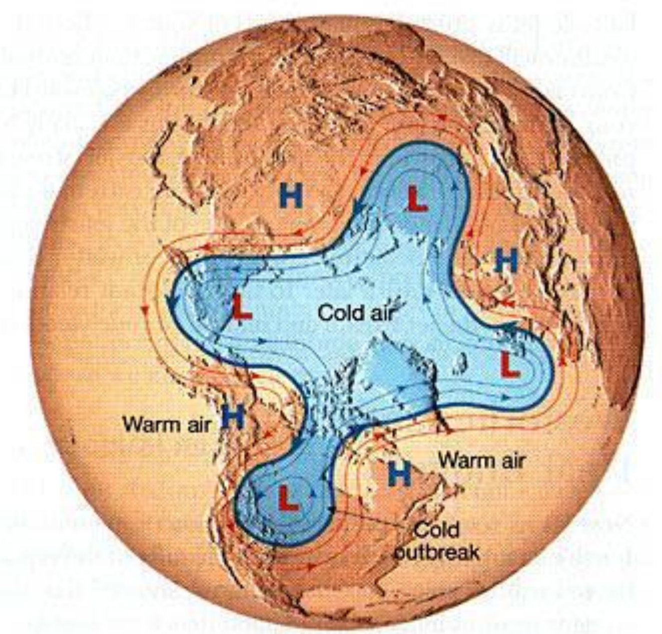
Смена зонального и меридианального типов циркуляции



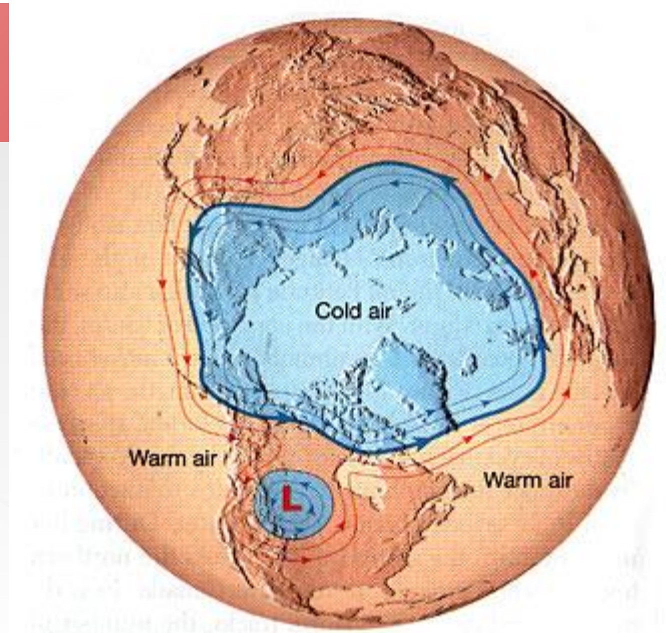
(a) Gently undulating upper airflow



(b) Meanders form in jet stream

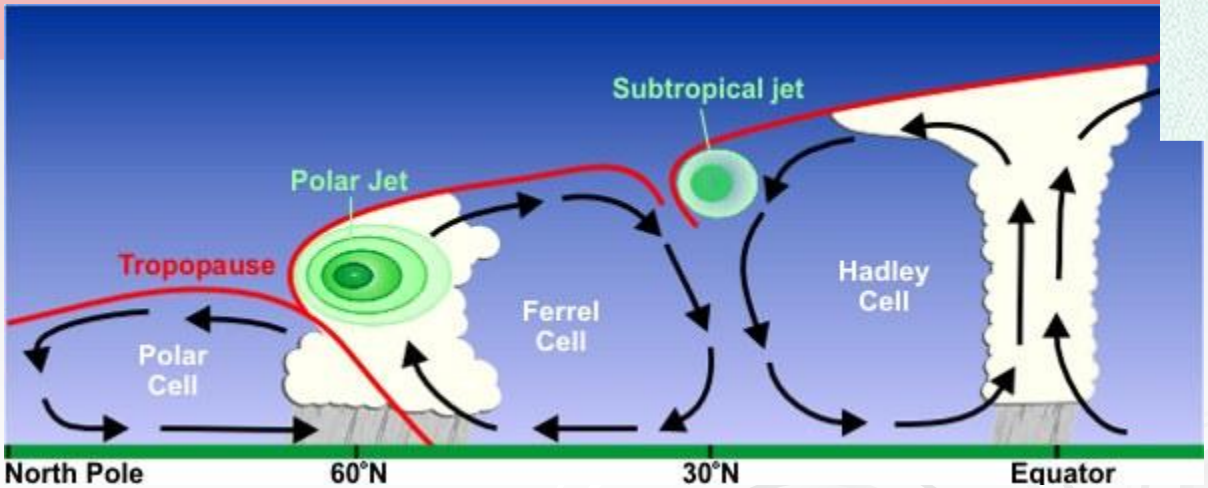


(c) Strong waves form in upper airflow

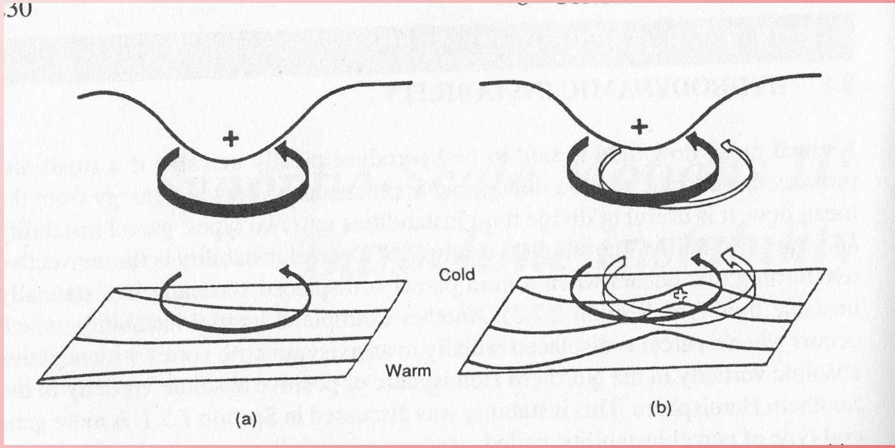


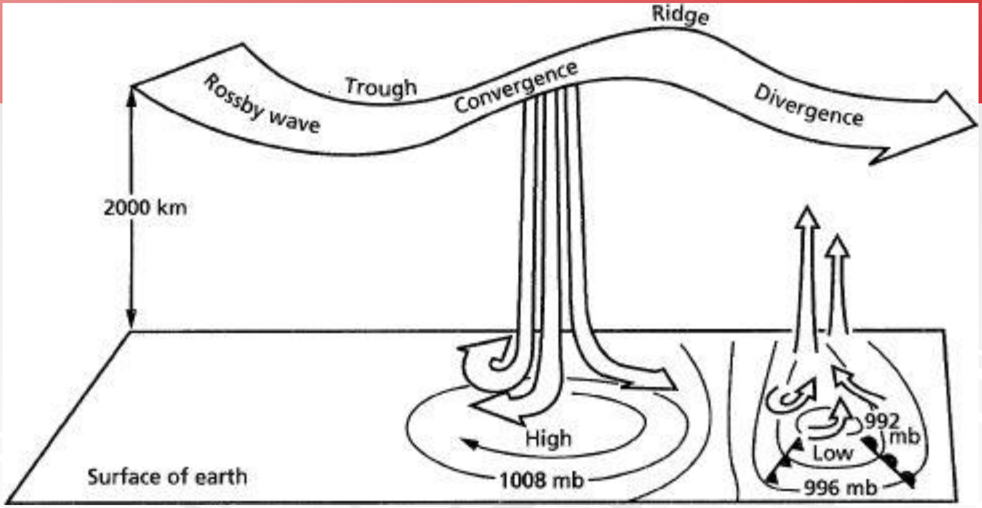
(d) Return to a period of flatter flow aloft

Зональная циркуляция – это эффект осреднения горизонтальной, переносящей тепло и момент



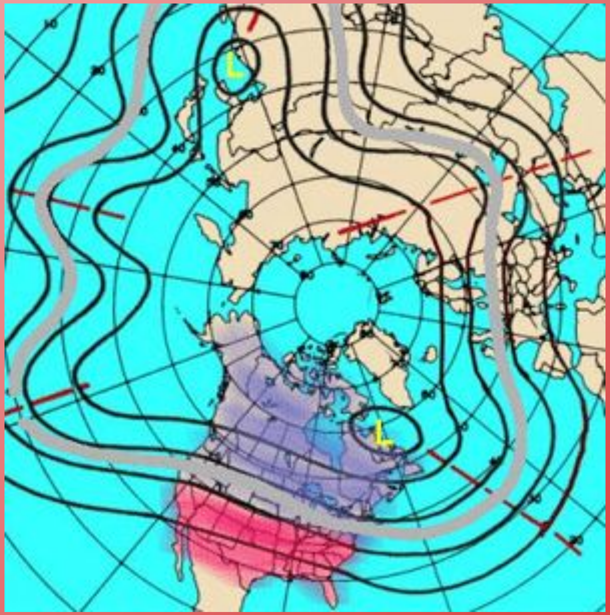
Возникновение вихрей из волн

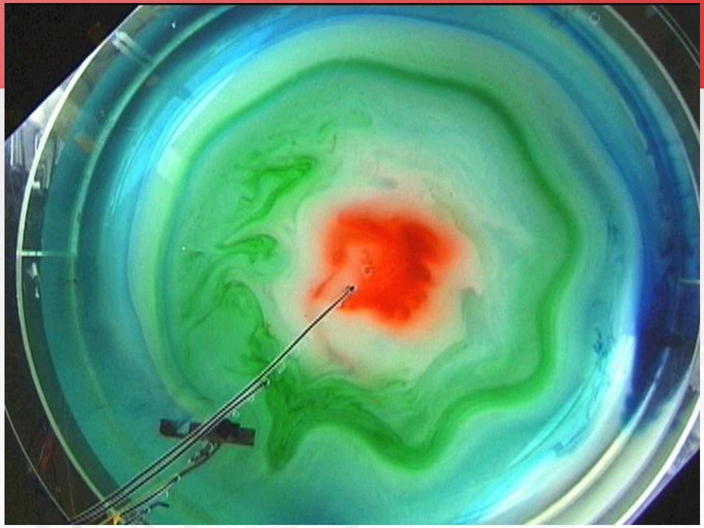


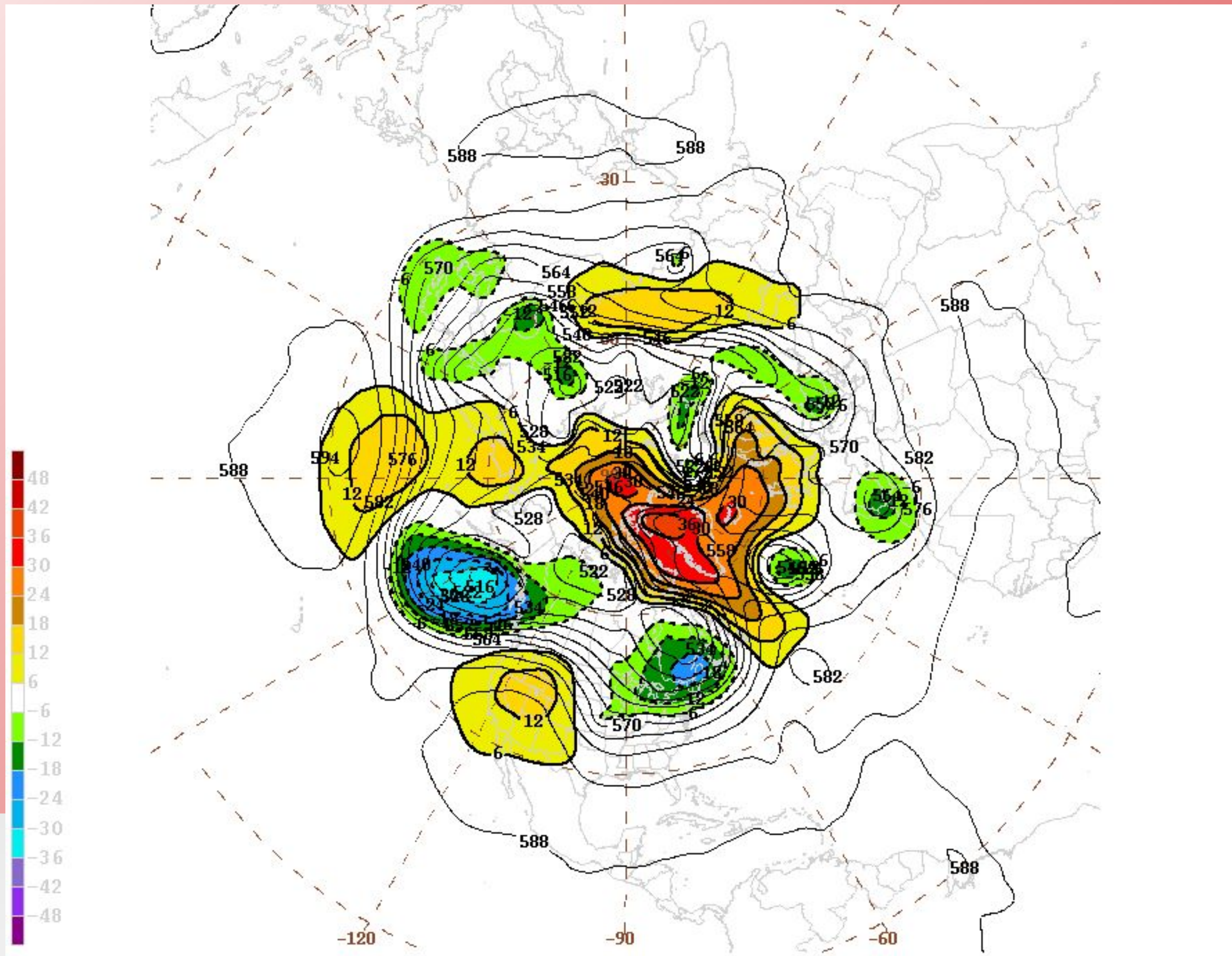


Изучим позже

Волны Россби, 1939







031017/0000F000 500 hPa Height and Height Anomaly (dam), from NCEP Final Analysis

На ежедневных картах барической топографии видно непрерывное сложное движение атмосферы в виде крупномасштабных волн <u>примерно одинаковой, но меняющейся, длины</u>.

ПОЧЕМУ ЭТО ТАК? – Ответил на этот вопрос К.Г.Россби

Напоминалка: Динамика атмосферы в квазигеострофическом приближении

$$u_g = -\frac{g}{l} \cdot \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$v_g = \frac{g}{l} \cdot \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$T = -\frac{g}{R} p \cdot \frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{g}{R} \xi \cdot \frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad \left(\xi = \frac{p}{p_0} \right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \frac{1}{(l + \Omega)} \frac{d\Omega + l}{dt}, \quad \left(\omega = \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{p_0} \frac{dp}{dt} \cong \frac{w}{p_0} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g\rho}{p_0} \cdot w \right)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} = -\nabla \cdot \left(\mathbf{U}_g + \mathbf{U}_a \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{l} \frac{dv}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{l} \frac{du}{dt} \right) + \frac{1}{l} v_g \frac{\partial l}{\partial y} = \frac{1}{l} \left(\frac{d\Omega}{dt} - \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \Omega + \frac{dl}{dt} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{(l + \Omega)} \frac{d\Omega + l}{dt}} \right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_g \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_g \frac{\partial \theta}{\partial y} + \omega \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} + u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\omega}{\xi} m^2 = 0}, \quad \left(m^2 = \frac{RT}{g} (\gamma_a - \gamma) \right)$$

$$\left(\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^k = T \xi^{-k}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \right)$$

В рамках уравнения, содержащие изменения во времени!

Первый случай: волны Россби по долготе на бездивергентном (среднем) уровне

На уровне максимума вертикальной скорости $\dfrac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0$, тогда

$$0 = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{(l+\Omega)}\frac{d\Omega + l}{dt} \Rightarrow \frac{d\Omega + l}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Omega + l}{\partial t} + u_g \frac{\partial \Omega + l}{\partial x} + v_g \frac{\partial \Omega + l}{\partial y} = 0$$

Рассматривается движение, не зависящее от y

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = U(t)$$

Тогда

$$\Omega + f = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f = \boxed{\frac{\partial v}{\partial x} + f_0 + \beta y}, \quad f = f_0 + \beta y, \left(\beta = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\omega_0 \cos\varphi}{R}\right)$$

В этом случае уравнение вихря принимает вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + f_0 + \beta y\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x} + \cancel{v_g \frac{\partial}{\partial y}}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\cancel{\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\beta y = 0$$

в итоге получим уравнение для меридианальной скорости

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + U\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v = 0}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + U\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v = 0$$

Будем искать решение этого уравнения в виде волны

$$\boxed{v(t,x) = \exp(i(kx - \omega t)) = e^{i(kx - \omega t)}}$$

как это понимать?

Справка:

$k = \frac{2\pi}{L}$ волновое число волны с длиной L

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ частота колебаний волны с периодом T

Например, волна с длиной 6000 км имеет $k = \frac{2\cdot 3{,}14}{6000000[м]} \cong 1\cdot 10^{-6}\left[м^{-1}\right]$

Если ее период 2 ч=7200с, то частота $\omega = \frac{2\cdot 3{,}14}{7200[с]} \cong 8\cdot 10^{-4}[Гц]$

Техника получения волновых решений

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + U \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v = 0$$

Будем искать производные от $v(t,x) = e^{i(kx - \omega t)}$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -i\omega e^{i(kx-\omega t)} = -i\omega \cdot v \quad \frac{\partial v}{\partial x} = ike^{i(kx-\omega t)} = ik \cdot v \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = \omega k \cdot v \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -k^2 \cdot v$$

Подставим в уравнение и вынесем общий множитель - $v\left(\omega k - Uk^2 + \beta\right) = 0$

Ясно, что частное решение вида $v(t,x) = e^{i(kx-\omega t)}$ будет существовать, только если частота и волновое число связаны условием

$$\boxed{\omega k - Uk^2 + \beta = 0}$$

Оно называется ДИСПЕРСИОННЫМ СООТНОШЕНИЕМ

Фазовая скорость волны Россби

Для понимания смысла дисперсионного соотношения выделим фазу гармоники

$$v(t,x) = \mathrm{Re}\left[e^{i(kx-\omega t)}\right] = \cos(kx-\omega t) = \cos\phi \Rightarrow \boxed{\phi = kx-\omega t}$$ - фаза косинуса

Условие постоянства фазы при перемещении : $\dfrac{d\phi}{dt} = 0 = \dfrac{d}{dt}\left(kx-\omega t\right) = 0$

Отсюда скорость изменения положения фазы определяется равенством

$$k\frac{dx}{dt} = \omega \text{ или } \quad \frac{dx}{dt} = \boxed{c = \frac{\omega}{k}} = \left(\frac{2\pi}{T}\right) \Big/ \left(\frac{2\pi}{L}\right) = \frac{L}{T}$$

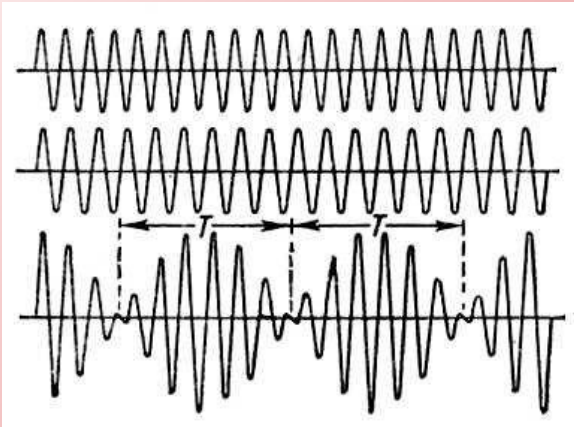
c это фазовая скорость волны, длиной L и с периодом T

Из дисперсионного соотношения следует, что для волн Россби

$$\omega k - Uk^2 + \beta = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{k} = \boxed{c = U - \frac{\beta}{k^2}}$$

Групповая скорость волн

При сложении колебаний с близкими частотами возникают биения.



$$\xi_1(x,t) = a\cdot \mathrm{Cos}(\omega t - kx)$$

$$+$$

$$\xi_2(x,t) = a\cdot \mathrm{Cos}[(\omega+\Delta\omega)t - (k+\Delta k)x]$$

$$\xi(x,t) = 2a\cdot \mathrm{Cos}(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x)\cdot \mathrm{Cos}(\omega t - kx).$$

Фазовая скорость распространения огибающей (амплитуды) волнового пакета называется групповой скоростью

$$\boxed{c_g = \lim_{\Delta k\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dck}{dk} = c + k\frac{dc}{dk}}$$

Поскольку мощность волны (энергия за единицу времени) пропорциональна квадрату ее амплитуды, то скорость распространения амплитуды –

групповая скорость– это и скорость переноса волной энергии

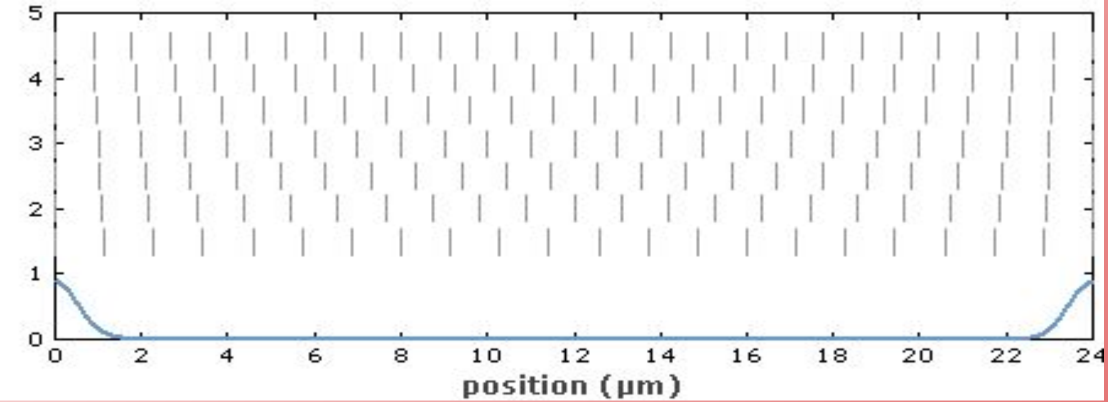
Групповая скорость волн Россби

$$c_g = c + k\frac{dc}{dk} = \left(U - \frac{\beta}{k^2}\right) + k\left(U - \frac{\beta}{k^2}\right)'_k = U - \frac{\beta}{k^2} + k\left(\frac{2\beta}{k^3}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{c_g = U + \frac{\beta}{k^2}}$$

- *Групповая скорость волн Россби всегда положительна, т. е. пакет волн и его энергия всегда распространяются на восток*
- *Фазовая скорость очень длинных волн (k=2π/L) может быть отрицательной, т.е. они перемещаются на запад, а короткие волны – на восток*

Дисперсия

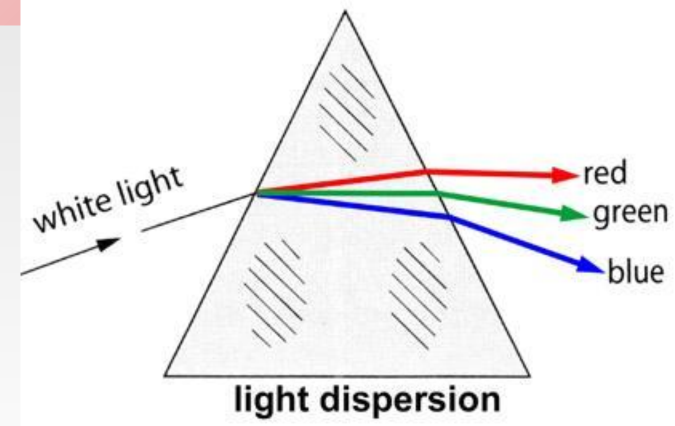


Если в среде нет дисперсии, то волновой пакет перемещается, сохраняя форму.
Если дисперсия есть – он распадается.

Дисперсия – следствие зависимости фазовой скорости от длины волны (волнового числа)
Т.к. для волн Россби

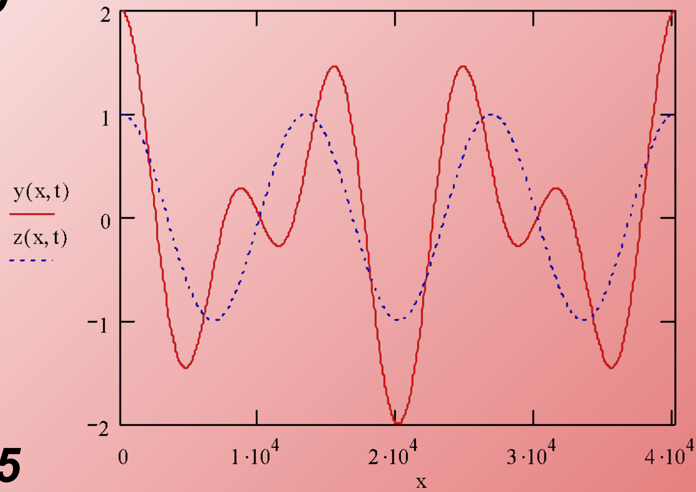
$$c = U - \beta/k^2,$$

То у них есть дисперсия и в атмосфере волновые пакеты меняют форму

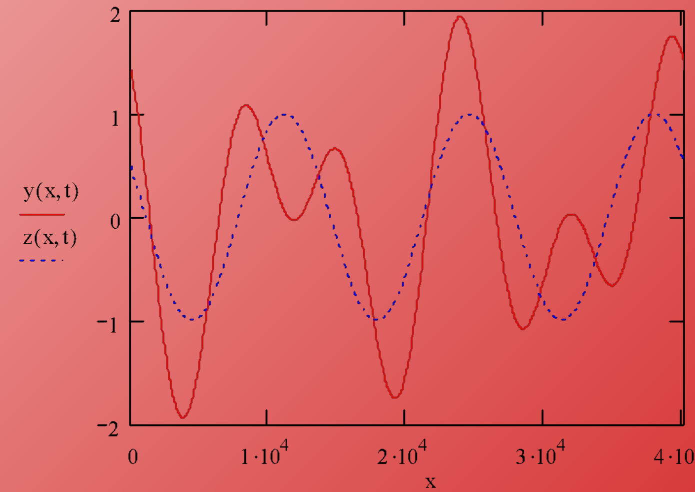


Дисперсия волн Россби
(К1=3/R=4,7·10^{-4} км$^{-1}$; К2=5/R=7,8·10^{-4} км$^{-1}$)

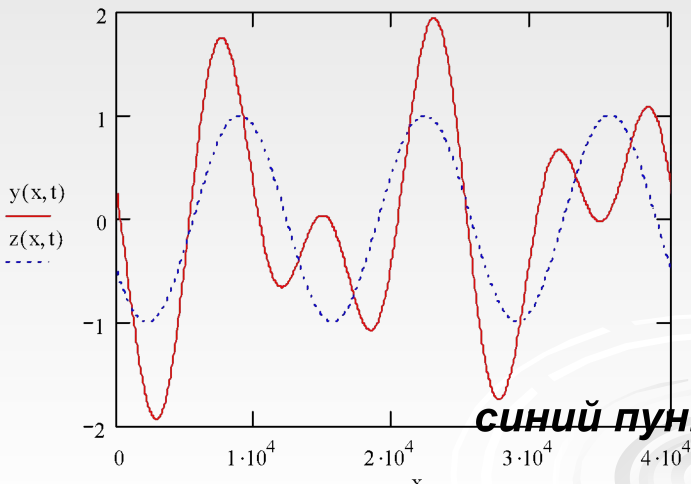
t=0



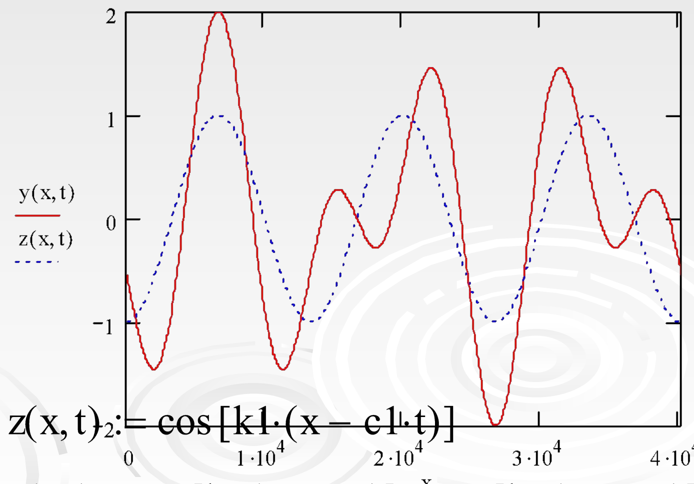
t=30



t=15



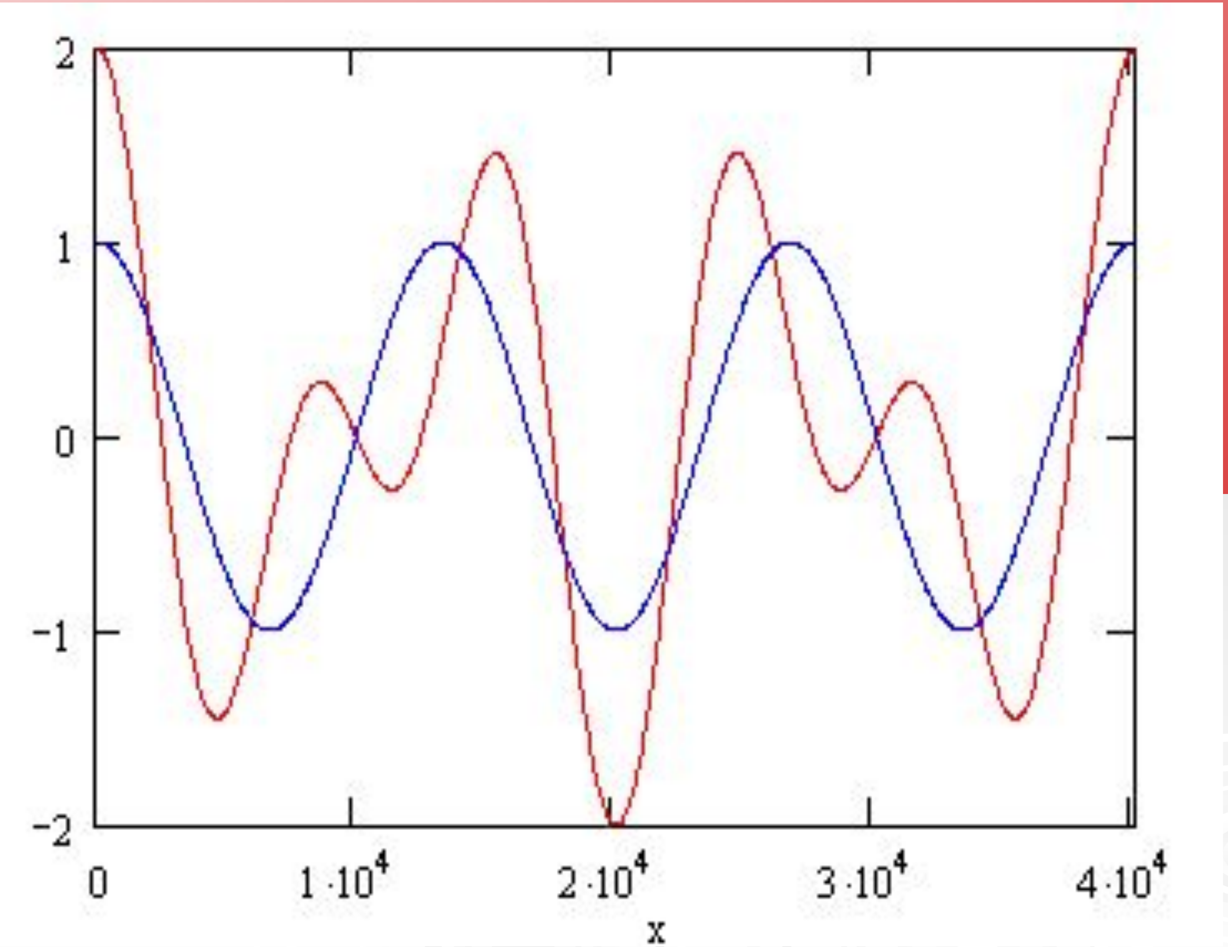
t=45



синий пунктир – $z(x,t) := \cos[k1\cdot(x - c1\cdot t)]$

красная сплошная–- $y(x,t) := \cos[k1\cdot(x - c1\cdot t)] + \cos[k2\cdot(x - c2\cdot t)]$

Итак, для атмосферы характерны собственные колебания большой длины и низкой частоты, обладающие дисперсией



Про волны нужно знать хорошо! А не то…