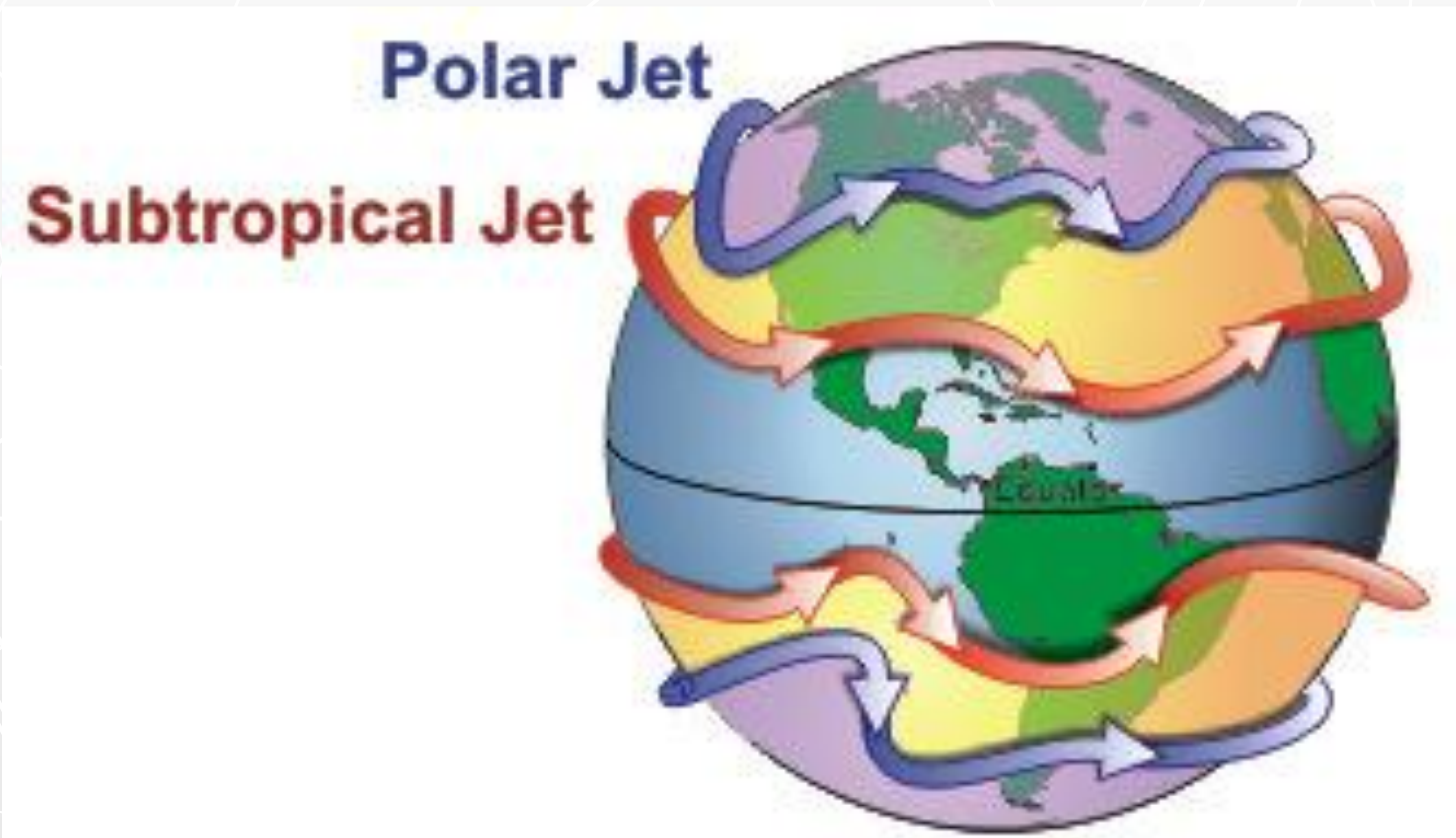
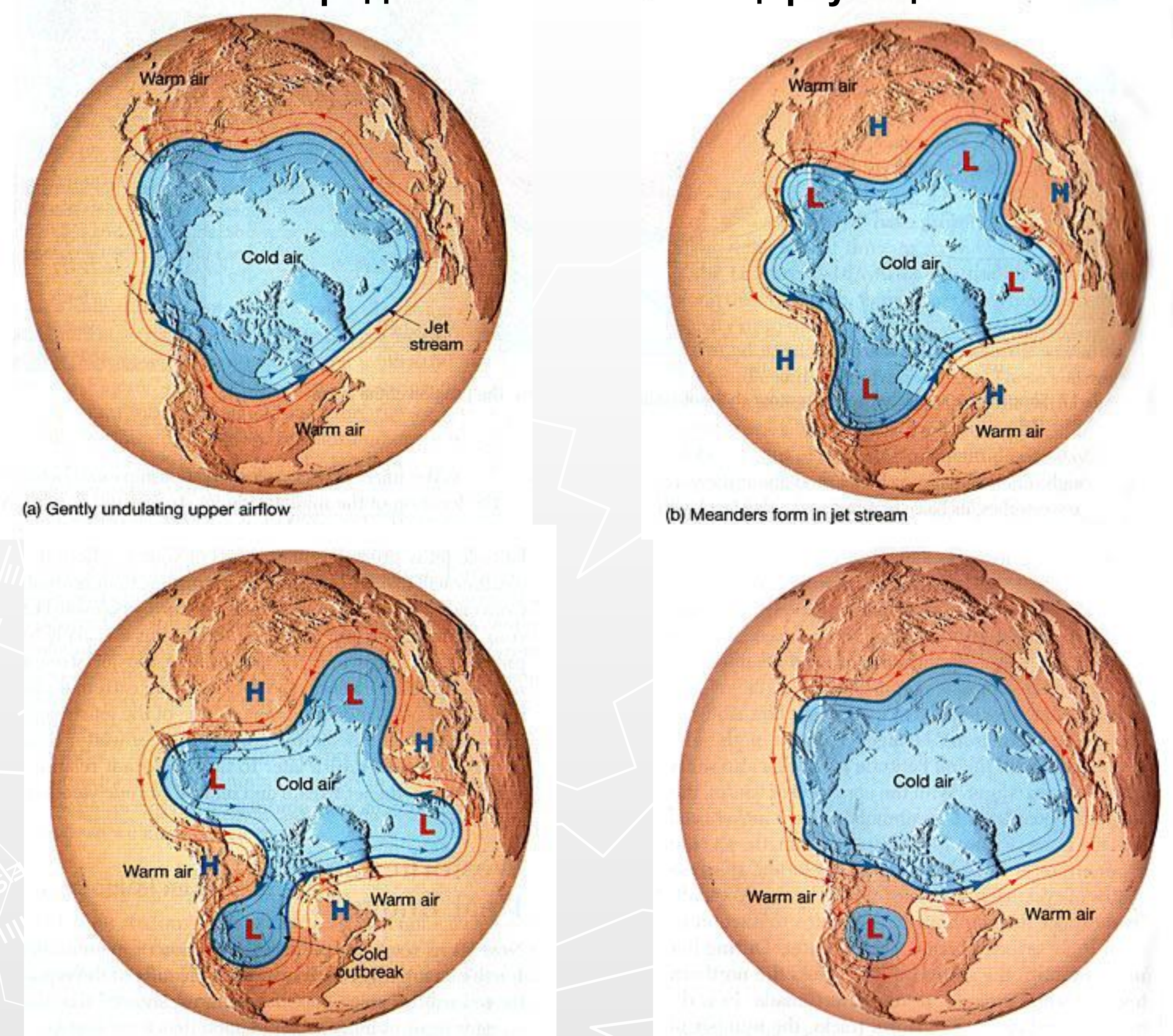
Планетарные волны и связанные ними атмосферные процессы



Зачем нужно знать?

- В них проявляется смена форм циркуляции («цикл индекса»)
- Без планетарных волн – нет переноса тепла и момента импульса от экватора к полюсу
- Без планетарных волн не могут возникать вихри

Смена зонального и меридианального типов циркуляции



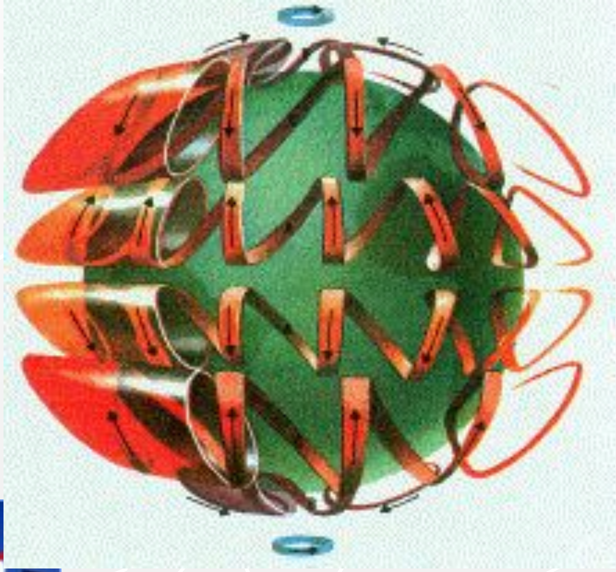
(a) Gently undulating upper airflow

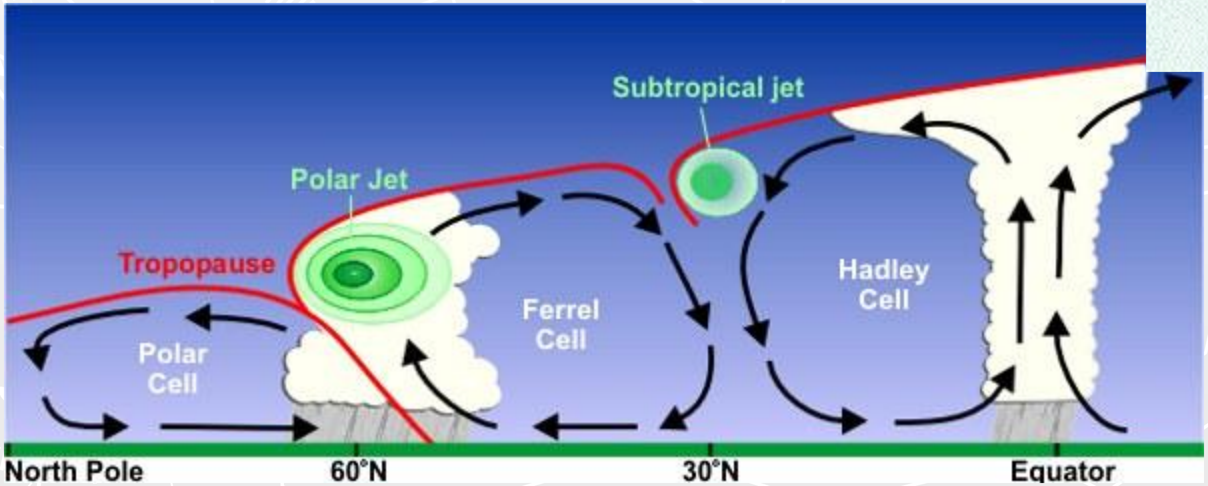
(b) Meanders form in jet stream

(c) Strong waves form in upper airflow

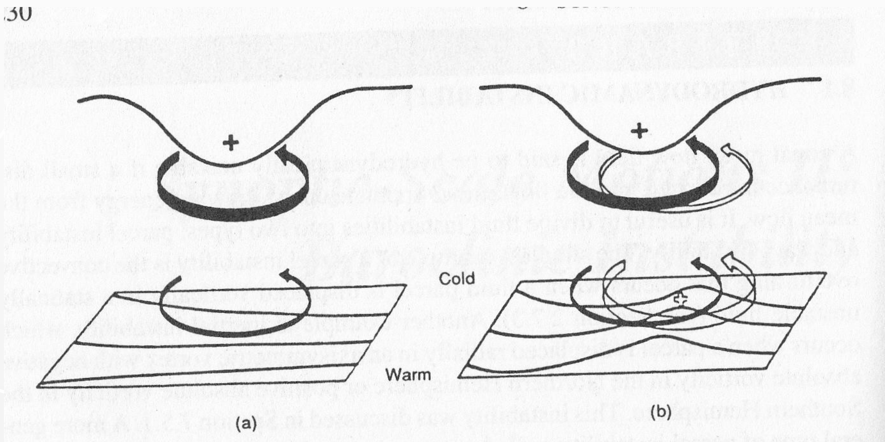
(d) Return to a period of flatter flow aloft

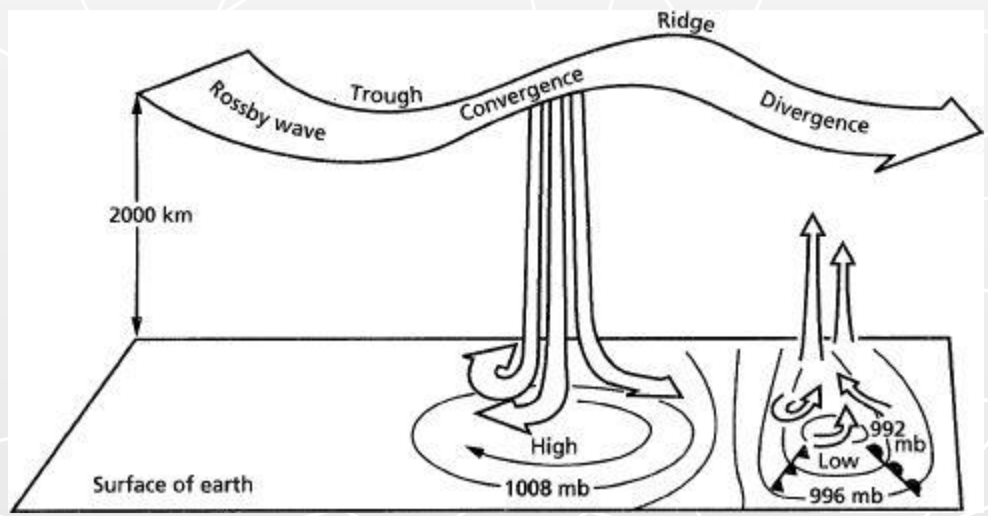
Зональная циркуляция – это эффект осреднения горизонтальной, переносящей тепло и момент





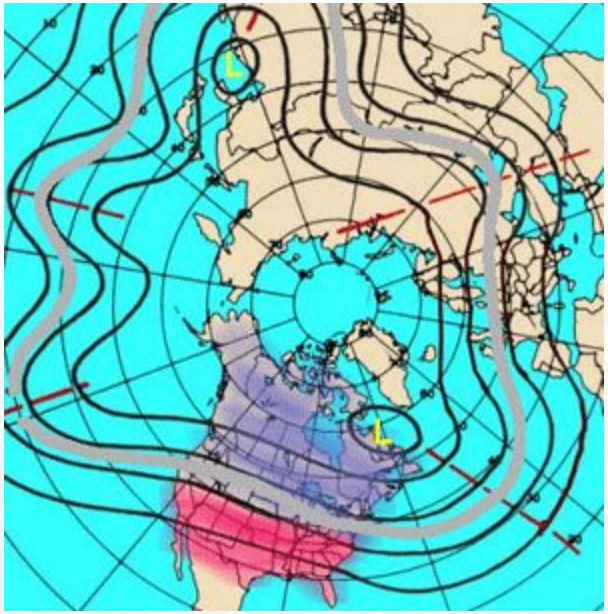
Возникновение вихрей из волн

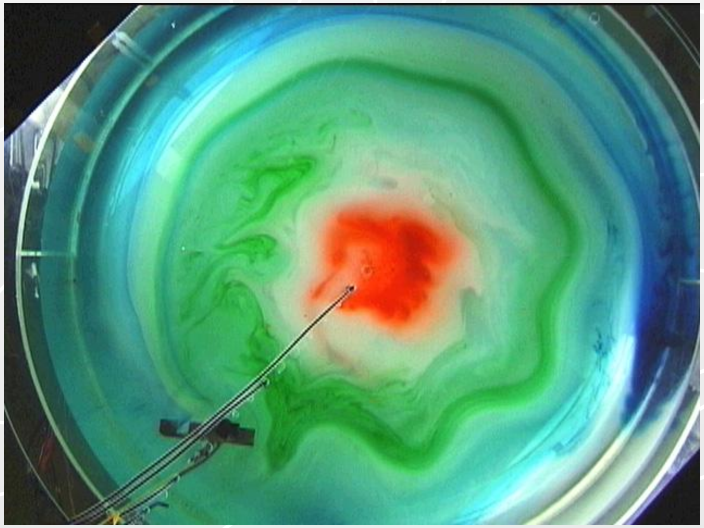


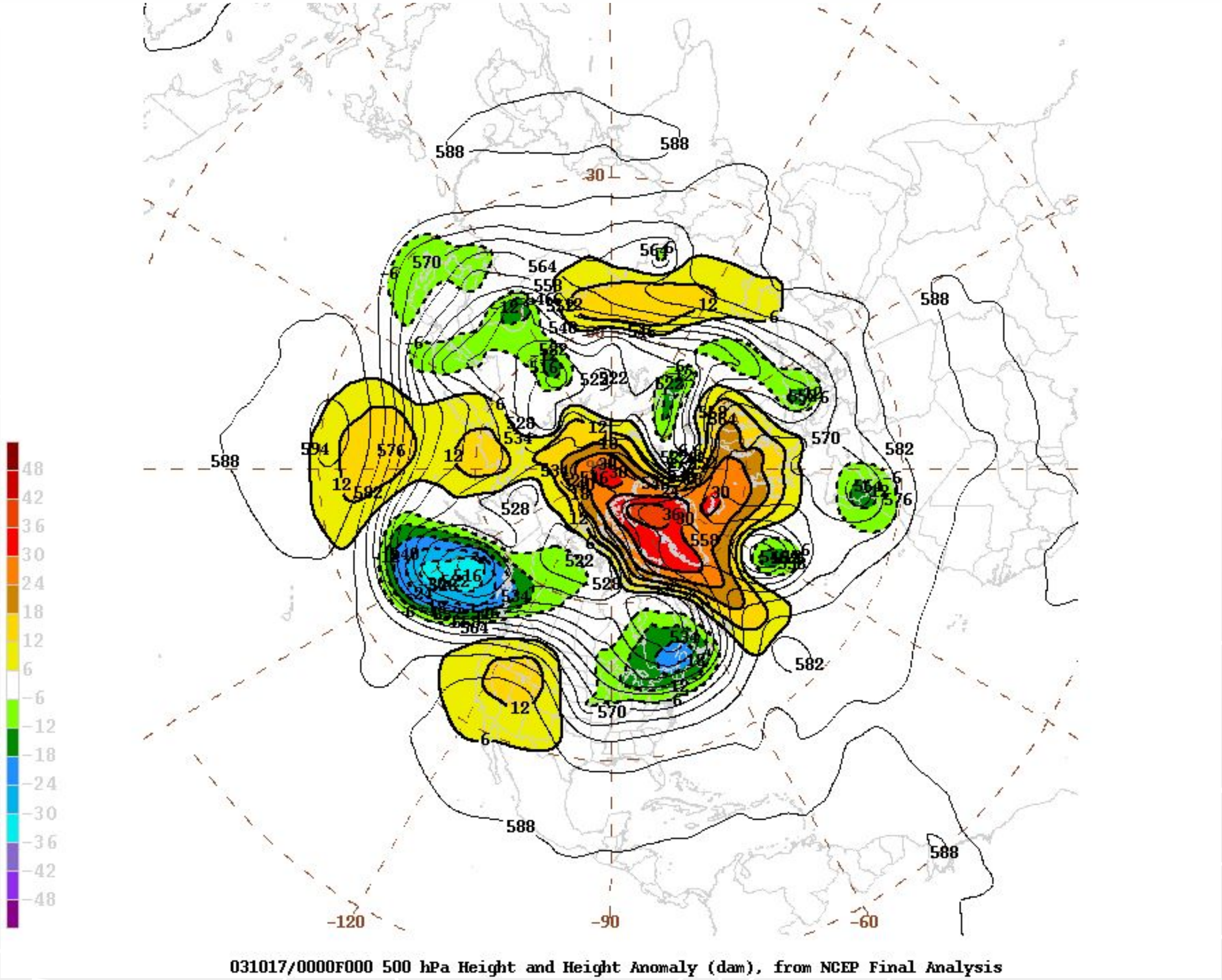


Изучим позже

Волны Россби, 1939







На ежедневных картах барической топографии видно непрерывное сложное движение атмосферы в виде крупномасштабных волн <u>примерно одинаковой, но меняющейся, длины</u>.

ПОЧЕМУ ЭТО ТАК? – Ответил на этот вопрос К.Г.Россби

Напоминалка: *Динамика атмосферы в квазигеострофическом приближении*

$$u_g = -\frac{g}{l}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}$$

$$v_g = \frac{g}{l}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$T = -\frac{g}{R}p\cdot\frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{g}{R}\xi\cdot\frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad \left(\xi = \frac{p}{p_0}\right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \frac{1}{(l+\Omega)}\frac{d\Omega + l}{dt}, \quad \left(\omega = \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{p_0}\frac{dp}{dt} \cong \frac{w}{p_0}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g\rho}{p_0}\cdot w\right)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} = -\nabla\cdot\left(\mathbf{U}_g + \mathbf{U}_a\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{l}\frac{dv}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{l}\frac{du}{dt}\right) + \frac{1}{l}v_g\frac{\partial l}{\partial y} = \frac{1}{l}\left(\frac{d\Omega}{dt} - \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\Omega + \frac{dl}{dt}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{(l+\Omega)}\frac{d\Omega + l}{dt}}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_g\frac{\partial \theta}{\partial x} + v_g\frac{\partial \theta}{\partial y} + \omega\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} + u_g\frac{\partial T}{\partial x} + v_g\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\omega}{\xi}m^2 = 0}, \quad \left(m^2 = \frac{RT}{g}(\gamma_a - \gamma)\right)$$

$$\left(\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^k = T\xi^{-k}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \right)$$

В рамках уравнения, содержащие изменения во времени!

Первый случай: волны Россби по долготе на бездивергентном (среднем) уровне

На уровне максимума вертикальной скорости $\dfrac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0,$ тогда

$$0 = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\left(l + \Omega\right)} \frac{d\Omega + l}{dt} \Rightarrow \frac{d\Omega + l}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Omega + l}{\partial t} + u_g \frac{\partial \Omega + l}{\partial x} + v_g \frac{\partial \Omega + l}{\partial y} = 0$$

Рассматривается движение, не зависящее от y

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = U(t)$$

Тогда

$$\Omega + f = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f = \boxed{\frac{\partial v}{\partial x} + f_0 + \beta y}, \quad f = f_0 + \beta y, \left(\beta = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\omega_0 \cos\varphi}{R} \right)$$

В этом случае уравнение вихря принимает вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + f_0 + \beta y \right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + \cancel{v_g \frac{\partial}{\partial y}} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\cancel{\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \beta y = 0$$

в итоге получим уравнение для меридианальной скорости

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + U \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v = 0}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + U\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v = 0$$

Будем искать решение этого уравнения в виде волны

$$\boxed{v(t,x) = \exp(i(kx - \omega t)) = e^{i(kx-\omega t)}}$$

как это понимать?

Справка:

$k = \dfrac{2\pi}{L}$ волновое число волны с длиной L

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ частота колебаний волны с периодом T

Например, волна с длиной 6000 км имеет $k = \dfrac{2 \cdot 3{,}14}{6000000[м]} \cong 1 \cdot 10^{-6}\left[м^{-1}\right]$

Если ее период 2 ч=7200с, то частота $\omega = \dfrac{2 \cdot 3{,}14}{7200[с]} \cong 8 \cdot 10^{-4}[гц]$

Напоминалка из математики 1

Формуда Эйлера

$$\boxed{\exp(ix) = e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x}$$

Комплексное представление гармоник ($D = A + iB$)

$$De^{-ix} = (A + iB) \cdot (\cos x - i \cdot \sin x) = (A\cos x + B\sin x) + i(B\cos x - A\sin x)$$

откуда следует, что

$$\boxed{A\cos x + B\sin x = \mathrm{Re}\left(De^{-ix}\right)} \qquad \boxed{B \quad x - A \quad x = \quad \left(De^{-ix}\right)}$$

Еще одно комплексное представление ($D^* = A - iB$)

$$De^{-ix} = (A\cos x + B\sin x) + i(B\cos x - A\sin x)$$

$$+$$

$$D^* e^{+ix} = (A\cos x + B\sin x) - i(B\cos x - A\sin x)$$

$$\boxed{A\cos x + B\sin x = De^{-ix} + D^* e^{ix}}$$

Напоминалка из математики 2
Амплитудно-фазовое представление гармоник

Не забывать, что

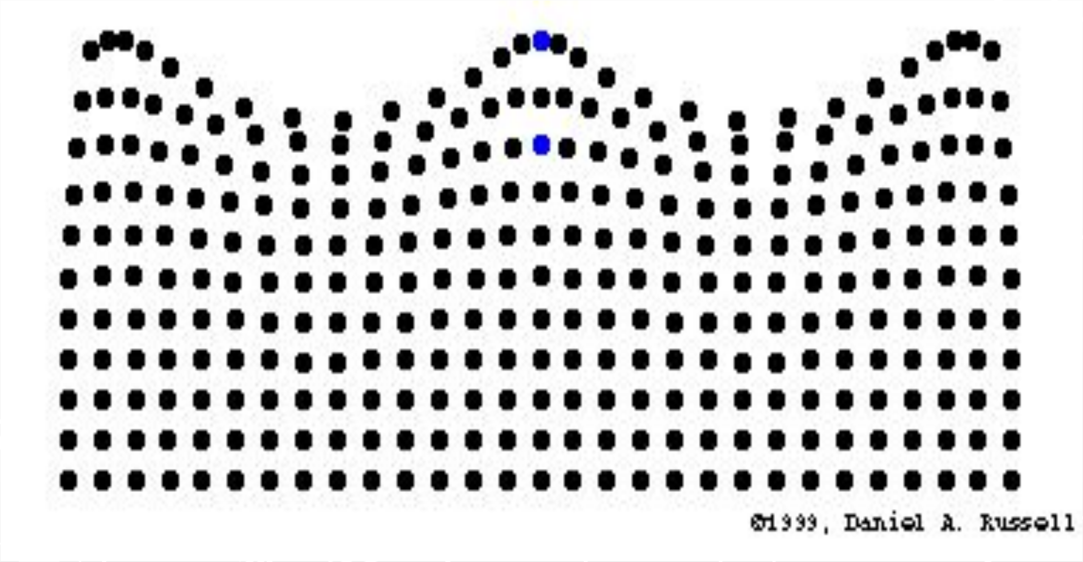
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cdot\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x\right) =$$

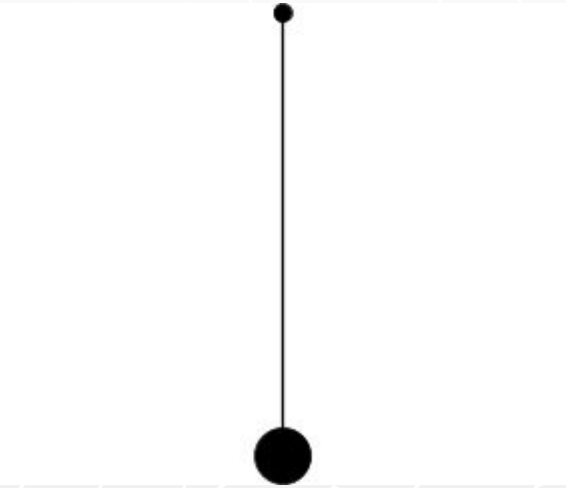
$$\sqrt{A^2+B^2}\cdot\left(\cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi\right) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x-\varphi)$$

Здесь $\sqrt{A^2+B^2}$ - амплитуда колебания,

а смещение по фазе φ находить по формуле $\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A}}$

Напоминалка из физики:
Чем волны отличаются от колебаний? – Связями между частицами!





$$z(t,x) = A\sin(\omega t - kx + \varphi) \qquad x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

комплексная форма с частотой и волновым числом

$$z(t,x) = \mathrm{Im}\left[A\exp(i\left(kx - \omega t + \varphi\right)\right] \qquad x(t) = \mathrm{Re}\left\{Ae^{i(\omega t + \varphi)}\right\}$$

Техника получения волновых решений

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + U\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v = 0$$

Будем искать производные от $v(t,x) = e^{i(kx-\omega t)}$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -i\omega e^{i(kx-\omega t)} = -i\omega \cdot v \quad \frac{\partial v}{\partial x} = ike^{i(kx-\omega t)} = ik \cdot v \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = \omega k \cdot v \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -k^2 \cdot v$$

Подставим в уравнение и вынесем общий множитель - $v\left(\omega k - Uk^2 + \beta\right) = 0$

Ясно, что частное решение вида $v(t,x) = e^{i(kx-\omega t)}$ будет существовать, только если частота и волновое число связаны условием

$$\boxed{\omega k - Uk^2 + \beta = 0}$$

Оно называется ДИСПЕРСИОННЫМ СООТНОШЕНИЕМ

Фазовая скорость волны Россби

Для понимания смысла дисперсионного соотношения выделим фазу гармоники

$$v(t,x)=\mathrm{Re}\left[e^{i(kx-\omega t)}\right]=\cos(kx-\omega t)=\cos\phi \Rightarrow \boxed{\phi = kx-\omega t}$$ - фаза косинуса

Условие постоянства фазы при перемещении : $\dfrac{d\phi}{dt}=0=\dfrac{d}{dt}\left(kx-\omega t\right)=0$

Отсюда скорость изменения положения фазы определяется равенством

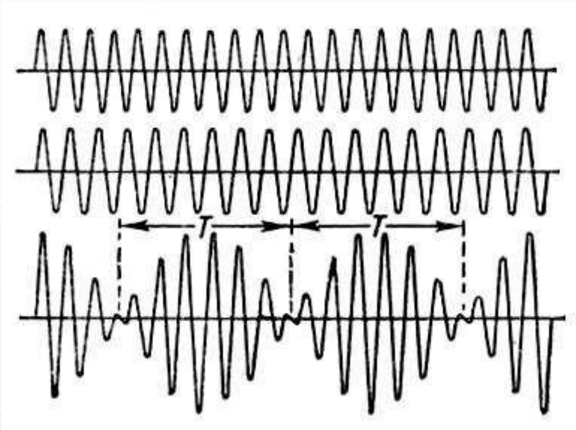
$$k\frac{dx}{dt}=\omega \text{ или } \frac{dx}{dt}=\boxed{\boxed{c=\frac{\omega}{k}}}=\left(\frac{2\pi}{T}\right)\Big/\left(\frac{2\pi}{L}\right)=\frac{L}{T}$$

c это фазовая скорость волны, длиной L и с периодом T

Из дисперсионного соотношения следует, что для волн Россби

$$\omega k-Uk^2+\beta=0 \Rightarrow \frac{\omega}{k}=\boxed{\boxed{c=U-\frac{\beta}{k^2}}}$$

Групповая скорость волн



При сложении колебаний с близкими частотами возникают <u>биения.</u>

$$\xi_1(x,t) = a\cdot \mathrm{Cos}(\omega t - kx)$$

$$+$$

$$\xi_2(x,t) = a\cdot \mathrm{Cos}[(\omega+\Delta\omega)t - (k+\Delta k)x]$$

$$\xi(x,t) = 2a\cdot \mathrm{Cos}\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\cdot \mathrm{Cos}(\omega t - kx).$$

Фазовая скорость распространения <u>огибающей</u> (амплитуды) волнового пакета называется групповой скоростью

$$\boxed{c_g = \lim_{\Delta k\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dck}{dk} = c + k\frac{dc}{dk}}$$

Поскольку мощность волны (энергия за единицу времени) пропорциональна квадрату ее амплитуды, то скорость распространения амплитуды –

<u>групповая скорость– это и скорость переноса волной энергии</u>

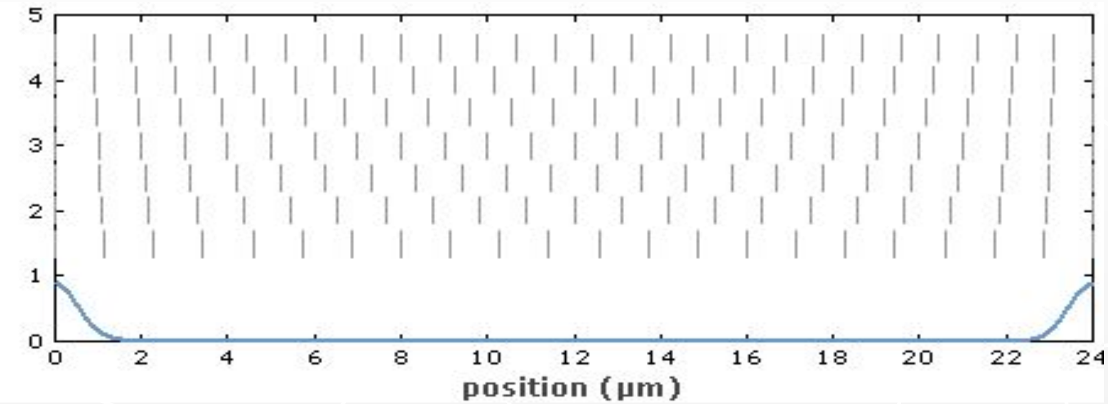
Групповая скорость волн Россби

$$c_g = c + k\frac{dc}{dk} = \left(U - \frac{\beta}{k^2}\right) + k\left(U - \frac{\beta}{k^2}\right)'_k = U - \frac{\beta}{k^2} + k\left(\frac{2\beta}{k^3}\right) \Rightarrow$$

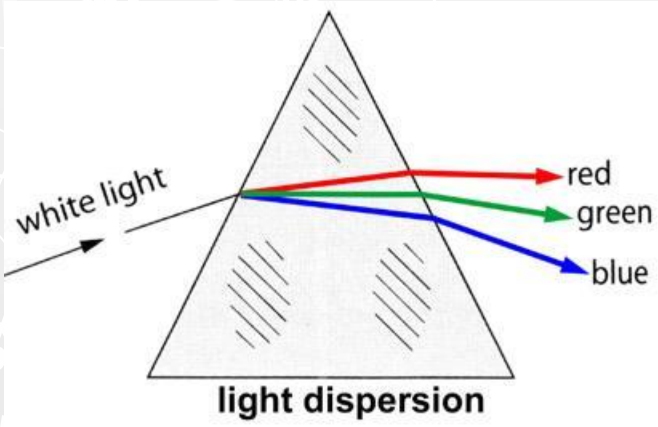
$$\boxed{c_g = U + \frac{\beta}{k^2}}$$

- **Групповая скорость волн Россби всегда положительна, т.е. пакет волн и его энергия всегда распространяются <u>на восток</u>**
- **Фазовая скорость очень длинных волн (k=2п/L) может быть отрицательной, т.е. они перемещаются на запад, а короткие волны – на восток**

Дисперсия



Если в среде нет дисперсии, то волновой пакет перемещается, сохраняя форму.
Если дисперсия есть – он распадается.



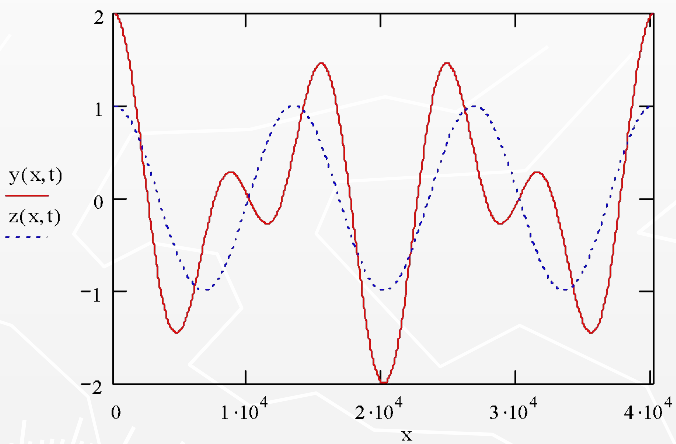
Дисперсия – следствие зависимости фазовой скорости от длины волны (волнового числа)
Т.к. для волн Россби

$$c = U - \beta/k^2,$$

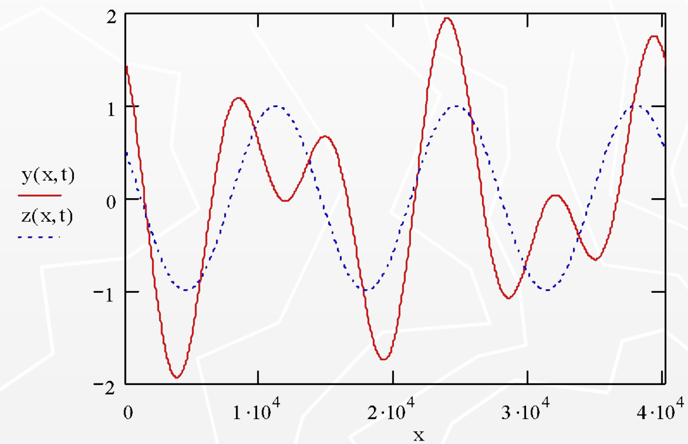
То у них есть дисперсия и в атмосфере волновые пакеты меняют форму

Дисперсия волн Россби
($K1=3/R=4{,}7\cdot10^{-4}$км$^{-1}$; $K2=5/R=7{,}8\cdot10^{-4}$км$^{-1}$)

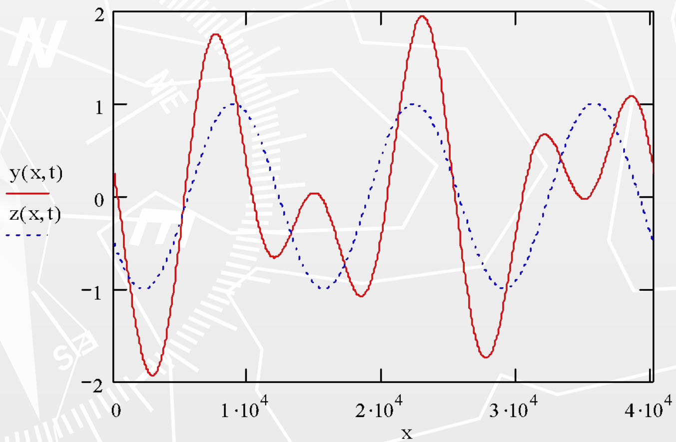
t=0



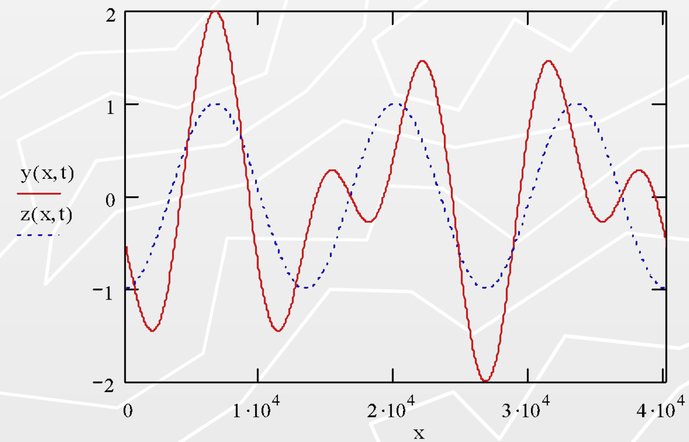
t=30



t=15



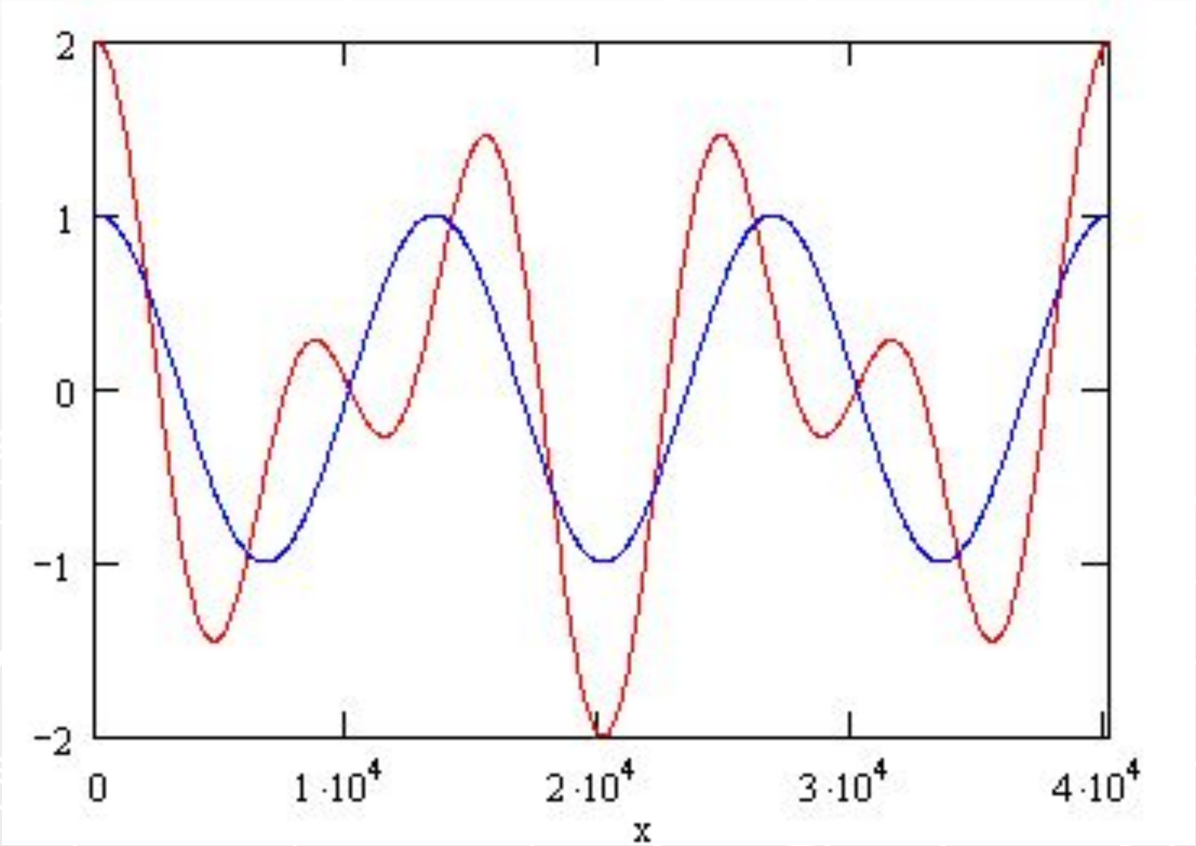
t=45



синий пунктир – $z(x,t) := \cos[k1\cdot(x - c1\cdot t)]$

красная сплошная–- $y(x,t) := \cos[k1\cdot(x - c1\cdot t)] + \cos[k2\cdot(x - c2\cdot t)]$

Итак, для атмосферы характерны собственные колебания большой длины и низкой частоты, обладающие диперсией



Вынужденные волны Россби

- **Мы рассмотрели свободные волны Россби, которые возникают от начального импульса и должны затухать в диссипативной атмосфере.**
- **Но волны Россби всегда существуют.**
- **<u>Что из поддерживает?</u>**
  - **РАЗЛИЧИЕ ВЫСОТ РЕЛЬЕФА ЗЕМЛИ (ГОРЫ И КОНТИНЕНТЫ)**
  - **РАЗЛИЧИЕ ТЕМПЕРАТУР ОКЕАНА И СУШИ**
- **Эти факторы приводят к возникновению на верхней границе пограничного слоя вертикальных токов, которые и возбуждают волны Россби путем резонанса**

Гармонический анализ = разложение в ряд Фурье

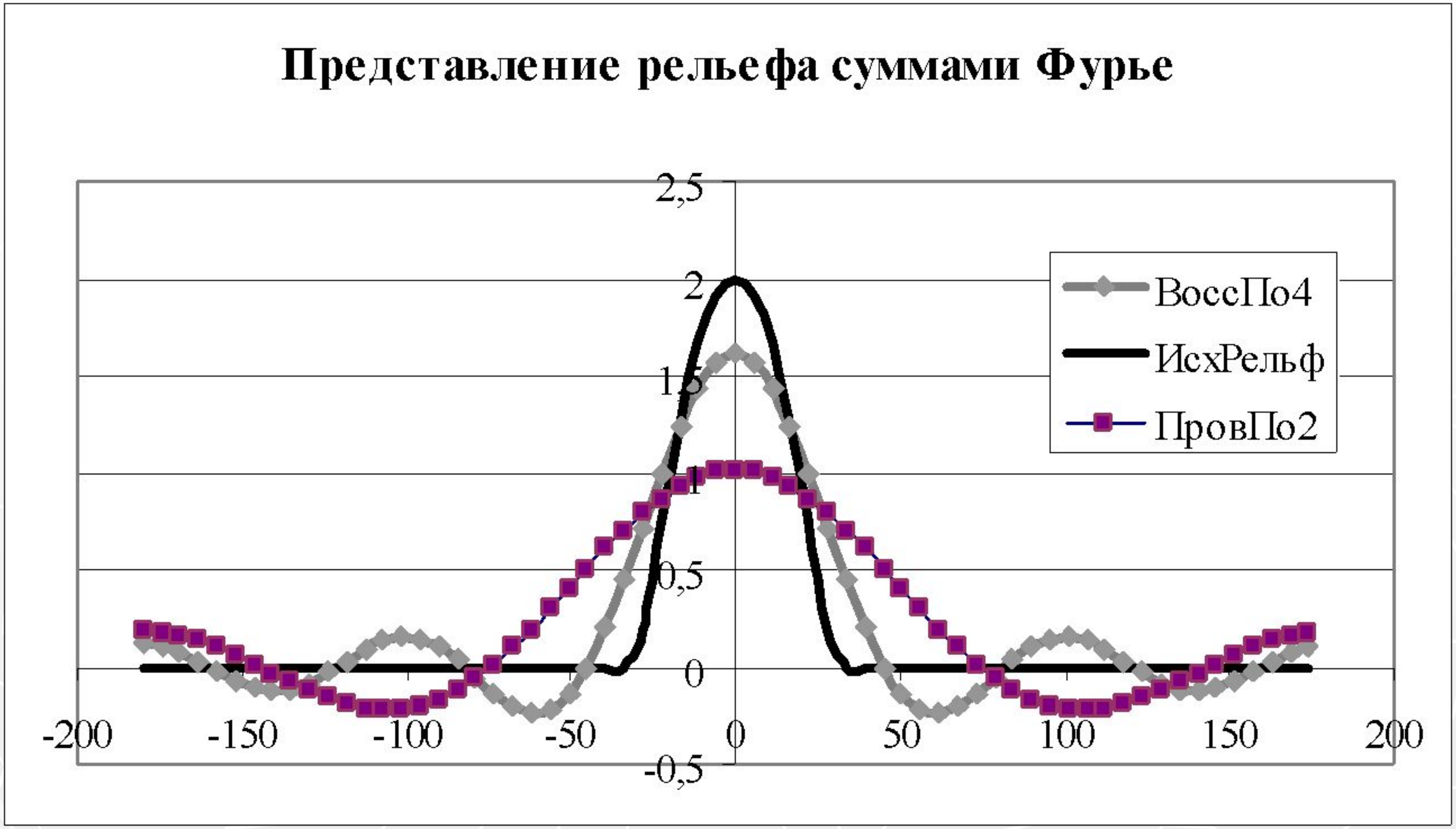
Все метеорологические поля периодичны по долготе и по широте вследствие близкой к сфере формы земной поверхности. Если функция имеет период *L*, то ее можно представить в виде бесконечного ряда Фурье по синусам и косинусам в виде

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{L}\right),$$

причем

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cdot\cos\frac{2\pi nx}{L}\,dx, \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cdot dx$$

$$\text{и } b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cdot\sin\frac{2\pi nx}{L}\,dx$$



$h(x) = 0,\ x \in \left[\frac{L-l}{2}\right] \cup \left[\frac{L+l}{2}\right]$ при иначе $h_0 \cos^2\left(\pi \frac{x}{l}\right)$ - исх. рельеф

$h_{12}(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right) + a_2 \cos\left(4\pi \frac{x}{L}\right)$ - пров. по 2 гармоникам

$h_{14}(x) = h_{12}(x) + a_3 \cos\left(6\pi \frac{x}{L}\right) + a_4 \cos\left(8\pi \frac{x}{L}\right)$ - восст. по 4 гармоникам

Топографические волны Чарни-Элиассена

**Юлий Чарни,США,
Один из отцов
численного
прогноза погоды**

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{f}\frac{d\Omega + f}{dt} \quad \Leftarrow \int_h^H (\ \ )\,dz$$

$$0 - w_h = \frac{(H-h)}{f}\frac{d\Omega + f}{dt} \Rightarrow \frac{d\Omega + f}{dt} = -\frac{f_0}{H}w_h$$

$$w_h = u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \left(v\frac{\partial}{\partial y}\right)\beta y = -\frac{f_0}{H}U\frac{\partial h}{\partial x}}$$

Простейшая модель топографических волн Россби

Решение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\left(v\frac{\partial}{\partial y}\right)\beta y=-\frac{f_0}{H}U\frac{\partial h}{\partial x}\ \text{введем функцию тока}\ \ v=\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\text{Уравнение примет вид:}\ \frac{\partial^3\psi}{\partial t\partial x^2}+U\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{f_0}{H}U\frac{\partial h}{\partial x}$$

Это линейное уравнение. Его решение является суммой общего решения однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения. Однородное уравнение – это уравнение свободных волн Россби. Оно уже рассмотрено.

Ищем стационарное частное решение неоднородного уравнения с гармонической правой частью

$$U\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{f_0}{H}U\frac{\partial h}{\partial x}\ \text{при}\ \ h(x)=h_0e^{ikx}$$

решение $\psi(x)=\psi_0e^{ikx}$ (фаза должна совпадать с вынуждающей)

после подстановки и диффееренцирования получим

$$\psi_0\cdot\left(-\cancel{ik}\cdot k^2U+\cancel{ik}\,\beta\right)=-\frac{f_0h_0U}{H}\cancel{ik}\Rightarrow\psi_0=\frac{f_0h_0}{H\cdot\left(k^2-\beta/U\right)}$$

Особенности вынужденных топографией волн Россби

- Наличие резонансных волновых чисел, амплитуды которых резко усиливаются
- Наличие противоположной реакции длинных и коротких волн на топографическое возбуждение:
  - Волны длиннее резонансных ($K^2<\beta/U$) прогибаются над возвышенностями вниз
  - Волны короче резонансных ($K^2>\beta/U$) выгибаются вверх над возвышенностями

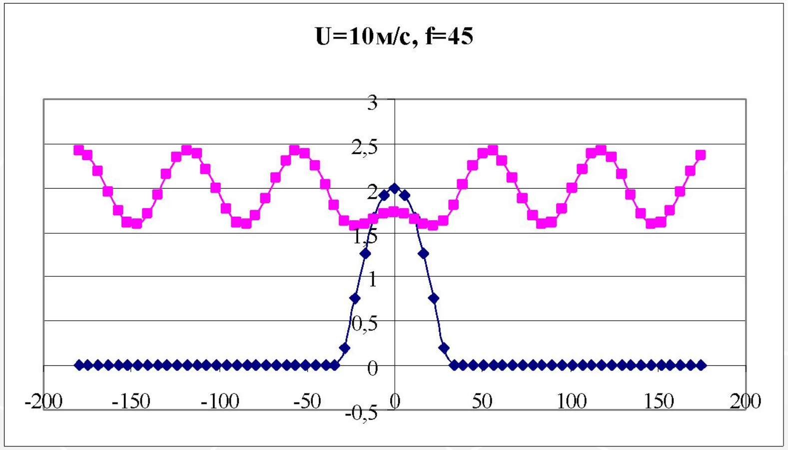
Граничные волновые числа и длины волн.

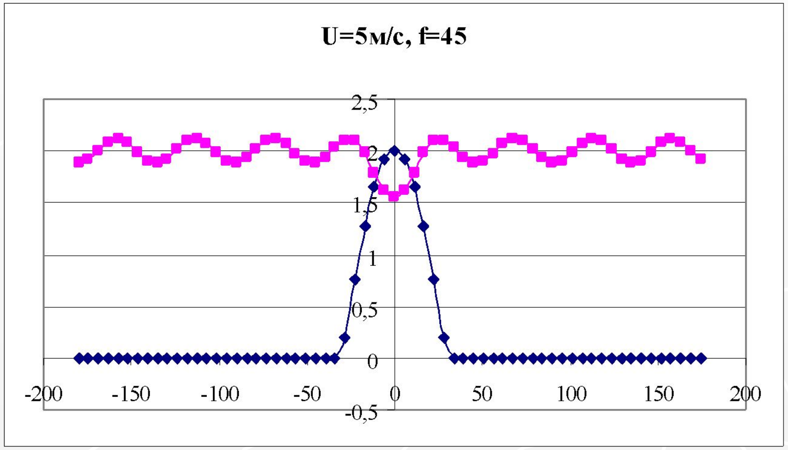
		Ск. Ветра	5	10	15	20	25	30	м/с
Шир.круг(км)	широта	бета	18	36	54	72	90	108	км/ч
38842	15	7,9E-05	13	9	7	6	6	5	
36445	25	7,4E-05	12	8	7	6	5	5	
32940	35	6,7E-05	10	7	6	5	5	4	
28434	45	5,8E-05	8	6	5	4	4	3	
23065	55	4,7E-05	6	4	3	3	3	2	
16994	65	3,5E-05	4	3	2	2	2	2	
10408	75	2,1E-05	2	1	1	1	1	1	
3505	85	7,1E-06	0	0	0	0	0	0	

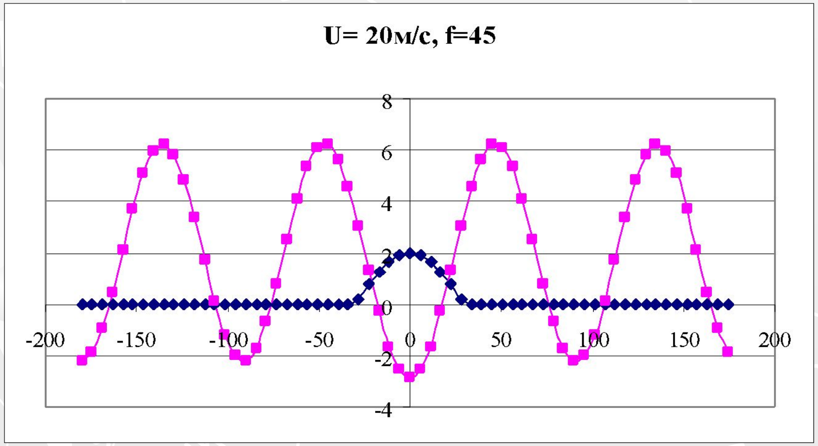
		Ск. Ветра	5	10	15	20	25	30	м/с
Шир.круг(км)	широта	бета	18	36	54	72	90	108	км/ч
38842	15	7,9E-05	3000	4200	5200	6000	6700	7300	
36445	25	7,4E-05	3100	4400	5400	6200	6900	7600	
32940	35	6,7E-05	3300	4600	5600	6500	7300	8000	
28434	45	5,8E-05	3500	5000	6100	7000	7800	8600	
23065	55	4,7E-05	3900	5500	6700	7800	8700	9500	
16994	65	3,5E-05	4500	6400	7900	9100	10100	11100	
10408	75	2,1E-05	5800	8200	10000	11600	13000	14200	
3505	85	7,1E-06	10000	14100	17300	20000	22300	24500	

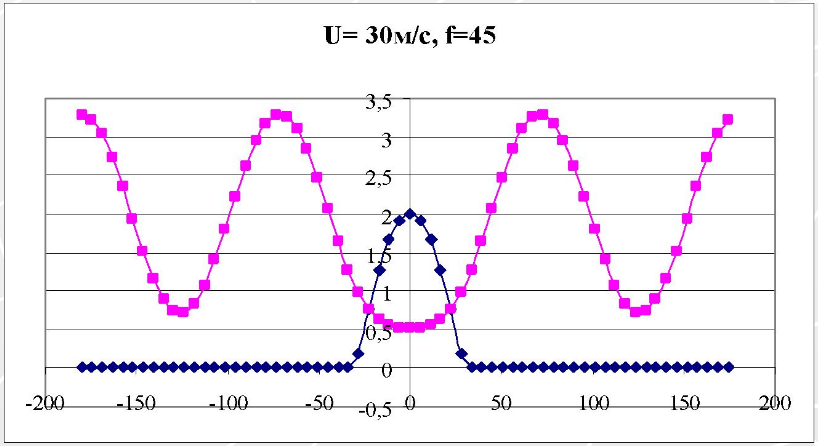
При переходе через эти границы реакции топографических волн Россби на гармоники рельефа меняется на противоположную

Генерация топографическими возмущениями – главный механизм постоянного возбуждения волн Россби



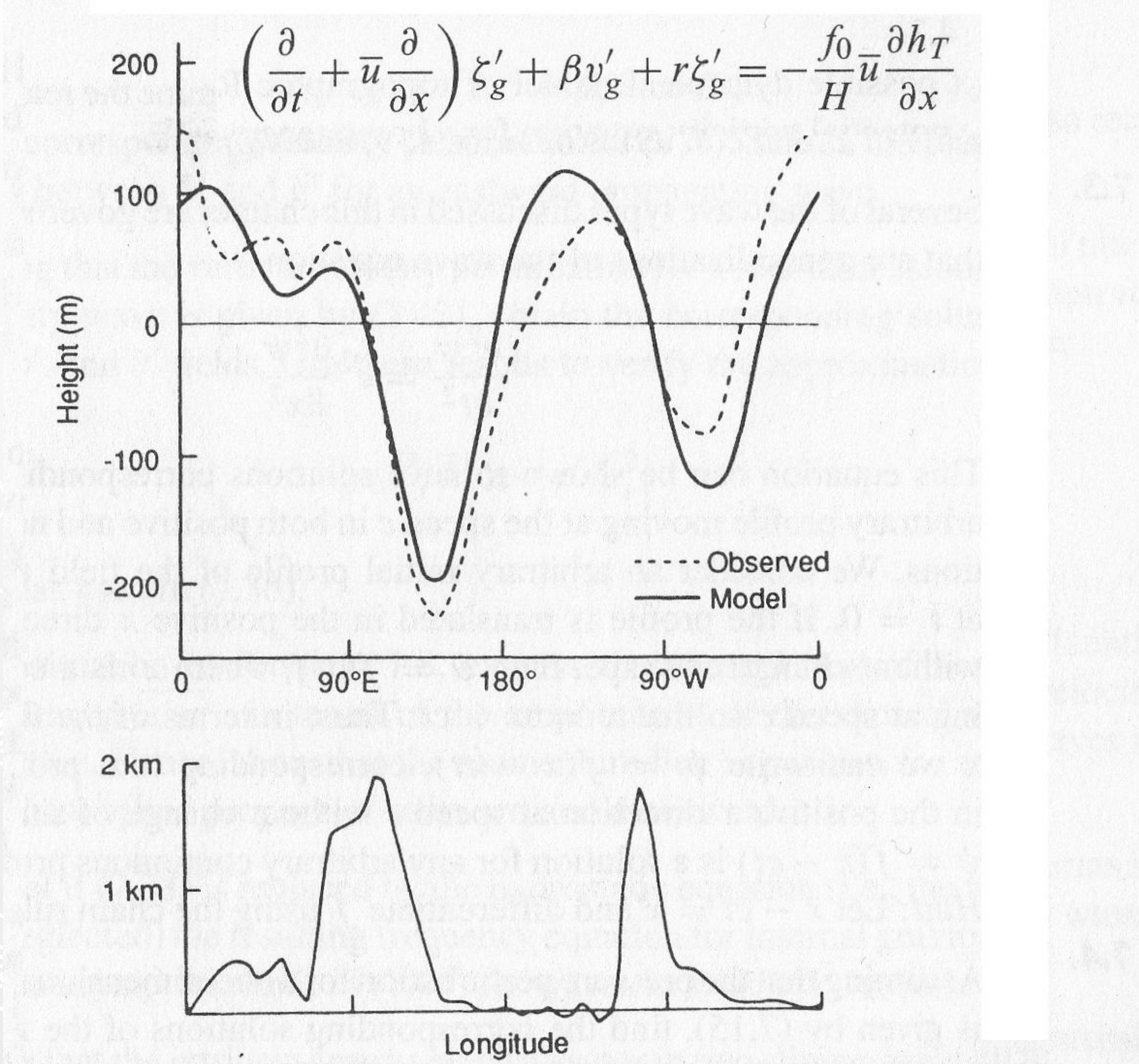






Характер отклика атмосферы зависит от скорости среднего потока, т.е. запаса накопленной кинетической энергии

Пример Чарни-Элиассена топографических волн при учете трения



(Top) Longitudinal variation of the disturbance geopotential height ($\equiv f_0\Psi/g$) in the Charney–Eliassen model for the parameters given in the text (solid line) compared with the observed 500-hPa height perturbations at 45˚N in January (dashed line). (Bottom) Smoothed profile of topography at 45˚N used in the computation. (After Held, 1983.)

- Наличие резонансных явлений объясняет быстрые перестройки атмосферной циркуляции
- Но как объясняется наличие внезапных стратосферных потеплений?
- И здесь проявляются волны Россби, но уже трехмерные, распространяющиеся и по вертикали

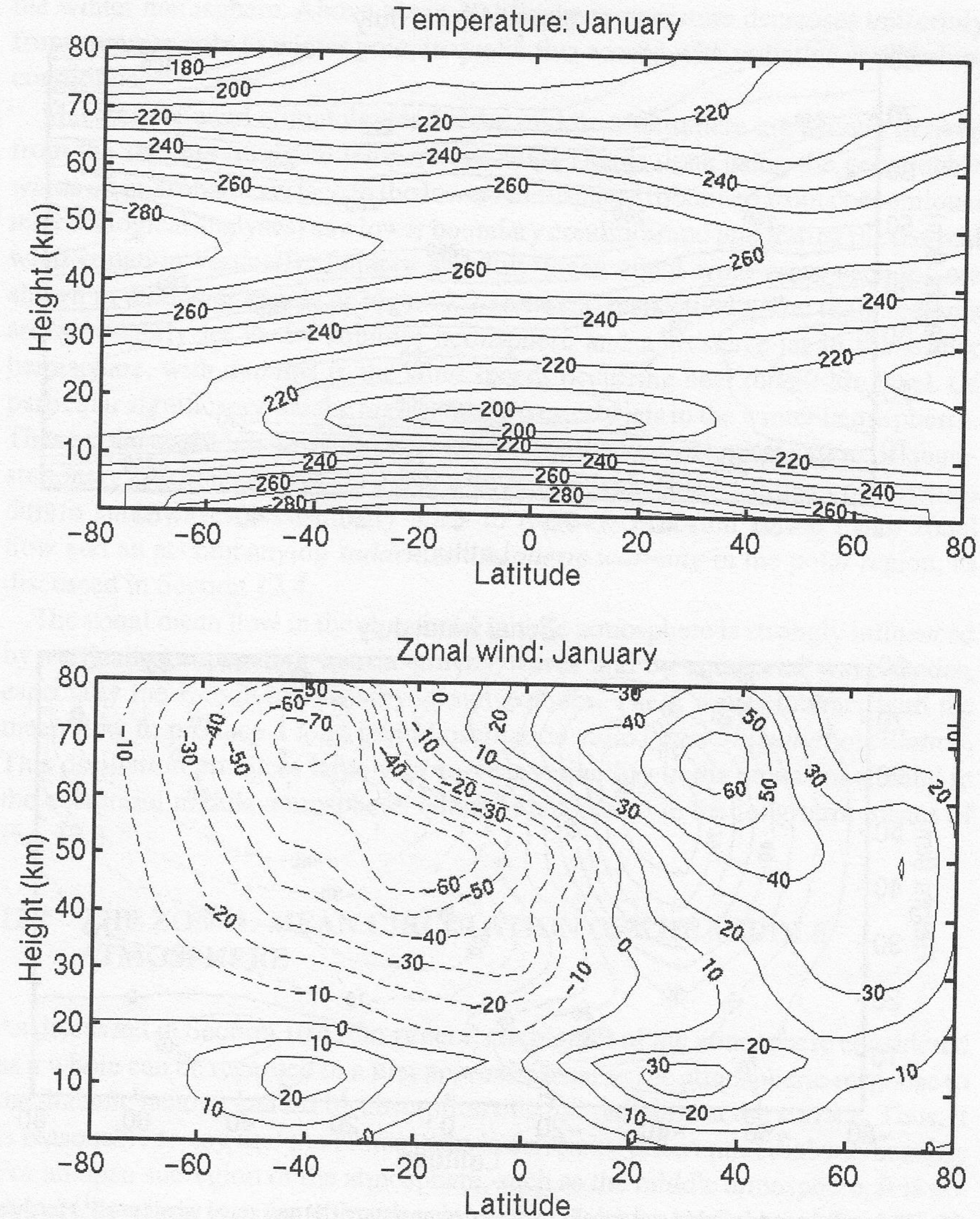
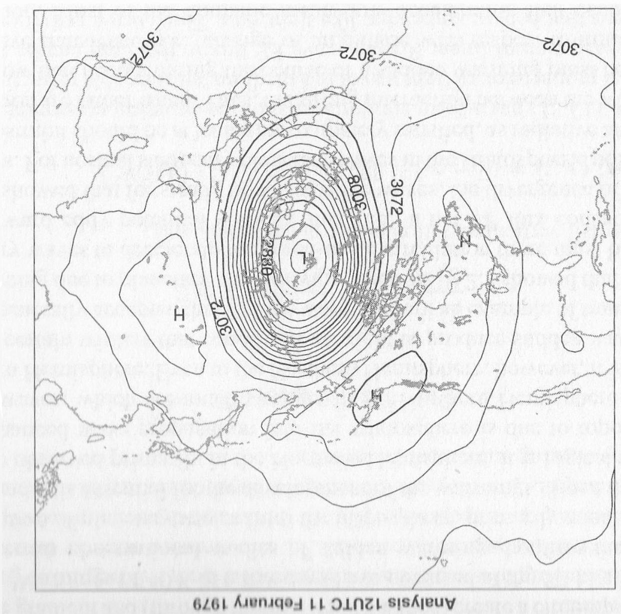
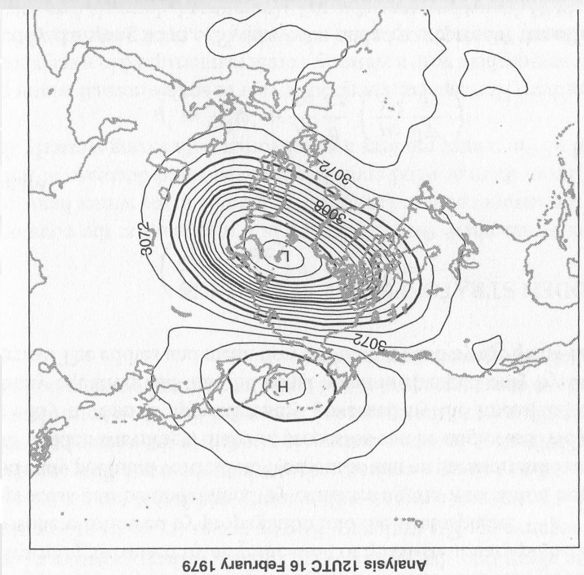


Fig. 12.2 Observed monthly and zonally averaged temperature (K) and zonal wind ($m\,s^{-1}$) for January. (Based on Fleming et al., 1990.)

- **Обычно в стратосфере на экваторе тем-ра минимальна, а максимум на летнем полюсе и зимней широте 45^0. Вследствие термического ветра быстрое убывание температуры от 45 к полюсу зимнего полушария приводит к сильному зональному вращению атмосферы со сдвигом западных ветров с высотой**

Справка – что такое стратосферные потепления?





- **Однако примерно через год нормальная картина зимней стратосферы (11 февраля 1979)**
- **Внезапно разрушается, за несколько дней причем в самой середине зимы (16 февраля 1979)**
- **На рис. Показан распад стратосферного циклона (волна с в.ч.1) с образованием сначала дуплета**
- **А потом двух циклонов (волна с в.ч. 2) См. след слайд**

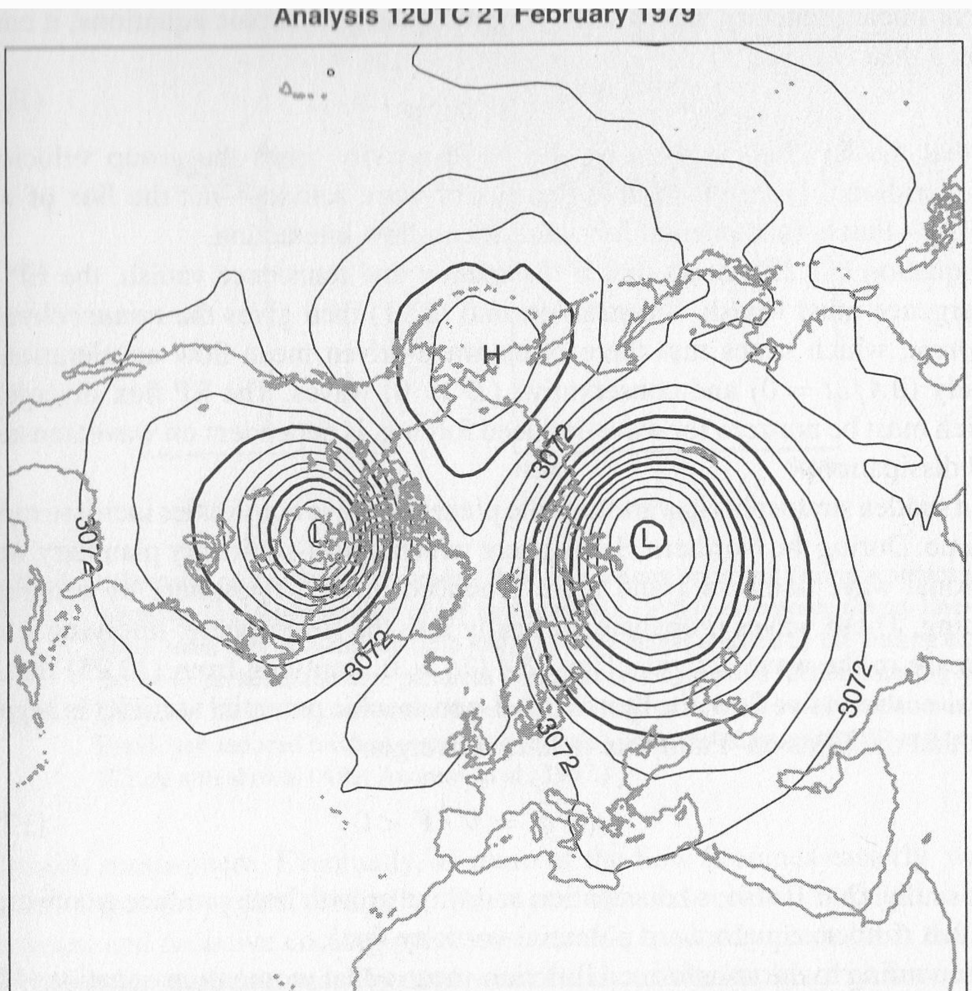


Fig. 12.10 10 hPa geopotential height analyses for February 11, 16, and 21, 1979 at 12UTC showin breakdown of the polar vortex associated with a wave number 2 sudden stratospheri warming. Contour interval: 16 dam. Analysis from ERA-40 reanalysis courtesy of th European Centre for Medium-Range Weather Forecasts (ECMWF).

- **При этом полюс теплеет (иногда на 40К на высоте 50 гПа) меридиональный температурный градиент меняет знак**
- **И по закону термического ветра в районе полюса возникает антициклональн ый восточный вихрь**

Теория Чарни-Драйзина вертикального распространения волн Россби

Используем трехмерное уравнение потенциального вихря

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla\right) PV = 0 \quad \text{где} \qquad PV = \frac{g}{f}\left(\Delta H + \frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\xi^2 \frac{\partial H}{\partial \xi}\right) + f$$

Линеаризуем его относительно зонального ветра:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right) PV' + \beta v = 0$$

Введем функцию тока $\psi = \dfrac{gH'}{f_0} \Rightarrow v = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}, PV' = \Delta\psi + \dfrac{1}{m^2}\dfrac{\partial}{\partial \xi}\xi^2 \dfrac{\partial \psi}{\partial \xi}$

Чтобы не возится с маленьким $\xi = \dfrac{p}{p_0}$ вернемся к высоте z

$$\frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\xi^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{f_0}{\rho_0 N^2}\frac{\partial}{\partial z}\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \Rightarrow \boxed{PV' = \Delta\psi + \frac{f_0}{\rho_0 N^2}\frac{\partial}{\partial z}\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}}$$

получим уравнение возмущений функции тока в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{f_0}{\rho_0 N^2}\frac{\partial}{\partial z}\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Собственные колебания уравнения потенциальвихря

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{f_0}{\rho_0 N^2}\frac{\partial}{\partial z}\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0}$$

Ищем в виде возмущений функции тока

$$\psi\left(x,y,z,t\right)=\Psi(z)\cdot\exp\left[i\cdot\left(kx+ly-kct\right)+\frac{z}{2H}\right]$$

учитывая, что $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\left(k^2+l^2\right)\Psi(z)\cdot\exp\left[i\cdot\left(kx+ly-kct\right)+\dfrac{z}{2H}\right],$

и что $\dfrac{f_0}{N^2\rho_0}\dfrac{\partial}{\partial z}\rho_0\dfrac{\partial\psi}{\partial z}=\dfrac{f_0}{N^2}\left(\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}-\dfrac{1}{4H^2}\Psi\right)\exp\left[i\cdot\left(kx+ly-kct\right)+\dfrac{z}{2H}\right]$

Т.е. $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\dfrac{f_0}{\rho_0 N^2}\dfrac{\partial}{\partial z}\rho_0\dfrac{\partial\psi}{\partial z}=$

$$\left[\frac{f_0}{N^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}-\left(\frac{f_0}{4N^2H^2}+\left(k^2+l^2\right)\right)\Psi(z)\right]\exp\left[i\cdot\left(kx+ly-kct\right)+\frac{z}{2H}\right]$$

Это *дисперсионное соотношение* для данного вида трехмерных волн Россби

Получим уравнение для амплитуды собственных колебаний

$$\psi\left(x,y,z,t\right)=\Psi(z)\cdot\exp\left[i\cdot\left(kx+ly-kct\right)+\frac{z}{2H}\right]$$

в виде

$$\boxed{\frac{d^2\Psi}{dz^2}+m^2\Psi(z)=0, \quad \text{где} \quad m^2=\frac{N^2}{f_0}\left[\frac{\beta}{(U-c)}-\left(k^2+l^2\right)\right]-\frac{1}{4H^2}}$$

Это уравнение имеет колебательные решения только при $m^2>0$

Т.е. для стационарных волн $(c=0)$ должно выполняться условие

$$\frac{\beta}{U}>\left(k^2+l^2\right)+\frac{f_0}{4N^2H^2} \text{ или } \boxed{0<U<\beta\cdot\left[\left(k^2+l^2\right)+\frac{f_0}{4N^2H^2}\right]^{-1}=U_c}$$

Таким образом распространение волн Россби по вертикали в стратосферу возможно только при западных ветрах в стратосфере, причем меньших некоторого критического значения *Uc*

- **Таким образом распространение волн Россби по вертикали в стратосферу возможно только при западных ветрах в стратосфере, причем меньших некоторого критического значения *Uc***
- **Летом в стратосфере всегда средний поток направлен на запад, что и препятствует попаданию туда волн Россби**
- **Зимой иногда возникают западные потоки с длинами волн k=1,l=2, для которых критические скорости около 13-14 м/с и распространение вверх возможно**