



**Динамика пограничного слоя
атмосферы**

Основные вопросы:

- Определение понятия планетарный и внутренний ПС, значение для атмосферы, специфические процессы
- Тепловой и динамический ПС. Суточный ход стратификации в ПС
- Что такое динамическая турбулентность? Смысл и определение числа Рейнольдса
- Что такое конвективная турбулентность? Смысл и определение числа Реллея (Грасгофа)
- Назначение, смысл и определение числа Ричардсона
- Методика получения уравнений турбулентного ПС
- Суть проблемы замыкания
- Уравнение баланса энергии турбулентности (смысл слагаемых)
- Уметь оценить значение интегрального к-та турбулентности (ф-ла Лайхтмана)
- Постановка и решение задачи Экмана.
- Свойства «спирали Экмана»
- Вертикальные токи на верхней границе экмановского ПС и понятие «экмановское накачивание»

Свободная атмосфера

Граничная инверсия

Пограничный слой атмосферы ~ 1 km



Приземный слой атмосферы ~ 0.1 km



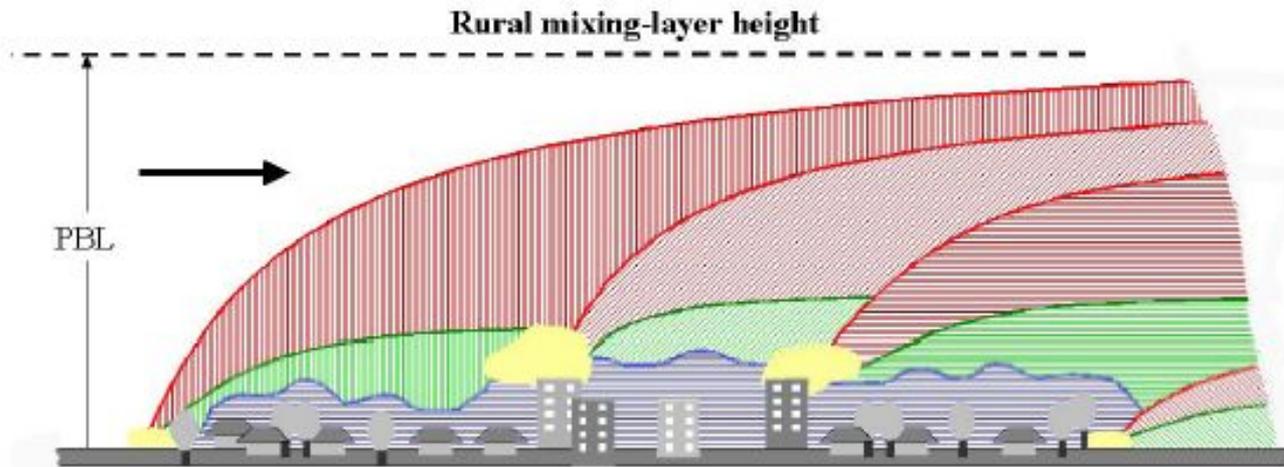
- Пограничный слой (ПС) - это слой, в котором характеристики атмосферы непосредственно и сильно зависят от взаимодействия с подстилающей поверхностью



Значение ПС

- Через него происходит приспособление атмосферы к свойствам подстилающей поверхности
- В нем наблюдается суточный ход метеорологических характеристик
- В нем генерируется турбулентность
- Он определяет интенсивность потоков тепла, влаги и аэрозолей в атмосферу

Горизонтальная неоднородность пп - причина образования внутренних пограничных слоев



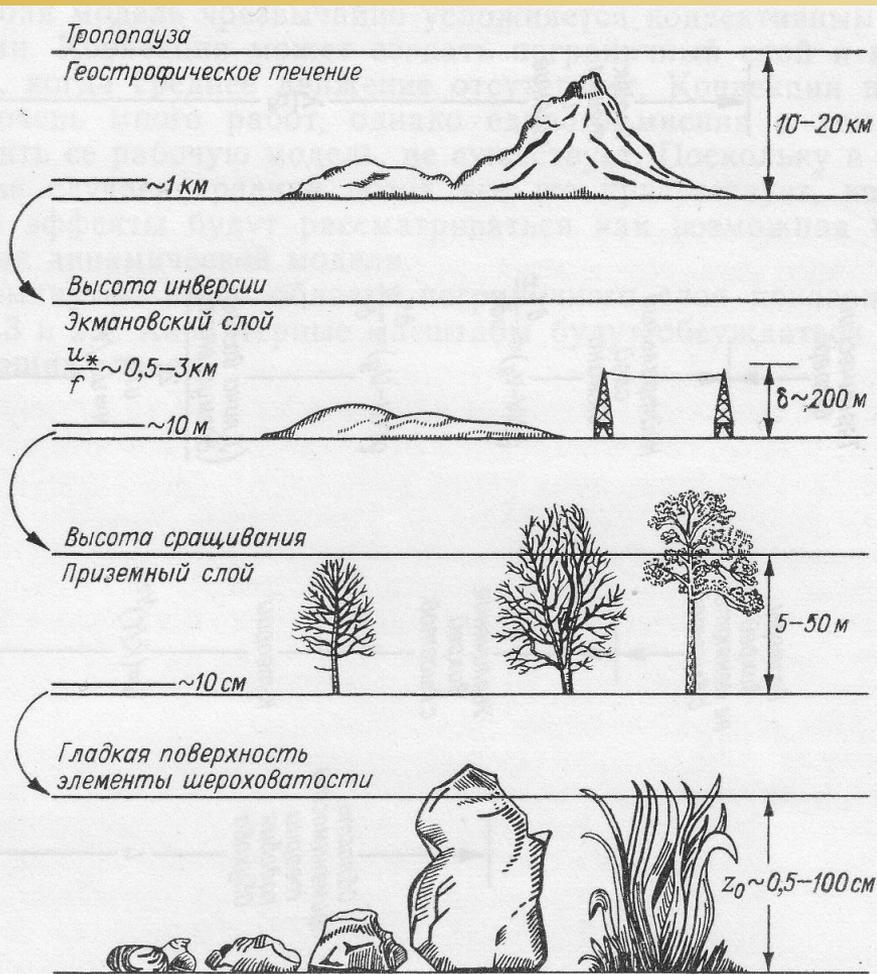
Schematics of boundary layer over an urban area. Red represents the urban internal boundary layers where advection processes are important. Green shows the inertial layers that are in equilibrium with the underlying surface and where Monin-Obukhov scaling applies. The blue region is the roughness layer that is highly inhomogeneous both in its vertical and horizontal structure. The yellow region represents adjustment between neighbourhoods with large accelerations and shear in the flow near the top of the canopy.

Courtesy of S.-E. Gryning

Атмосферные явления связанные с внутренними пограничными слоями

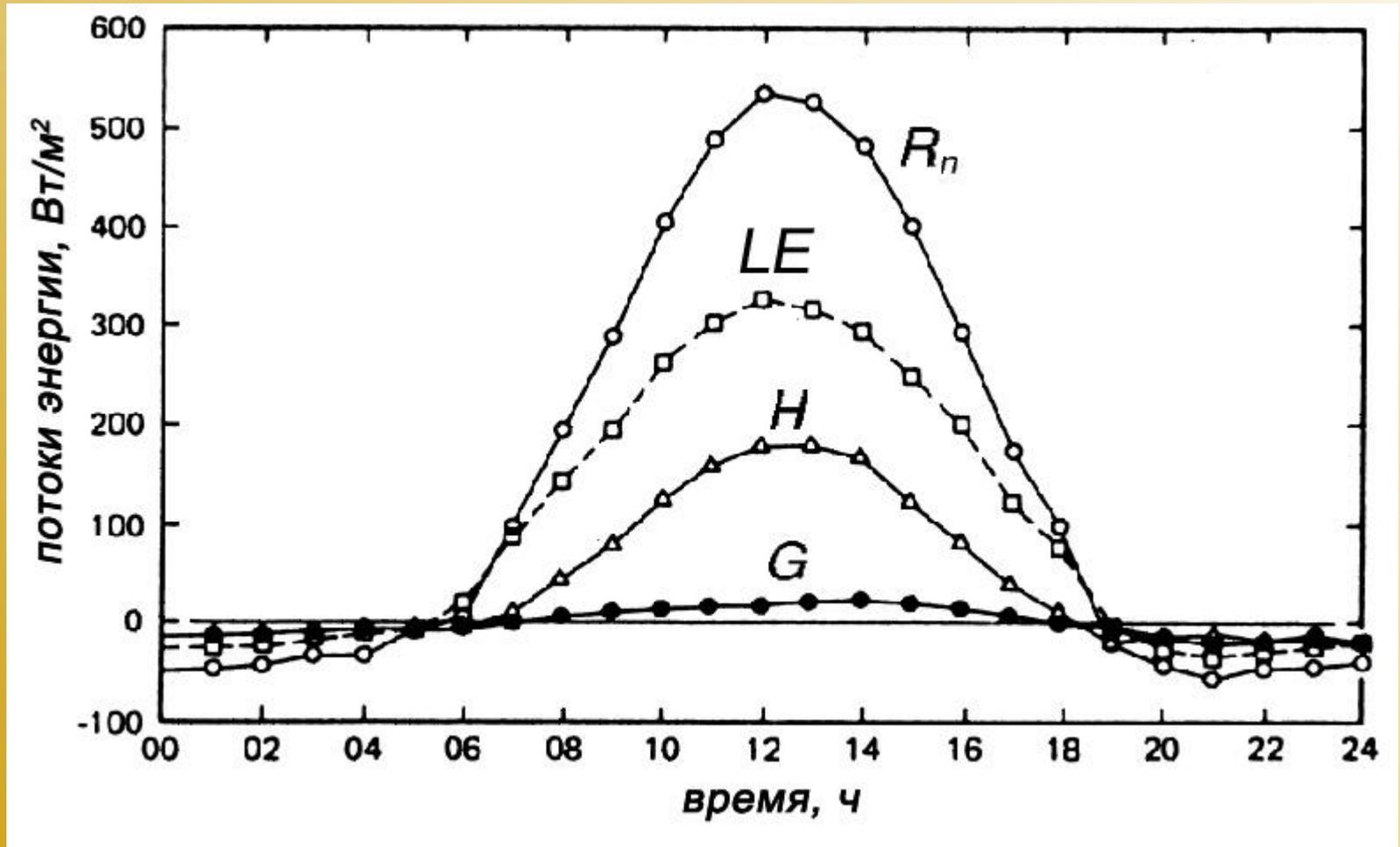
- Прибрежные фронты
- Приморские бризовые циркуляции
- Озерные бризы
- Фронты порывистости
- Конвективные явления - горизонтальные вихри «роллы», открытые/закрытые конвективные ячейки
- Антропогенные острова тепла
- Местные циркуляции над неоднородной подстилающей поверхностью
- Горно-долинные и стоковые ветры

Масштабы внутри ПС, вязкий подслоя



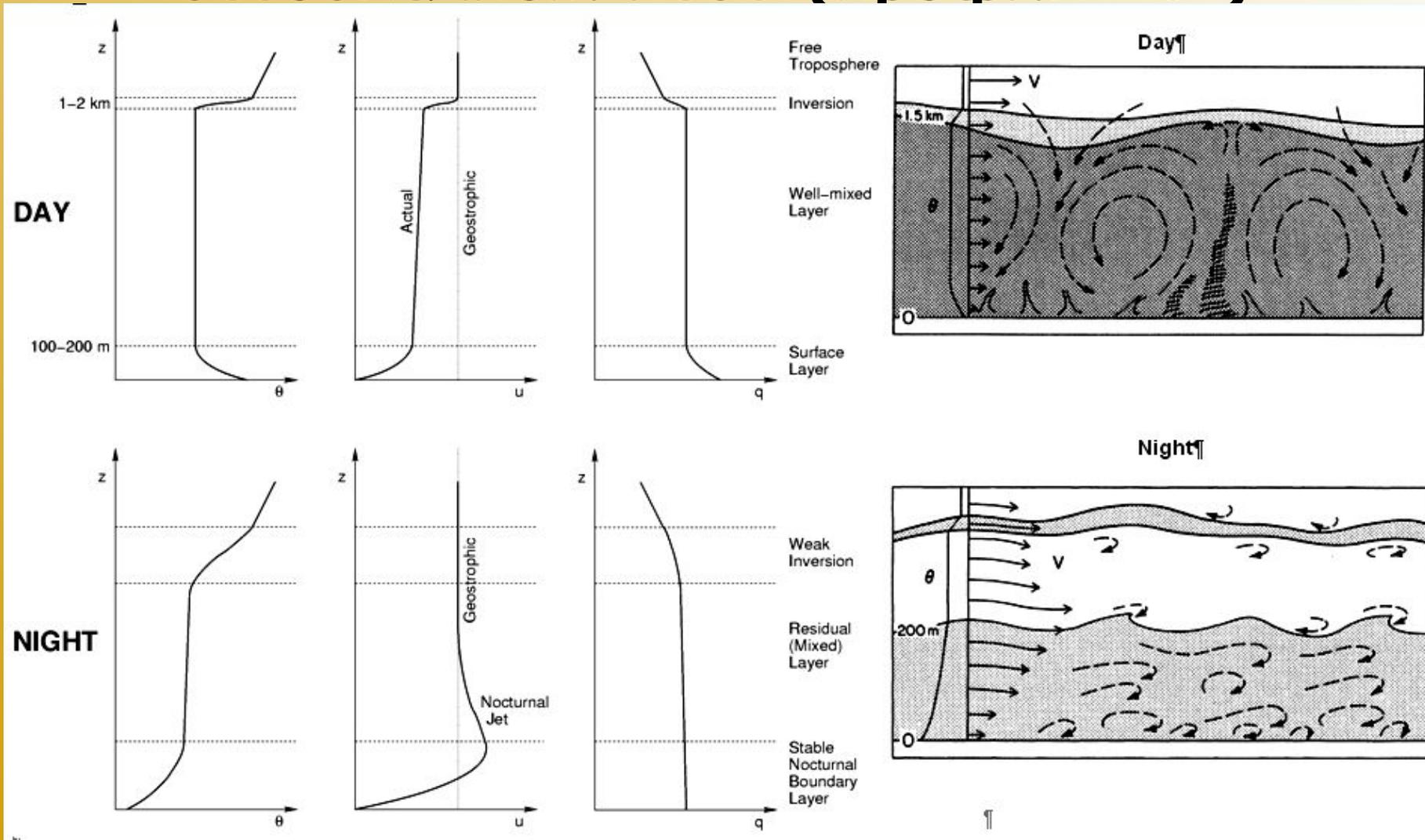
- Пограничный слой (ПС) - это слой, в котором характеристики атмосферы непосредственно и сильно зависят от взаимодействия с подстилающей поверхностью
- В конечном счете, это взаимодействие определяется молекулярной вязкостью, но она сосредоточена только в тонком ВЯЗКОМ ПОДСЛОЕ
- Выше него атмосферу уже можно считать идеальной жидкостью

Суточный ход потоков энергии у подстилающей поверхности



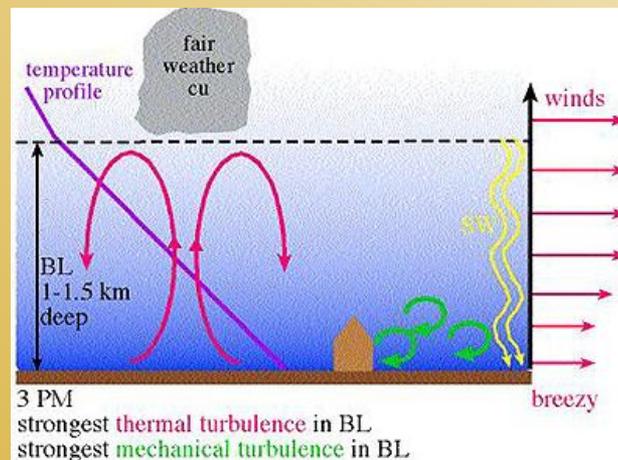
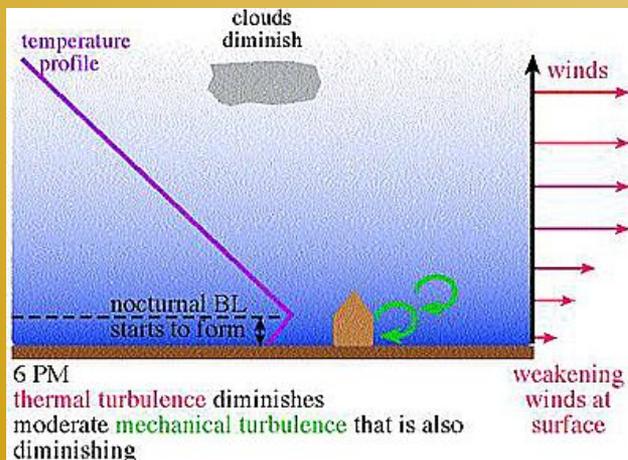
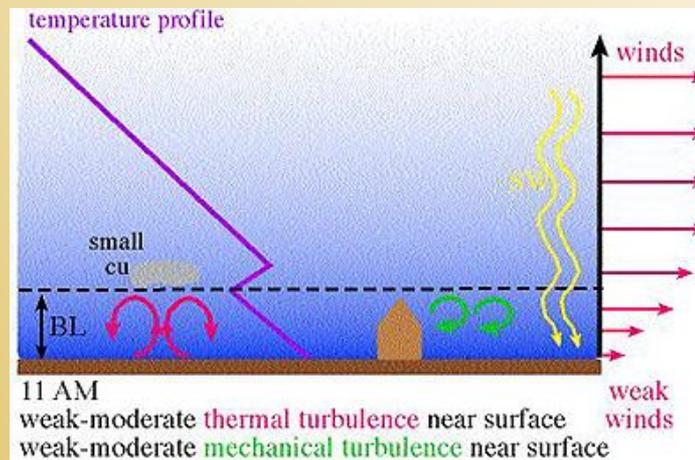
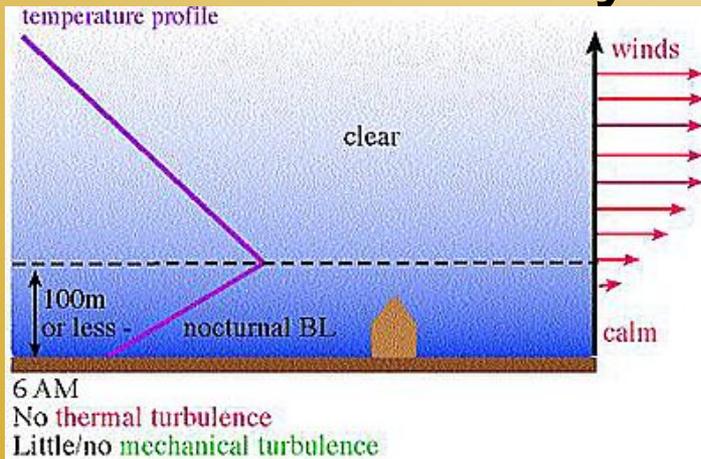
R_n — радиационный баланс, LE — затраты тепла на испарение, H — турбулентный поток тепла, G — поток тепла в почву

Структура ПС в суточном ходе при безоблачном небе (профиль θ)



Слева - характерные профили, справа - схематизация структуры

Схема этапов эволюции стратификации пограничного слоя атмосферы в суточном ходе



Строение ПС и его суточный ход

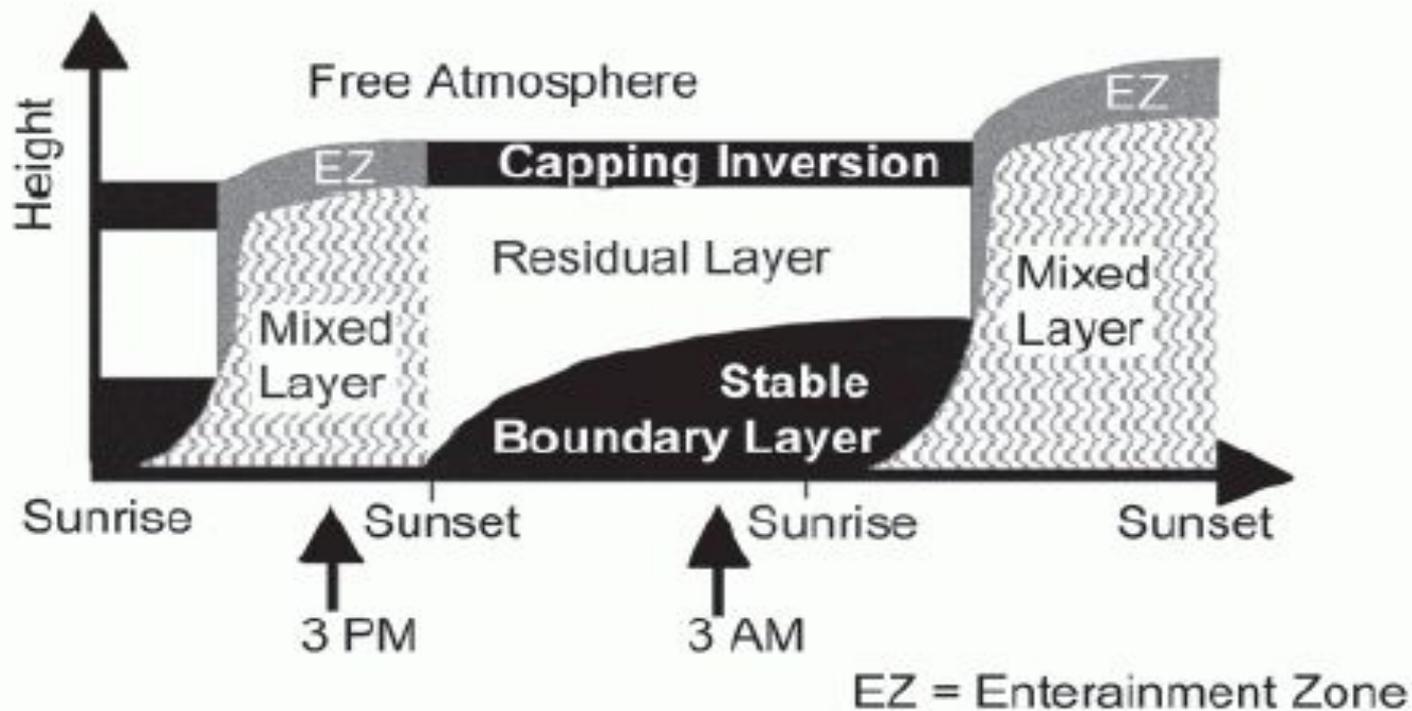
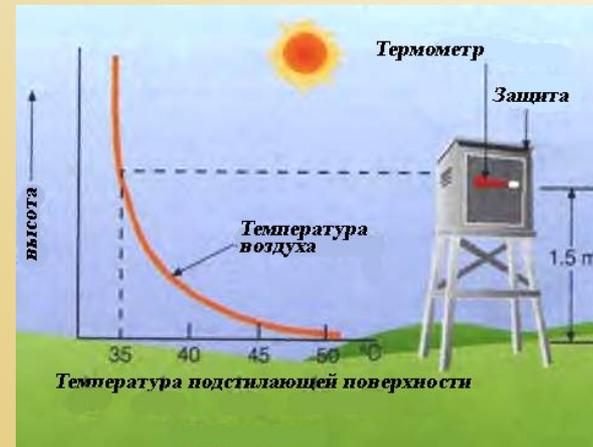
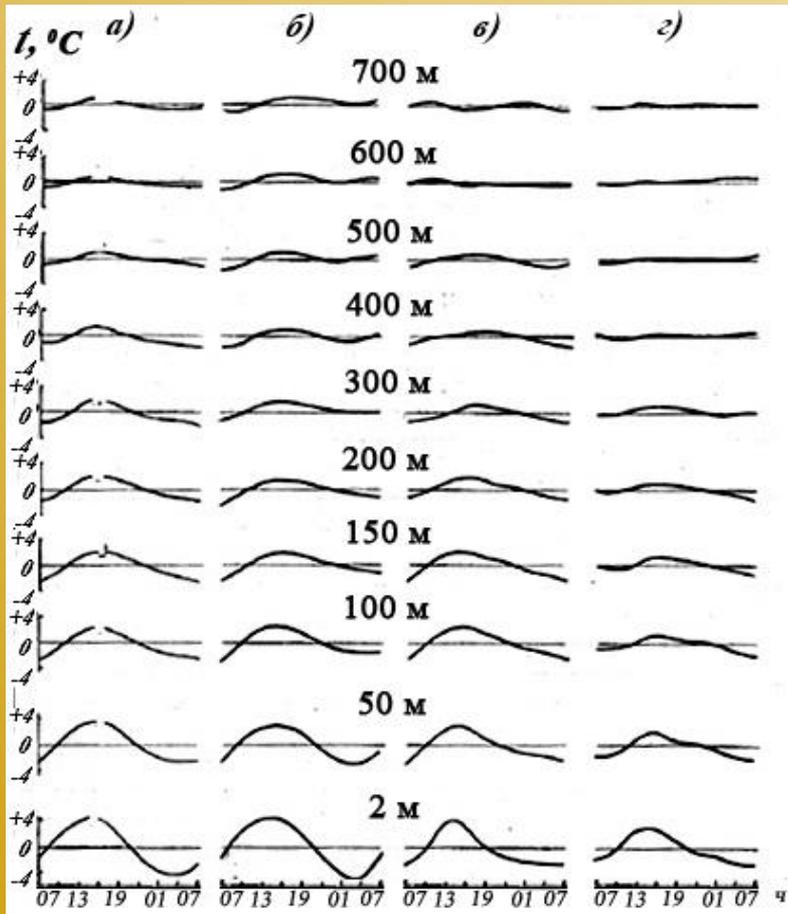


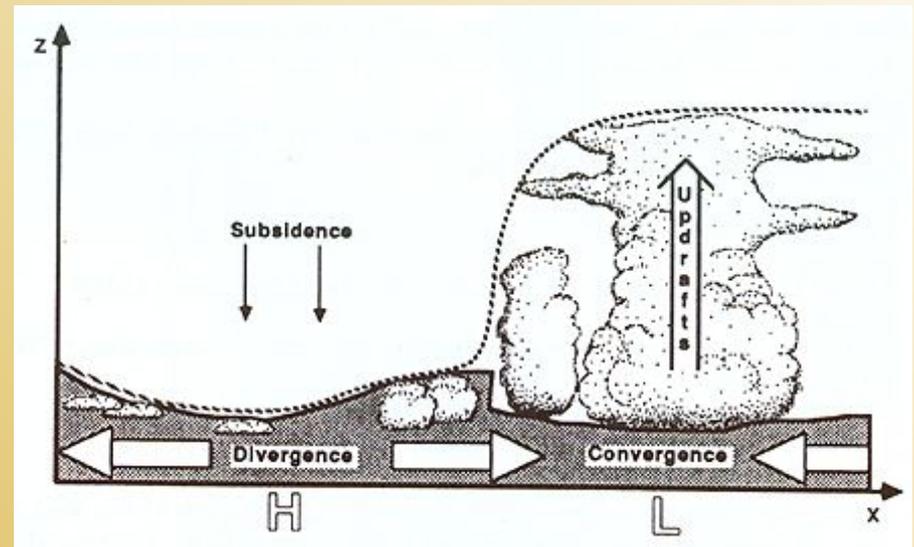
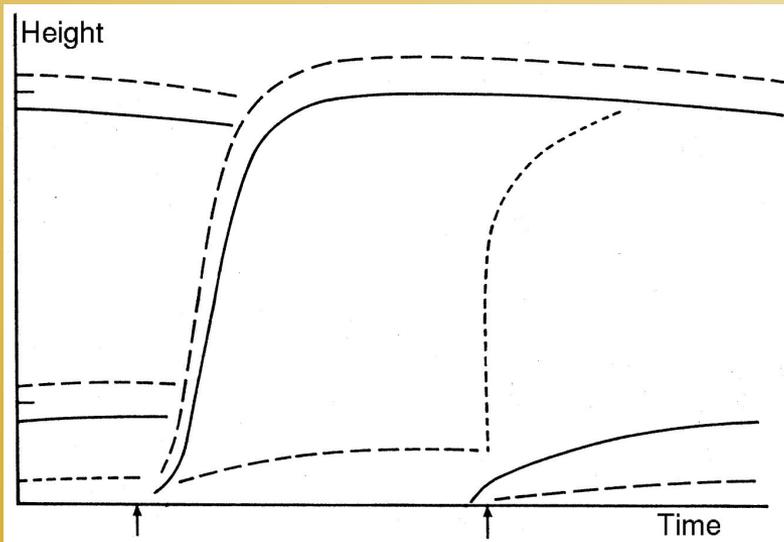
FIG. 1. Schematic of mixed-layer evolution (Stull 2000).

Изменения амплитуды суточного хода температуры с высотой. Тепловой ПС



Градиент температуры у поверхности (0,1 град/м) в сотни раз больше, чем в тропосфере (0,006 град/м)

Схема суточного хода высоты ПС



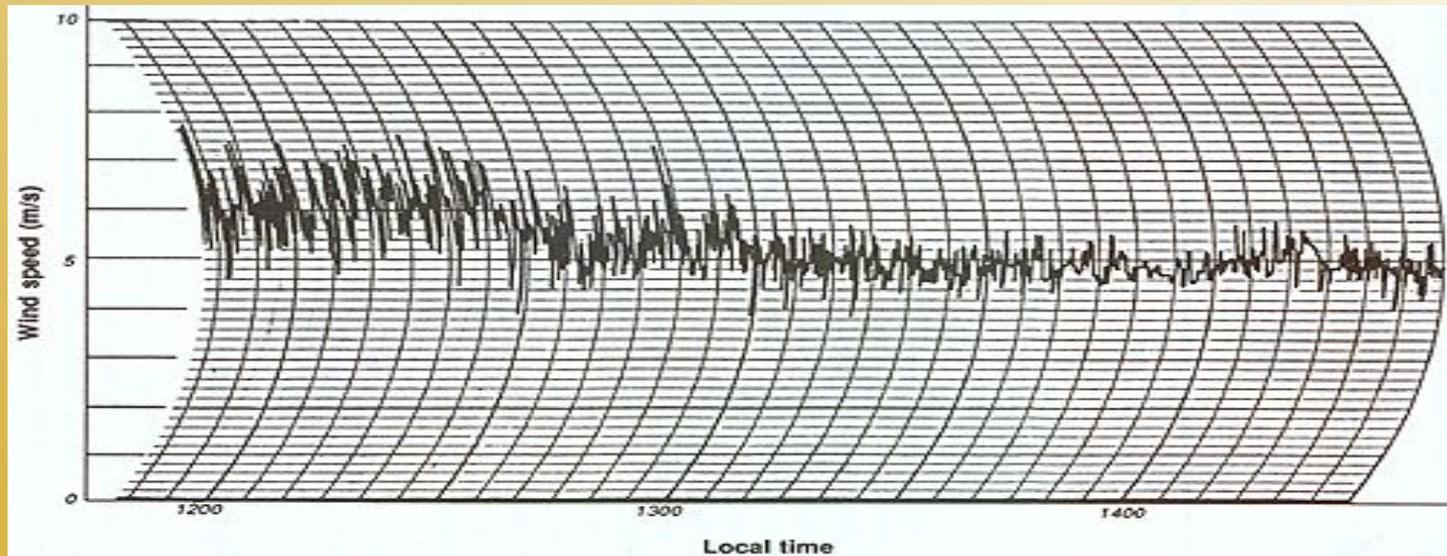
Утро Вечер

- Днем над сушей высота ПС максимальна, но зависит от синоптической ситуации. Над морем суточный ход ослаблен
- Влияние синоптической ситуации
 - Вблизи антициклонов, где имеет место дивергенция и оседание, пограничный слой тонок
 - Но вблизи областей низкого давления, где происходит конвергенция и возникают восходящие токи, высота пограничного слоя резко возрастает, за счет возникновения мощных кучево-дождевых облаков

Турбулентность

- явление, заключающееся в том, что при увеличении скорости течения жидкости или газа в среде самопроизвольно образуются многочисленные возмущения различных размеров без наличия внешних.
- экспериментально открыта Рейнольдсом экспериментально открыта Рейнольдсом в 1883 году при изучении течения несжимаемой жидкости (воды)

Запись скорости ветра малоинерционным анемометром

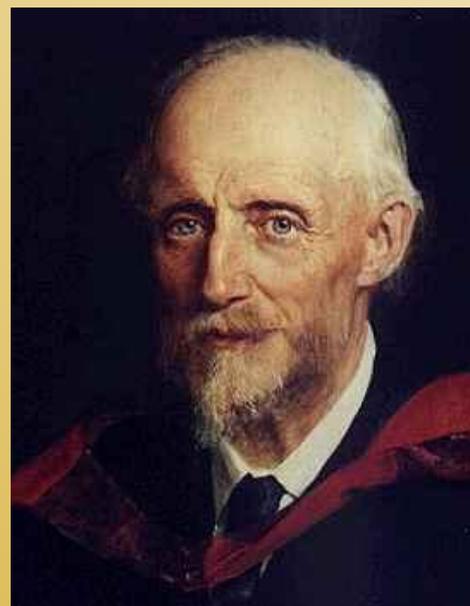


- Пики, выделяющиеся около средней скорости ветра - это проявление турбулентности.
- В левой части рисунка период интенсивной турбулентности (около 12 ч 30 мин)
- В правой - слабой турбулентности (около 14 часов)

Понятие «турбулентный поток»

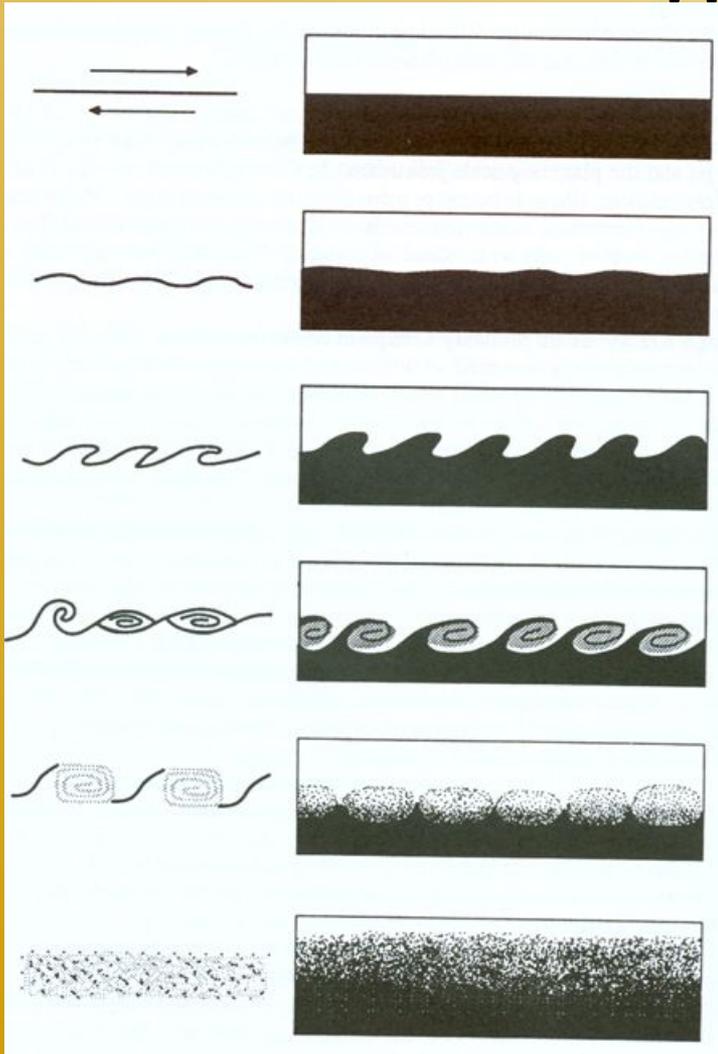


Жозеф Буссинеск



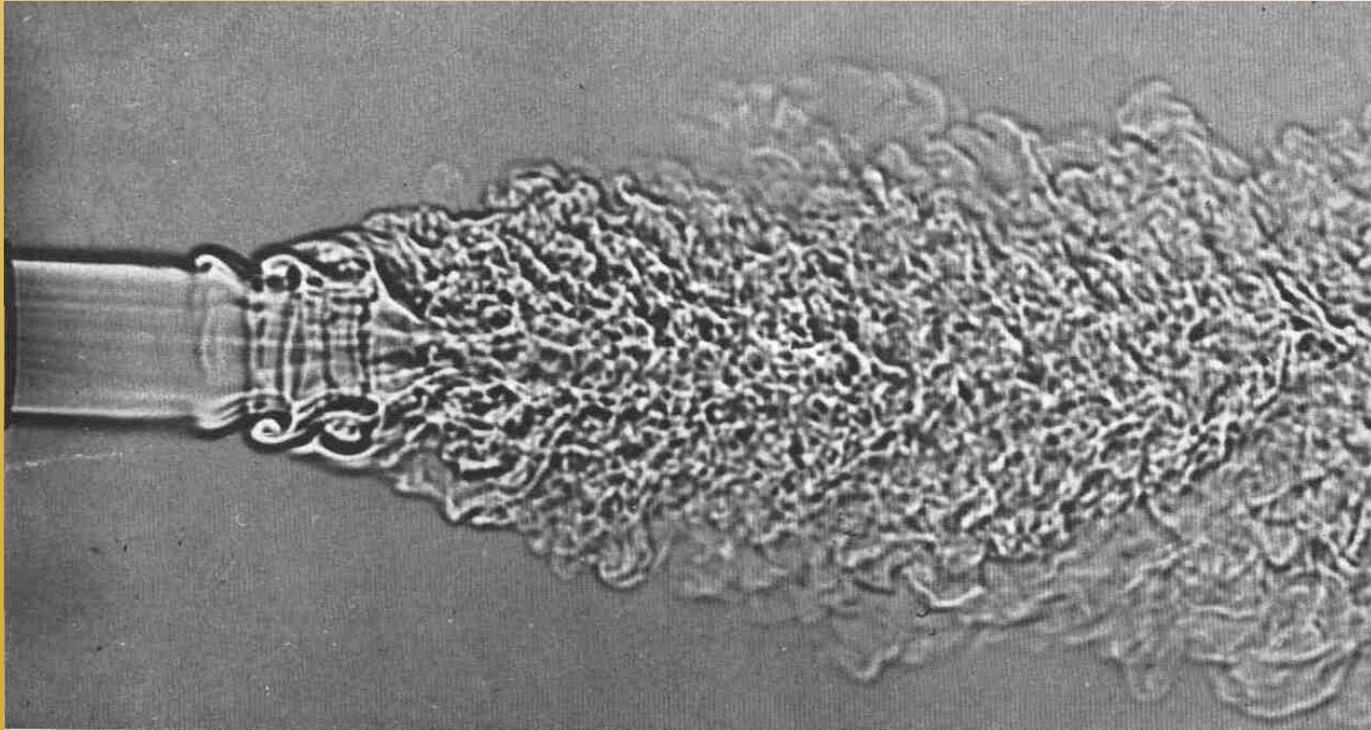
Осборн Рейнольдс

Динамическая неустойчивость при сдвиге скорости – причина динамической турбулентности

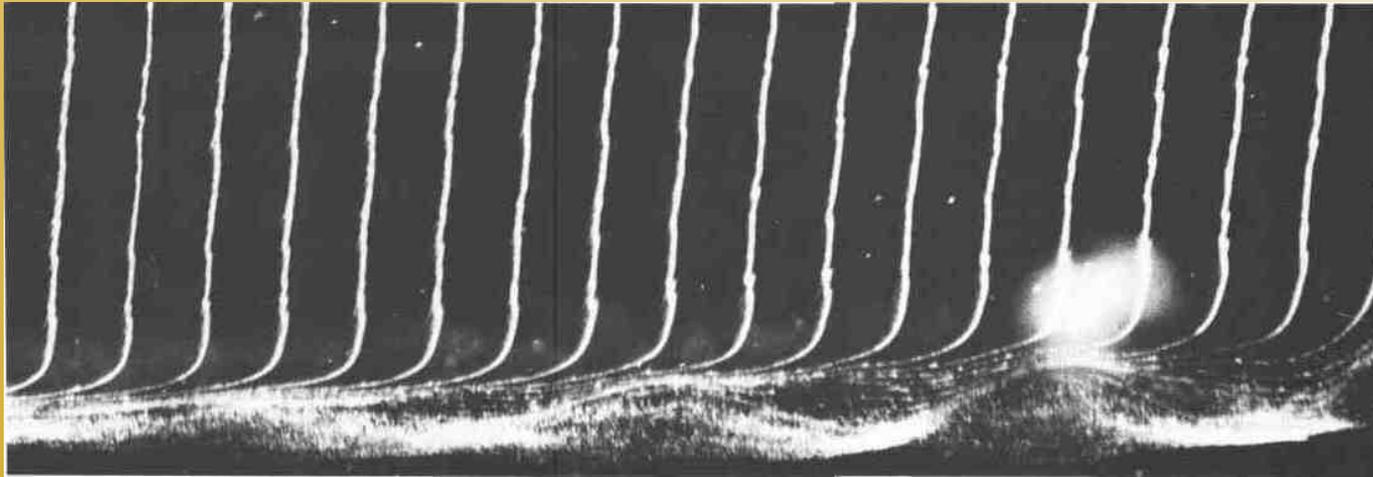


- Развитие турбулентности в противотоке двух слоев жидкости
- Верхний слой более легкой жидкости движется вправо
- Нижний слой более тяжелой жидкости движется влево
- На границе слое имеется сдвиг скорости
- Волны на границе оказываются неустойчивыми (неустойчивость Кельвина-Гельмгольца)
- Они растут
- Затем опрокидываются, образуя вихри
- С течением времени опрокидывающиеся волны заполняют вихрями область границы
- Образуется турбулентный слой

Неустойчивость круглой струи.



Вторичная неустойчивость на вогнутой стенке



Причины турбулентности в ПС. 1 сдвиг скорости. Число Рейнольдса

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\cancel{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}} - \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right), \quad \tau_{xx} = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow O\left(\frac{U^2}{L}\right) = O\left(\frac{\lambda U}{L^2}\right) \Rightarrow \boxed{Re = \frac{UL}{\lambda}} \Rightarrow \text{Критическое } Re \approx 6000 \Rightarrow$$

Атмосфера ($M=1 \quad \lambda \approx 10^{-5} \text{ с}$) \Rightarrow ТУРБУЛЕНТНА При $> \frac{Re_{кр} \lambda}{L} \approx 10 \text{ м}$

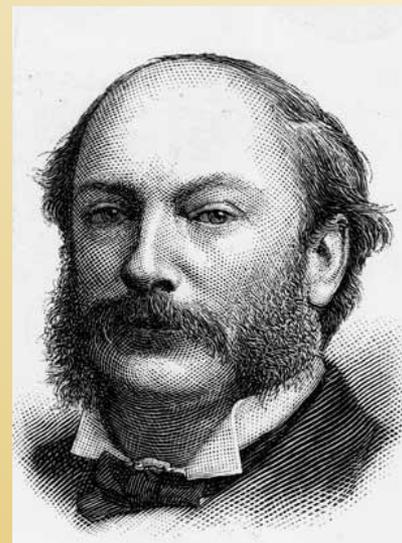
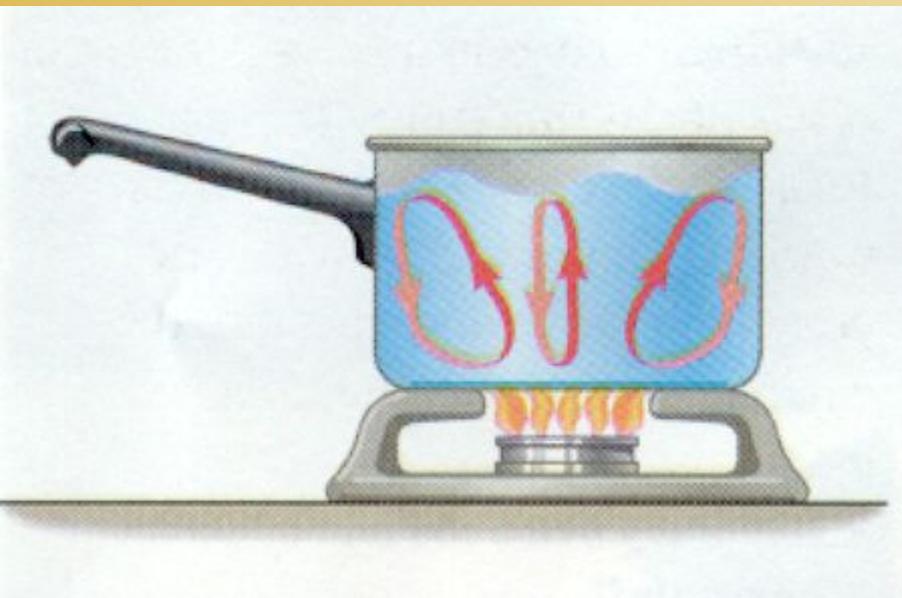
Вязкий подслой ($M=1 \quad \lambda \approx 10^{-5} \text{ с}$) ТУРБУЛЕНТЕН При $> \frac{Re_{кр} \lambda}{L} = 60 \text{ м/с}$

• Граница с вязким подслоем испытывает сильный сдвиг скорости, поэтому там развивается неустойчивость потока. Это главная причина турбулентности.

• Атмосфера всегда турбулентна!



Причины турбулентности в ПС. 2



Джордж Уильям Релей

- В дневное время подстилающая поверхность оказывается сильно нагретой. От нее развивается конвекция. Это вторая причина турбулентности.
- Дж.У.Реллей установил, что критерий возникновения конвекции в слое жидкости толщиной h между двумя плоскостями с разностью температур dT имеет вид $Ra = g\beta h^3 dT / \chi\nu$, где g — ускорение силы тяжести, β — коэффициент теплового расширения жидкости, $\chi\nu$ — коэффициенты её вязкости и температуропроводности. Критическое число Рэля $Ra_{кр}$ имеет значение около 1100—1700.

Смысл и определение числа Реллея (Грасгофа)

Критерий устойчивости $\frac{UL}{v} > 1700$

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\cancel{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}} + \frac{g\Delta T}{T} - \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right), \quad \tau_{xx} = -v \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{vU}{L^2} = \frac{g\Delta T}{T} \Rightarrow \boxed{U_{\text{конв}} = \frac{g\Delta TL^2}{Tv}} \text{ масштаб скорости в начале конвекции}$$

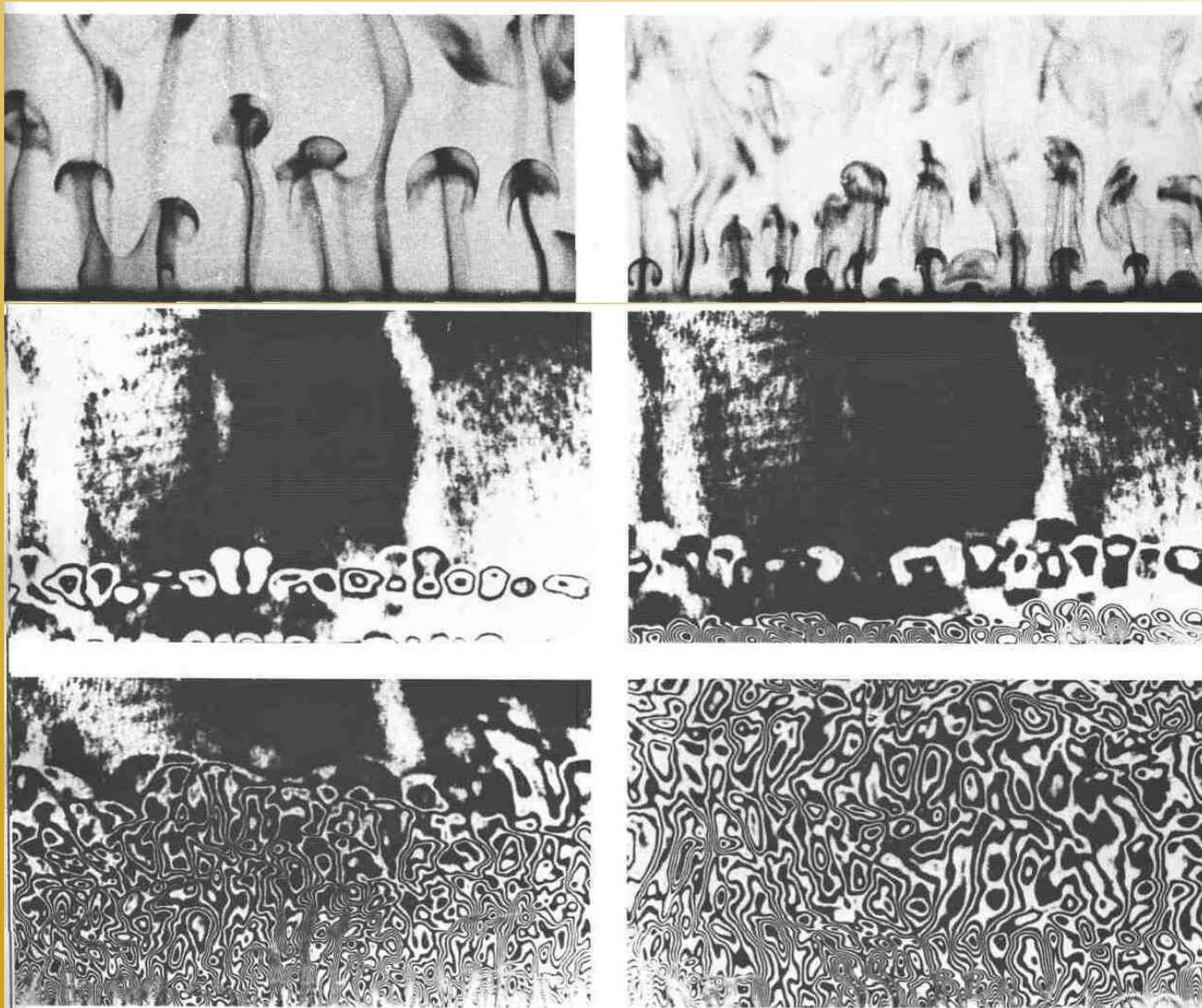
$$Ra = (Gr) = \frac{U_{\text{конв}} L}{v} \frac{g\Delta TL^3}{Tv^2} > 1700 - \text{Критерий начала конвекции}$$

$$v \cong 10^{-5} [m^2 c^{-1}], \quad g\beta = \frac{g\Delta T}{T} = \frac{10 \cdot 0.1}{300} \Rightarrow L_{\text{крит}} = \sqrt[3]{\frac{1700 \cdot v^2}{g\beta}} \cong 10^{-2} []$$

Если у кубик со стороной более 1 см перегреть границы на 0.1К, то в нем начнется конвекция



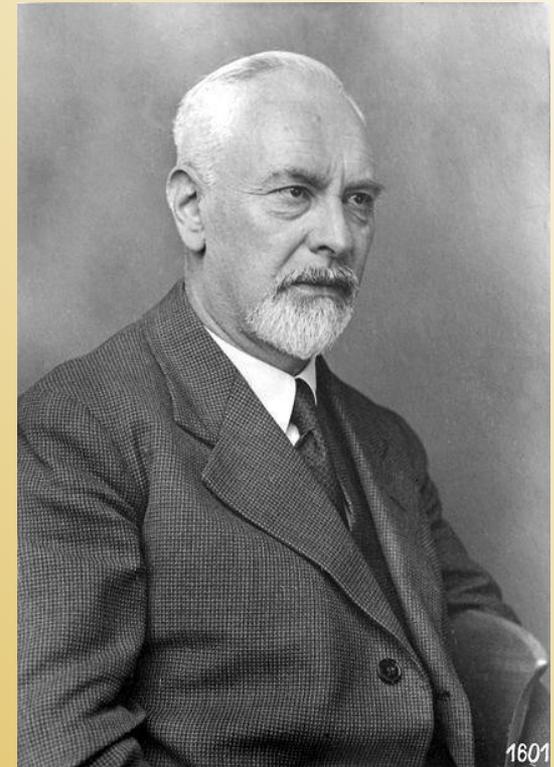
Термики, всплывающие от нагретой поверхности и развитая конвективная турбулентность



Людвиг Прандтль в 1904 году ввел понятия «пограничный слой» и «основной поток»

• Теория Прандтля для нестратифицированного пристенного слоя:

- Он указал, что для градиента скорости течения любой турбулентной жидкости вблизи стенки влияющими параметрами являются:
- значение касательного напряжения в пристеночном слое τ ,
- плотность жидкости ρ ,
- расстояние до стенки z
- (А вязкость несущественна!)

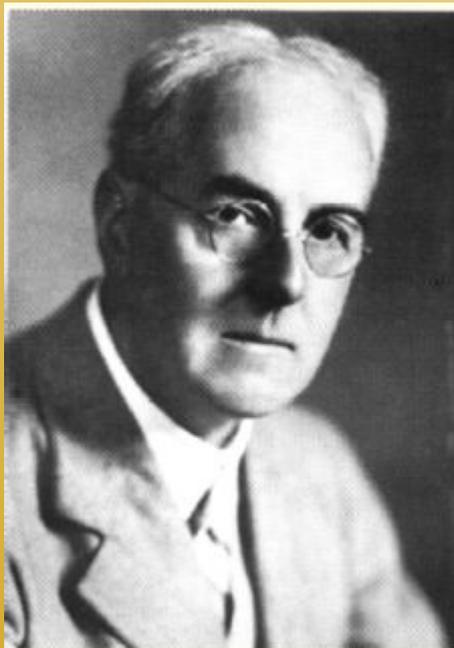


• В результате была доказана теорема о логарифмичности профиля скорости

$$u(z) = \kappa \cdot V_* \cdot \ln(z / z_0)$$

где $\kappa = \sqrt{D_1} = 0,38$ $V_* = \sqrt{\tau / \rho}$ $u(z = z_0) = 0$

Число Ричадсона определяет действие стратификации на турбулентность



$$Ri_g = \frac{\frac{g}{\bar{\theta}_v} \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z}}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2}$$

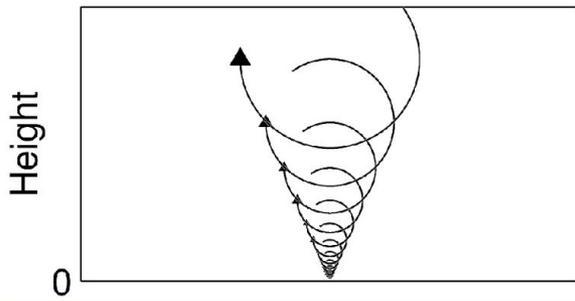
Значения от 1 до 10 – типичны для устойчивости. Если меньше 0,1, то в потоке преобладает термическая конвекция. Интервал от 0,1 до 0,25 – переходный от неустойчивости к устойчивости.

**Льюис Фрай Ричардсон,
Математик, метеоролог, психолог.
Основоположник численных прогнозов
погоды**

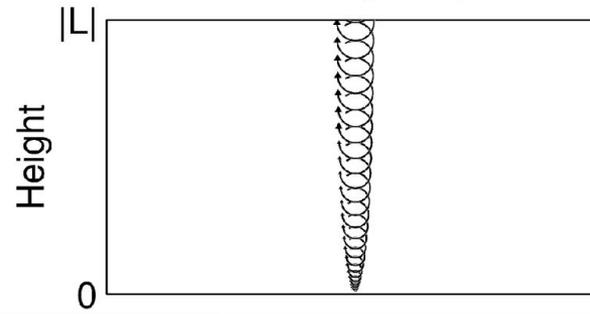


Вихри в зависимости от устойчивости

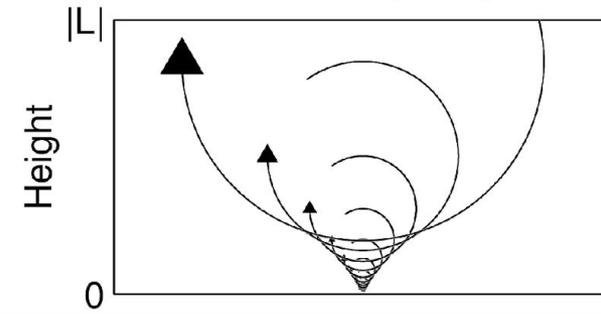
Neutral



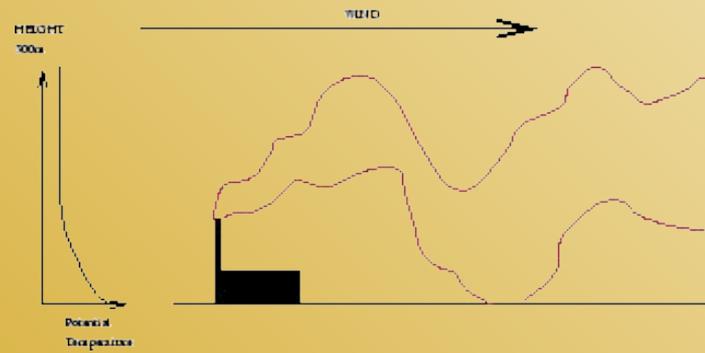
Stable ($L > 0$)



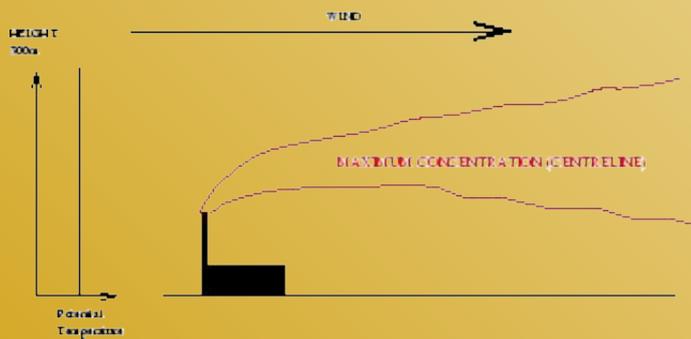
Unstable ($L < 0$)



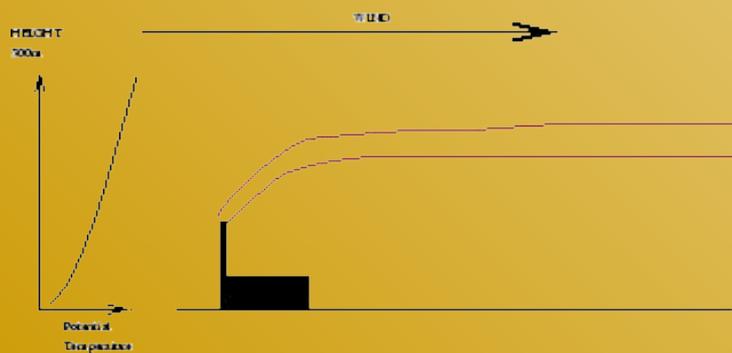
ДЫМ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СТРАТИФИКАЦИИ θ



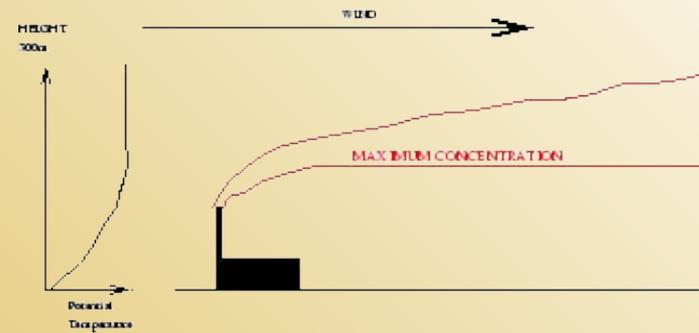
(b) Coning



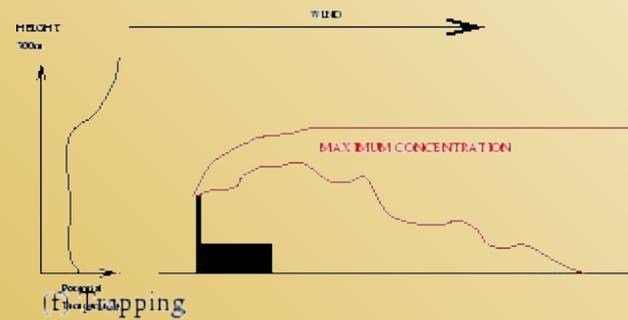
(c) Fanning



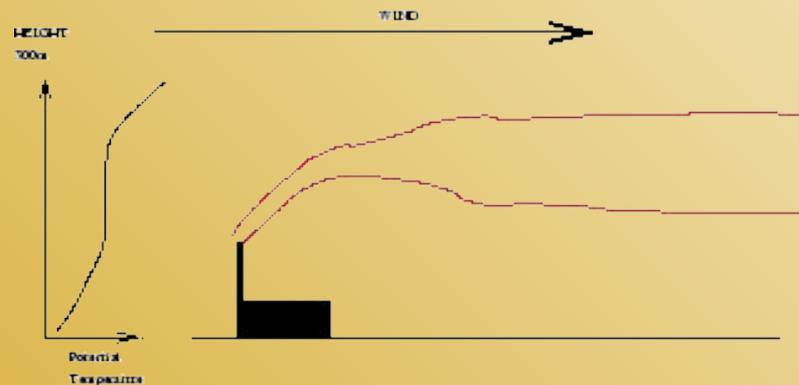
(d) Lofting



(e) Fumigation



(f) Trapping



Как возникает критерий устойчивости $Ri > \frac{1}{4}$



Если частица перемещена в устойчиво стратифицированной среде, то совершена работа против силы Архимеда равная

$$A = \rho g \frac{\Delta \vartheta}{\vartheta} \Delta z$$

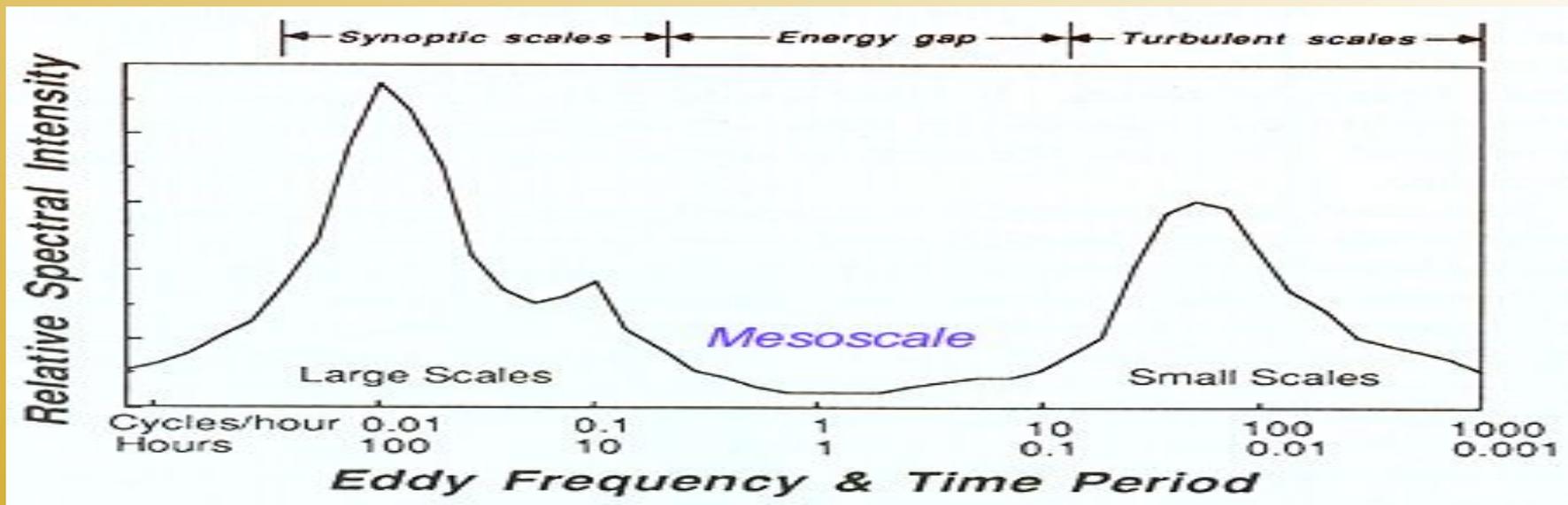
Эту работу можно совершить только за счет прироста кинетической энергии, который возникает при перемешивании:

$$K = \rho \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \text{было на } z \\ u^2 \\ \text{было на } z+dz \\ + (u + \Delta u)^2 \\ \text{стало} \\ - \frac{1}{2} (u + u + \Delta u)^2 \end{array} \right] = \rho \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [(u + \Delta u) - u]^2 \right\} = \frac{1}{4} \rho \Delta u^2$$

Поэтому устойчивость будет, если кинетической энергии не хватает, т.е.

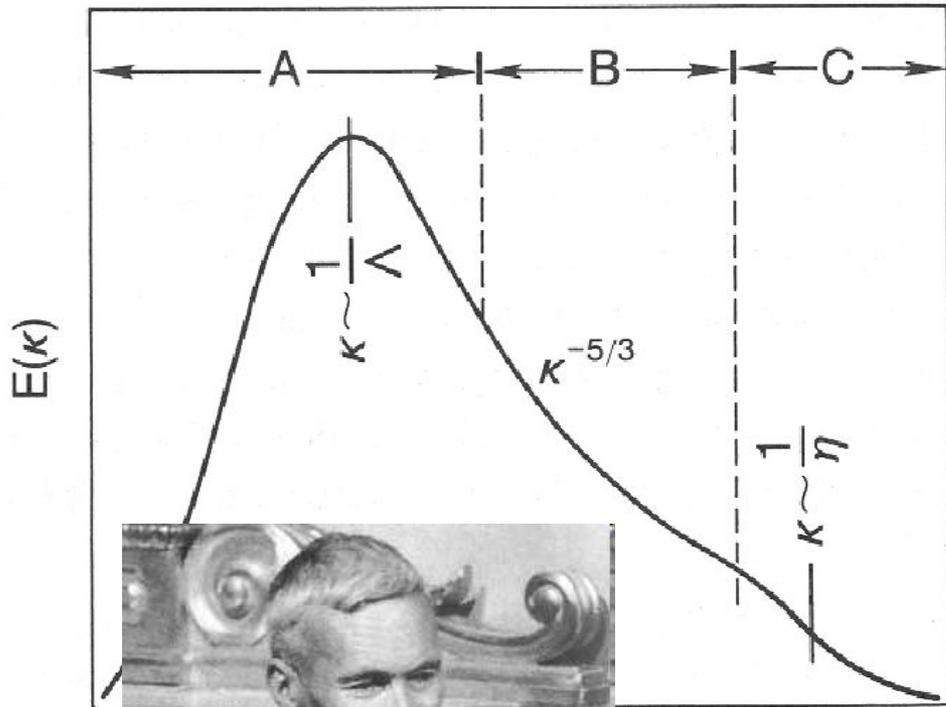
$$A > K \text{ или } \rho g \frac{\Delta \vartheta}{\vartheta} \Delta z > \frac{1}{4} \rho \Delta u^2 \text{ или } \boxed{Ri > \frac{1}{4}} \quad Ri = \frac{\rho g \frac{\Delta \vartheta}{\Delta z \vartheta} \Delta z^2}{\rho \Delta u^2} = \boxed{\frac{\frac{g}{\vartheta} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta z}}{\left(\frac{\Delta u}{\Delta z}\right)^2}}$$

Каскад кинетической энергии - перенос ее от низких частот к ВЫСОКИМ



- Анализ флуктуаций производится с помощью спектров кинетической энергии турбулентности по частотам (периодам) или размерам вихрей, полученным с помощью гипотезы «замороженной турбулентности»
- Пик кинетической энергии на масштабе 100 часов соответствует синоптическим изменениям средней скорости ветра на метеостанции
- Меньший пик на периодах 10 часов - это проявление суточных колебаний средней скорости ветра
- Минимум в спектре приходится на мезомасштабные возмущения с периодом около 1 часа
- Пик кинетической энергии на периодах порядка одной секунды (0.01 часа) - это проявление турбулентных пульсаций скорости ветра.

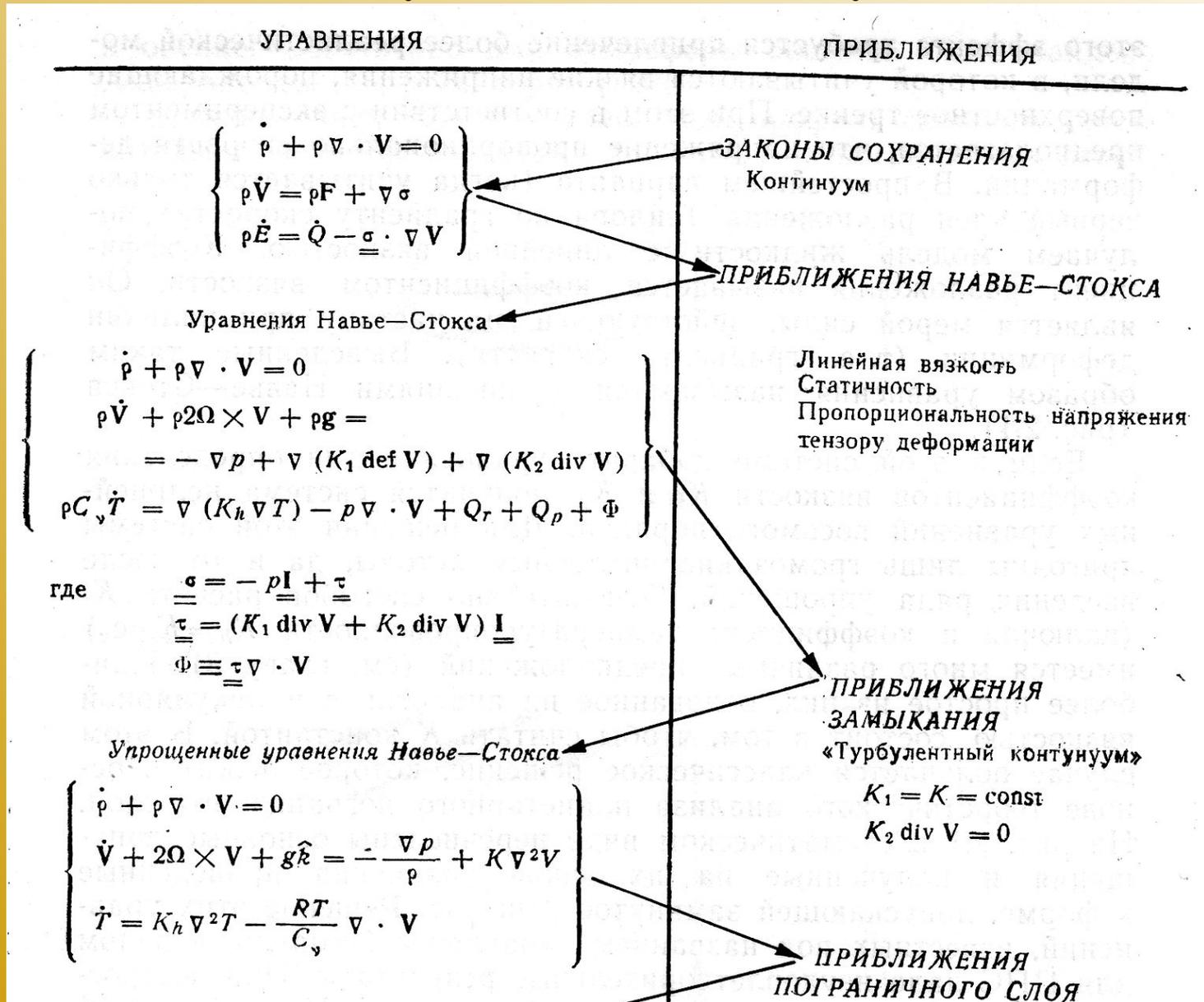
Спектр масштабов турбулентных движений



Колмогоров А.Н.

- А- интервал генерации турбулентности (масштаб при конвекции –толщина слоя, при динам. турбулентности – длины неуст. волн Кельв.-Гельм)
- В – инерционный интервал Колмогорова (трехмерная, изотропная турбулентность)
- С- интервал диссипации энергии (около 1 мм)

Этапы развития теории: А



Усреднение Рейнольдса 1 для вектора ускорений

1 Если $f = f_1 + f_2$ то $\overline{f} = \overline{f_1} + \overline{f_2}$

2 Если $f(t, x, y, z) = f(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + f'$ то $\frac{\partial \overline{f}}{\partial s} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial s}, s = t, x, y, z$

3 Если $f = \overline{f} + f'$ то $\overline{f'} = 0$

Разложение уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{d(\bar{V} + V')}{dt} = \frac{\partial(\bar{V} + V')}{\partial t} + [(\bar{V} + V') \cdot \nabla](\bar{V} + V') = \\ &= \left[\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} \right] + (V' \cdot \nabla) \bar{V} + (\bar{V} \cdot \nabla) V' + \left[\frac{\partial V'}{\partial t} + (V' \cdot \nabla) V' \right] \end{aligned}$$

Разложение уравнения неразрывности

$$\text{div} V = \text{div}(\bar{V} + V') = \text{div} \bar{V} + \text{div} V' = 0$$

Усреднение Рейнольдса 2

Усредняем уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} V = \operatorname{div}(\bar{V} + V') = \operatorname{div} \bar{V} + \operatorname{div} V' = 0$$

$$\overline{\operatorname{div} V} = \operatorname{div} \bar{V} + \overline{\operatorname{div} V'} = 0 \text{ значит } \boxed{\overline{\operatorname{div} V'} = 0}, \quad 0 \text{ по причине, что } (\operatorname{div} A = \nabla \cdot A)$$

Ускорение в уравнение движения

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{d(\bar{V} + V')}{dt} = \frac{\partial(\bar{V} + V')}{\partial t} + [(\bar{V} + V') \cdot \nabla](\bar{V} + V') = \\ &= \left[\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} \right] + (V' \cdot \nabla) \bar{V} + (\bar{V} \cdot \nabla) V' + \left[\frac{\partial V'}{\partial t} + (V' \cdot \nabla) V' \right] \end{aligned}$$

Усредняя по Рейнольдсу получим для среднего ускорения:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \left[\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} \right] + \overline{(V' \cdot \nabla) \bar{V}} + \overline{(\bar{V} \cdot \nabla) V'} + \left[\frac{\partial V'}{\partial t} + (V' \cdot \nabla) V' \right] = \frac{d\bar{V}}{dt} + \boxed{\overline{(V' \cdot \nabla) V'}}$$

Вычитая его из исходного, получим для ускорения пульсаций:

$$\left(\frac{dV}{dt} \right)' = \frac{dV}{dt} - \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial V'}{\partial t} + (V' \cdot \nabla) V' + (V' \cdot \nabla) \bar{V} + (\bar{V} \cdot \nabla) V'$$

Пусть средние: $\overline{V} = U \cdot \mathbf{i} + V \cdot \mathbf{j} + W \cdot \mathbf{k}$, а $\overline{V'} = u \cdot \mathbf{i} + v \cdot \mathbf{j} + w \cdot \mathbf{k}$ - пульсации тогда

$$\begin{aligned} (V' \cdot \nabla)V' &= \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u \cdot \mathbf{i} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) v \cdot \mathbf{j} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w \cdot \mathbf{k} = \\ &= \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{i} + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{j} + \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{k} + \\ &+ u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{i} + v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{j} + w \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{k} \text{ (равные нулю)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\boxed{(V' \cdot \nabla)V'}} = \left(\frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{i} + \left(\frac{\partial \overline{vu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{j} + \left(\frac{\partial \overline{wu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{wv}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{k} =$$

$$\boxed{\boxed{(V' \cdot \nabla)V'}} = \nabla \cdot \begin{Bmatrix} \overline{uu} & \overline{uv} & \overline{uw} \\ \overline{vu} & \overline{vv} & \overline{vw} \\ \overline{wu} & \overline{wv} & \overline{ww} \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \overline{uu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{i} \\ \left(\frac{\partial \overline{vu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{vv}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{j} \\ \left(\frac{\partial \overline{wu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{wv}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{ww}}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{k} \end{array} \right\} = \nabla \cdot \mathbf{T}$$

$\nabla \cdot \mathbf{T}$ - это дивергенция тензора напряжений

Важнейшее преобразование

Приближение Буссинеска для выявления влияния силы Архимеда

$$\frac{du}{dt} \approx -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + fv$$

$$\frac{dv}{dt} \approx -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - fu$$

$$p = p_0(z) + p'(x, y, z, t)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \right] = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z} + \rho_0 g + \rho' g \right] = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p'}{\partial z} + \rho' g \right]$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho} g.$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho} g$$



$$\theta = T \left(\frac{1000 mb}{p} \right)^{R/C_p}$$

$$\frac{\theta'}{\theta_0} \approx \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{p_0} - \frac{\rho'}{\rho_0}$$

$$\frac{\theta'}{\theta_0} \approx -\frac{\rho'}{\rho_0}$$

$$\frac{dw}{dt} \approx -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\theta'}{\theta_0} g$$

Уравнение динамики в турбулентной атмосфере в приближении Буссинеска. Тензор поверхностных сил (турбулентных напряжений)

Уравнения динамики турбулентного воздушного потока для средних:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \delta p - \mathbf{T}(\boldsymbol{\omega} \times \bar{V}) - \nabla \cdot \quad + \frac{\delta\theta}{\theta_0} \mathbf{g}$$

$$\text{div} V = \text{на(че } \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = \quad)$$



Тензор поверхностных сил или тензор турбулентных напряжений:

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} \overline{uu} & \overline{uv} & \overline{uw} \\ \overline{vu} & \overline{vv} & \overline{vw} \\ \overline{wu} & \overline{wv} & \overline{ww} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{Bmatrix}, \text{ причем } \mathbf{T} = \mathbf{T}^T$$

Турбулентная атмосфера - это новая сплошная среда со своими реологическими свойствами

Проблема замыкания и уравнения Фридмана-Келлера



А.А. Фридман

- В уравнениях Рейнольдса имеется девять компонент тензора напряжений, которые нужно выразить через средние значения для замыкания задачи
- Самый корректный способ это сделать – составить цепочку уравнений для моментов – уравнений Фридмана-Келлера.
- Примером такого подхода является уравнение баланса энергии турбулентности.

Уравнение баланса энергии турбулентности (УБЭТ) - вывод

Уравнение пульсаций (в векторной форме)

$$\frac{\partial V'}{\partial t} + (\mathbf{w}' \cdot \nabla) V' + (V' \mathbf{g} \cdot \nabla) \bar{V} + (\bar{V} \cdot \nabla) V' = -\mathbf{T} \times \mathbf{e}' + \frac{\delta \theta'}{\theta_0} + \nabla \cdot \boxed{v \nabla^2 V'}$$

домножаем уравнение скалярно на вектор V' получим

$$V' \cdot \frac{\partial V'}{\partial t} + V' \cdot (V' \cdot \nabla) V' + V' \cdot (V' \cdot \nabla) \bar{V} + V' \cdot (\bar{V} \cdot \nabla) V' = -2 \cdot \mathbf{w}' \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{e}') + V' \cdot \frac{\delta \theta'}{\theta_0} \mathbf{g} + V' \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} + v V' \cdot \nabla^2 V'$$

Усредняем и вводим обозначения

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \overline{V' \cdot (V' \cdot \nabla) V'} + \overline{V' \cdot (V' \cdot \nabla) \bar{V}} + \overline{V' \cdot (\bar{V} \cdot \nabla) V'} = \frac{\overline{g w \delta \theta'}}{\theta_0} \mathbf{k} + \overline{V' \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}} + v \overline{V' \cdot \nabla^2 V'}$$

где $e = \frac{\overline{V' \cdot V'}}{2} = \frac{\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}}{2}$, для дальнейшего $e' = \frac{V' \cdot V'}{2} = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$

Преобразование слагаемых УБЭТ. 1

Диффузия энергии турбулентности:

$$V' \cdot (V' \cdot \nabla) V' =$$

$$u \cdot \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u + v \cdot \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) v + w \cdot \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w =$$

$$= \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \frac{u^2}{2} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \frac{v^2}{2} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \frac{w^2}{2} =$$

$$= \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial u e}{\partial x} + \frac{\partial v e}{\partial y} + \frac{\partial w e}{\partial z}$$

$$\overline{V' \cdot (V' \cdot \nabla) V'} = \nabla \cdot Df_u, \text{ где } Df_u = \overline{ue} \cdot \mathbf{i} + \overline{ve} \cdot \mathbf{j} + \overline{we} \cdot \mathbf{k}$$

Адвекция энергии турбулентности средним потоком :

по аналогии:
$$\overline{V' \cdot (\bar{V} \cdot \nabla) V'} = \left(U \frac{\partial e'}{\partial x} + V \frac{\partial e'}{\partial y} + W \frac{\partial e'}{\partial z} \right) = (\bar{V} \cdot \nabla) e$$

Преобразование слагаемых УБЭТ. 2

Трансформация энергии среднего потока в энергию пульсаций $\overline{V' \cdot (V' \cdot \nabla) V'} =$

$$u \cdot \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) U + v \cdot \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) V + w \cdot \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) W =$$

$$= \left(\tau_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial}{\partial z} \right) U + \left(\tau_{yx} \frac{\partial}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial}{\partial z} \right) V + \left(\tau_{zx} \frac{\partial}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial}{\partial z} \right) W = \mathbf{T} \cdot \nabla V$$

Преобразование влияния вязкости:

$$\overline{v V' \cdot \nabla^2 V'} = \nu \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \nabla Df_\nu - \varepsilon$$

$$Df_\nu = \nu \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + v \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j} + w \frac{\partial w}{\partial z} \mathbf{k} \right) \underline{\text{диффузия вязкостью}}$$

$$\varepsilon = \nu \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) \underline{\text{диссипация вязкостью}}$$

УБЭТ: смысл слагаемых

Уравнение баланса энергии турбулентности

$$\frac{de}{dt} + (\bar{V} \cdot \nabla)e + T \cdot \nabla V + \nabla \cdot Df = \frac{\overline{gw\delta\theta'}}{\theta_0} - \varepsilon$$



Анализ слагаемых:

$\frac{de}{dt} = \frac{\partial e}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla)e$ изменение ЭТ во времени и за счет переноса средним потоком

$T \cdot \nabla V$ – генерация энергии турбулентности за счет сдвига скорости реального потока

$\nabla \cdot Df$ перенос (диффузия, транспортировка)
турбулентной энергии внутренними процессами обмена

$\frac{\overline{gw\delta\theta'}}{\theta_0}$ – генерация турбулентности силой пловучести при конвекции
или подавление ее при устойчивой стратификации

ε диссипация (прямой переход кинетической энергии) в тепло за счет вязкости

Составляющие УБЭТ с высотой

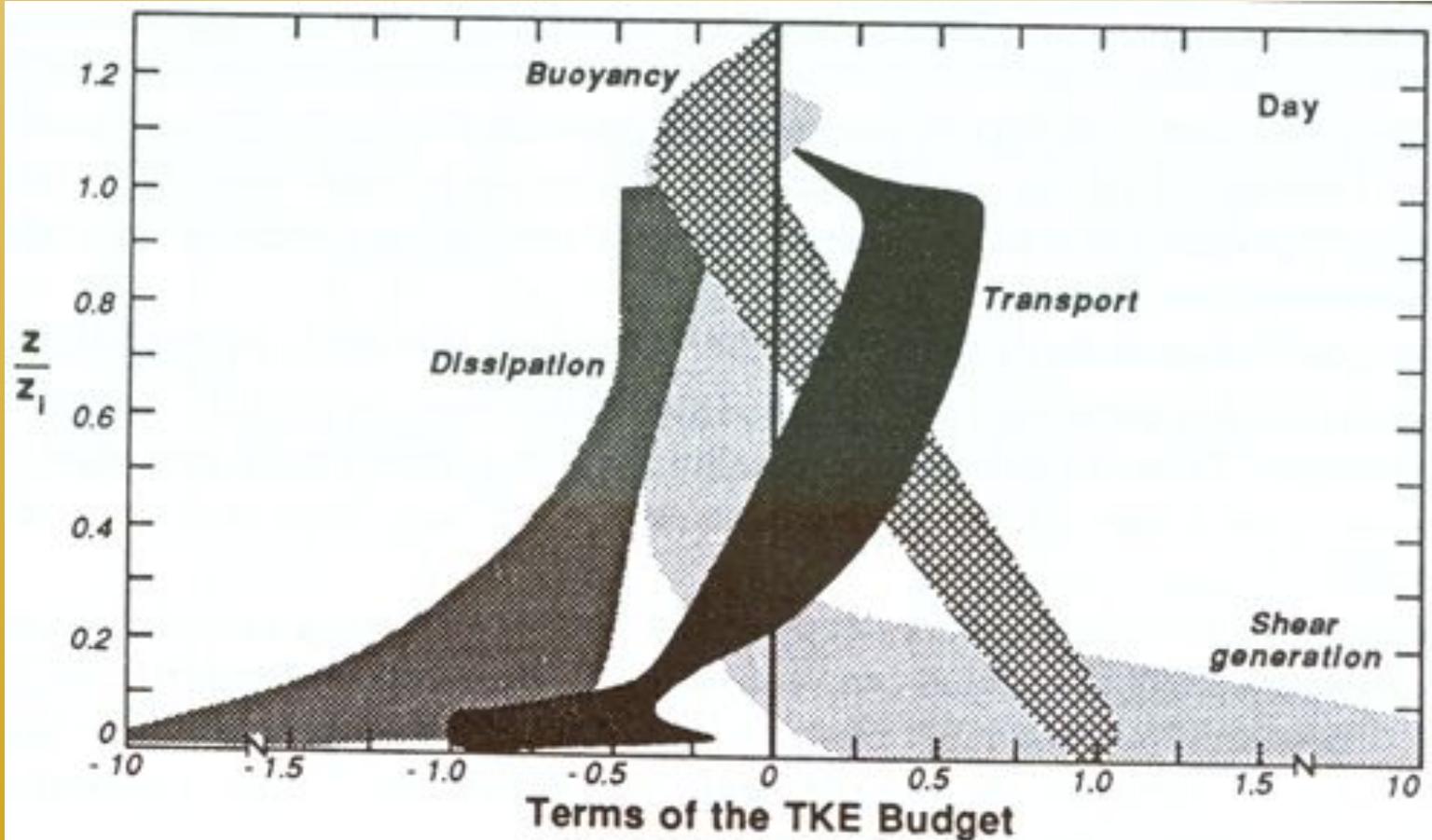


Fig. 5.4 Normalized terms in the turbulence kinetic energy equation.

from Stull 1988

Упрощения уравнений для пограничного слоя атмосферы

Уравнения динамики пограничного слоя:

$$V = V_{\Gamma} + w \cdot k, \quad V_{\Gamma} = u \cdot i + v \cdot j, \quad \nabla_{\Gamma} \delta p = \frac{\partial \delta p}{\partial x} i + \frac{\partial \delta p}{\partial y} j$$

$$\frac{d\bar{V}_{\Gamma}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla_{\Gamma} \delta p - 2(\omega \times \bar{V}_{\Gamma}) - \frac{\partial \overline{w' \cdot V_{\Gamma}'}}{\partial z}$$

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial z} + \frac{\delta \theta}{\theta_0} = 0$$

$$\text{div} \bar{V} = \text{на(че } \nabla \cdot \bar{V} =)$$

Уравнение баланса энергии турбулентности пограничного слоя:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\partial \overline{w' \cdot e'}}{\partial z} - \left(\tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{yz} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{g}{\theta_0} \overline{w \delta \theta'} - \varepsilon$$

Решение проблемы замыкания – простейший вариант



Градиентная гипотеза Ньютона:

$$\tau_{xz} = -\rho K \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \tau_{yz} = -\rho K \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \overline{w'\delta\theta'} = -\alpha C_p \rho K \frac{\partial \delta\theta}{\partial z}$$

K – постоянный по вертикали коэффициент турбулентности, α – отношение коэффициентов турбулентной теплопроводности и турбулентности

Предположения Лайхтмана:

В) ПС толщиной H , вся поступающая от среднего потока энергия расходуется на преодоление силы тяжести и диссипацию в тепло:

$$\int_0^H \left[- \left(\tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{yz} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{g}{\theta_0} \overline{w'\delta\theta'} - \varepsilon \right] dz = 0$$

Диссипация ε зависит только от K и H

$$\varepsilon = \varepsilon(K, H)$$

УБЭТ: простейший расчет коэффициента турбулентности

На основе теории размерностей получим:

$$\int_0^H \varepsilon dz = C \frac{K^3}{H^3}$$

Подставляя потоки в УБЭТ получим:

$$K \int_0^H \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 - \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \delta \theta}{\partial z} \right] dz = C \frac{K^3}{H^3}$$

Это уравнение замыкает систему

Если использовать решение задачи Экмана, то

$$K \int_0^H \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] dz = U_g \sqrt{\omega_z} \cdot \sqrt{K},$$

$$K \int_0^H \left[-\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \delta \theta}{\partial z} \right] dz = -K \frac{g}{\theta_0} (\theta_{z=H} - \theta_{z=0})$$

$$H = 2.3 \sqrt{\frac{K}{\omega_z}}$$

U_g — скорость геострофического ветра,

$(\theta_{z=H} - \theta_{z=0})$ — разность потенциальных температур

Рабочая формула для оценки постоянного по ПС коэффициента К

$$K = \frac{U_g^2}{C \cdot \omega_z} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{C} \left(\frac{g}{\theta_0} \cdot \frac{(\theta_{z=H} - \theta_{z=0})}{2\omega_z U_g} \right)^2} - \frac{1}{C} \cdot \frac{g}{\theta_0} \cdot \frac{(\theta_{z=H} - \theta_{z=0})}{2\omega_z U_g} \right]^2$$

\hat{E} - ô óí êöèÿ âí åø í èõ ï àðàì åòðî â

ãâî ñòðî ò è÷ãñêî é ñêî ðî ñòè U_g

ï àðàí î ñí î ñî àèðÿ ω_z



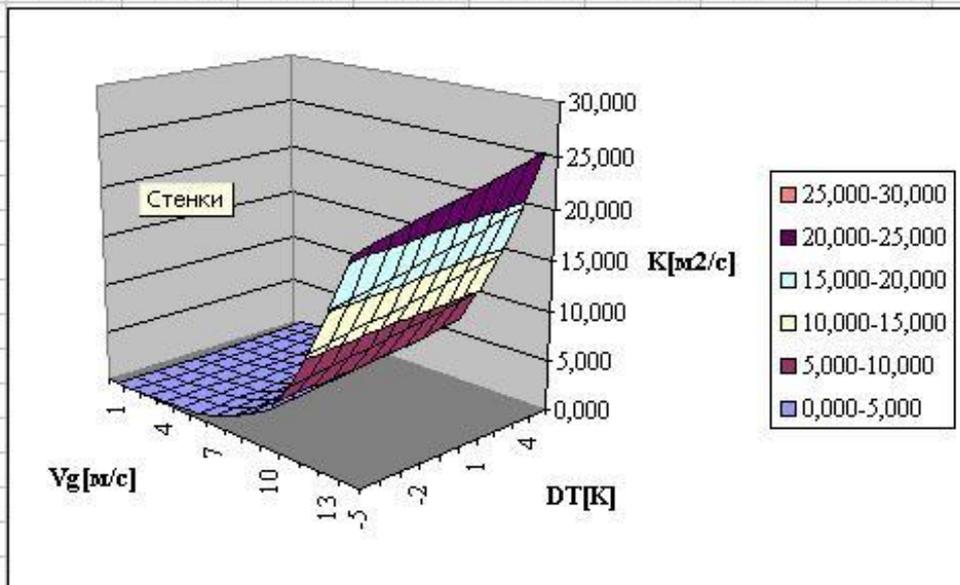
ï àðàì åòðà ñòðàòèò èèàòèè ï î ñðàí è÷í î ñî ñêîÿ $\frac{g}{\theta_0} \cdot \frac{(\theta_{z=H} - \theta_{z=0})}{2\omega_z U_g}$

$$\left(\begin{array}{l} \text{cðàâí èòü ñ ÷èñêî ì Èè÷àðãñî í à} \\ Ri = \frac{g}{g} \frac{\frac{\Delta g}{\Delta z}}{\left(\frac{\Delta u}{\Delta z} \right)^2} \end{array} \right)$$

Зависимость К от Vg и $\Delta T = T_0 - (T_H + \gamma H)$

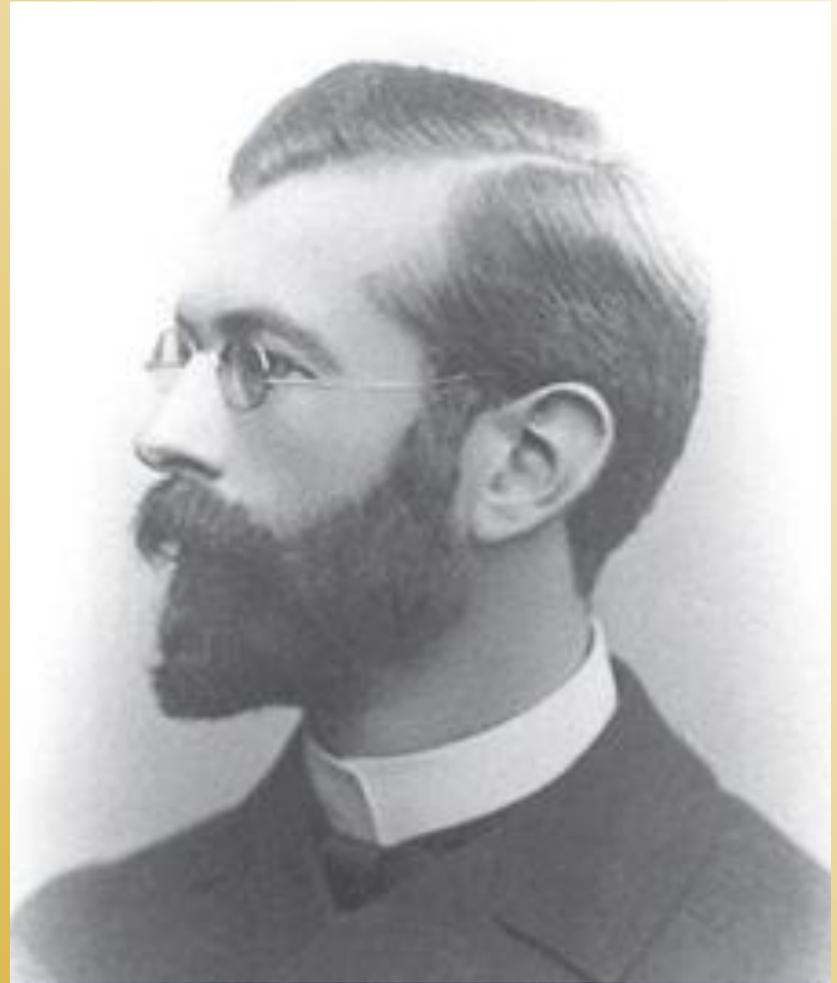
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
5		KO \ \ p	\ \ p	-0,2482	-0,1985	-0,1489	-0,0993	-0,0496	0	0,04963	0,09926	0,1489	0,19853	0,24816	
6		KO \ \	Vg \ \ DT	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
7		0,0254	1	0,002	0,003	0,005	0,008	0,014	0,025	0,047	0,082	0,135	0,205	0,295	
8		0,10161	2	0,024	0,031	0,041	0,055	0,075	0,102	0,139	0,188	0,251	0,330	0,425	
9		0,22863	3	0,084	0,102	0,124	0,151	0,186	0,229	0,281	0,345	0,422	0,513	0,619	
10		0,40645	4	0,190	0,220	0,256	0,298	0,348	0,406	0,475	0,554	0,646	0,750	0,869	
11		0,63509	5	0,344	0,388	0,438	0,495	0,561	0,635	0,719	0,814	0,921	1,040	1,173	
12		0,91452	6	0,547	0,606	0,671	0,743	0,824	0,915	1,015	1,125	1,247	1,381	1,528	
13		1,62582	8	1,104	1,192	1,288	1,392	1,504	1,626	1,757	1,899	2,052	2,217	2,394	
14		2,54034	10	1,863	1,981	2,108	2,243	2,387	2,540	2,704	2,877	3,061	3,257	3,464	
15		3,65809	12	2,824	2,973	3,131	3,298	3,473	3,658	3,853	4,058	4,274	4,500	4,738	
16		4,97907	14	3,988	4,168	4,357	4,555	4,762	4,979	5,206	5,442	5,689	5,947	6,217	
17		8,23071	18	6,925	7,168	7,420	7,681	7,951	8,231	8,520	8,820	9,131	9,451	9,783	
18		12,2953	22	10,674	10,980	11,294	11,619	11,952	12,295	12,648	13,011	13,385	13,769	14,163	
19		17,1727	26	15,235	15,604	15,982	16,369	16,766	17,173	17,589	18,015	18,452	18,899	19,356	
20		22,8631	30	20,610	21,042	21,483	21,933	22,393	22,863	23,343	23,832	24,332	24,842	25,363	

шпрота 60
 сигнус 0,86603
 0,80593



Вагн Вильфред Экман (1874-1954)

- Швед
- Ученик В.Бьеркнеса
- Объяснил наблюдавшийся Нансеном на «Фраме» поворот течения воды с глубиной в работе, выполненной в 1905 г



Постановка задачи Экмана

$$\begin{cases} K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + l \cdot v - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - l \cdot u - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + l \cdot (v - v_g) = 0 \\ K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - l \cdot (u - u_g) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K \frac{\partial^2 (u - u_g)}{\partial z^2} + l \cdot (v - v_g) = 0 \\ K \frac{\partial^2 (v - v_g)}{\partial z^2} - l \cdot (u - u_g) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{при } z = 0 & u = v = w = 0 \\ \text{при } z \rightarrow \infty & u \rightarrow u_g, v \rightarrow v_g \end{cases}$$



$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2a^2 i \cdot FF = \alpha (u - u_g) + i(v - v_g) + a \cdot \dots - g = \sqrt{2\omega \sin \varphi / 2K}$$

$$\text{при } z = 0 \quad F = -u_g - iv_g, \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad F \rightarrow 0$$

$$F = C_1 \cdot e^{a(1+i)z} + C_2 \cdot e^{-a(1+i)z}$$

Спираль Экмана

Используя верхнее граничное условия, получим, что

$$C_1=0, \text{ а } C_2 = u_g - i v_g.$$

Разделяя вещественную и мнимую часть в результате, можно получить зависимости составляющих скорости от высоты при заданном геострофическом ветре в виде:

$$u + i \cdot v = (u_g + i \cdot v_g) \cdot \left[1 - e^{-a(1+i)z} \right]$$

$$u = u_g \cdot \left(1 - e^{-az} \cos az \right) - v_g \cdot e^{-az} \sin az$$

$$v = v_g \cdot \left(1 - e^{-az} \cos az \right) + u_g \cdot e^{-az} \sin az$$

Направив ось x вдоль геострофического ветра (поизобаре)

$$u = u_g \cdot \left(1 - e^{-az} \cos az \right)$$

$$v = u_g \cdot e^{-az} \sin az$$

Оценка и смысл a

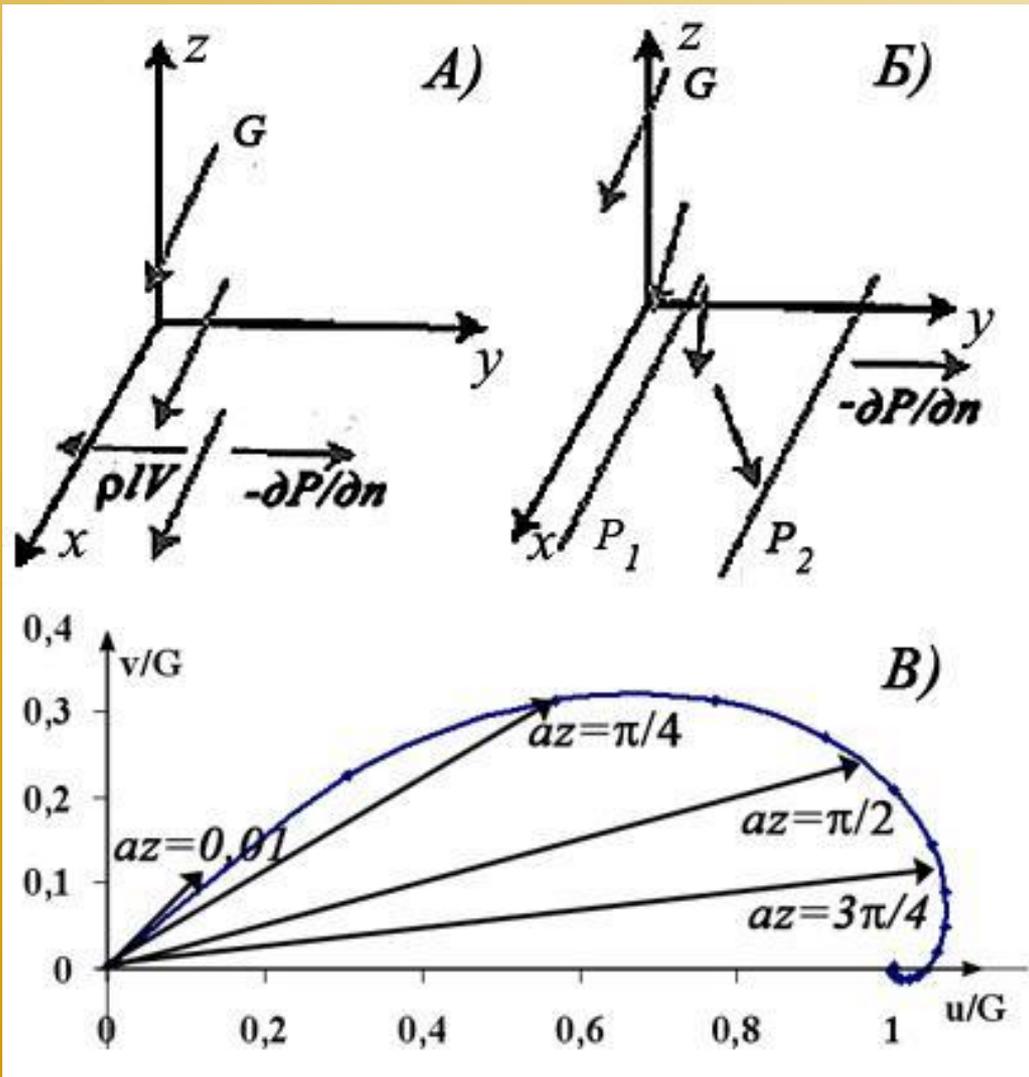
$$a = \sqrt{\frac{2\omega \sin\varphi}{2K}}$$

$$\omega = 7 \cdot 10^{-5} \left[c^{-1} \right], \quad \sin(30^\circ) = 0.5 \quad K = 1 \left[2 c^{-1} \right]$$

$$a = \sqrt{\frac{7 \cdot 10^{-5}}{2}} \cong \frac{1}{170} \left[m^{-1} \right]$$

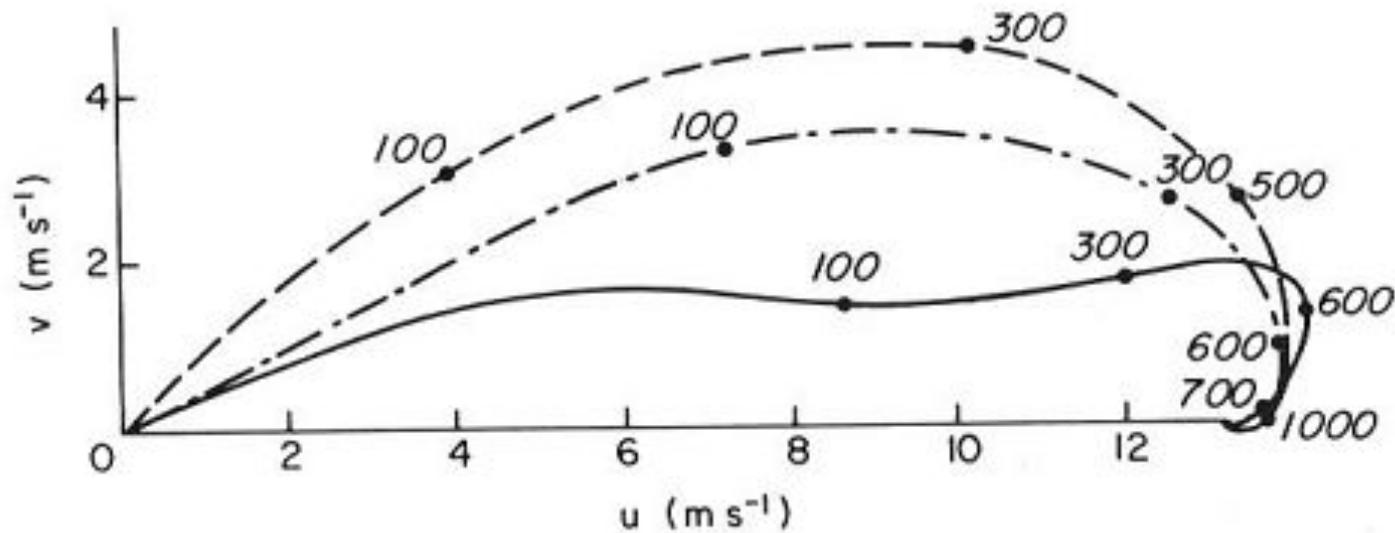
- Коэффициент a имеет размерность обратную длине
- Он показывает на какую высоту нужно подняться, чтобы скорость ветра уменьшилась в e (примерно 2.7) раз

График зависимости скорости ветра в пограничном слое атмосферы (годограф скорости ветра в экмановском ПС).



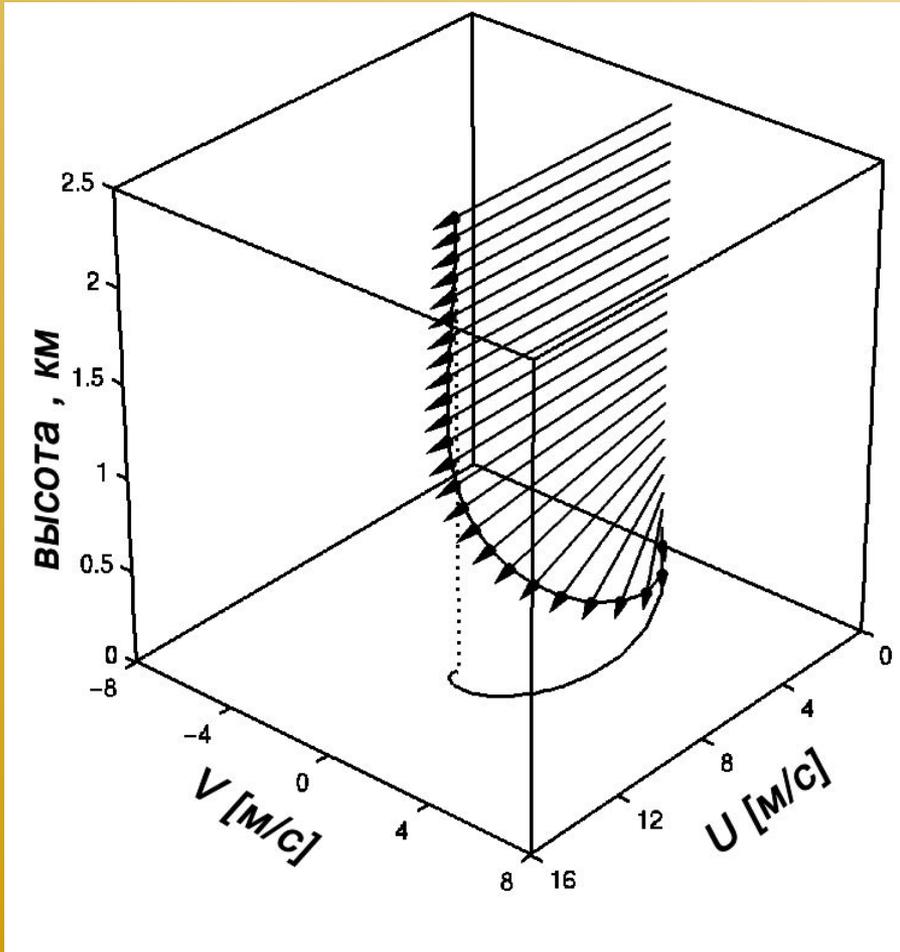
- А)- геострофический ветер,
- Б)- рассчитанный ветер,
- В) - изображение ветра в виде годографа скорости,
- называемое «спиралью Экмана».

Спираль Экмана и реальный ветер в ПС



Mean wind hodograph for Jacksonville, Florida ($\cong 30^\circ\text{N}$), 4 April 1968 (solid line) compared with the Ekman spiral (dashed line) and the modified Ekman spiral (dash-dot line) computed with $De \cong 1200$ m. Heights shown in meters. (Adapted from Brown, 1970. Reproduced with permission of the American Meteorological Society.)

Изображение спирали Экмана



- Построено при
 - $U_g = 10 \text{ м/с}$
 - Направлен вдоль оси X
 - $K = 10 \text{ м}^2/\text{с}$
 - Параметр кориолиса $f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$
 - Высота экмановского ПС Равна 1400 м

$$h_E = \pi \sqrt{2K_m / f}$$



ЧИСЛОВЫЕ ОЦЕНКИ

- Ветер совпадет с геострофическим по направлению, если
- $\sin(aH)=0$, т.е. $aH=\pi$ или $H=\pi/a$
- H – высота экмановского погран.слоя
- Если $H \approx 1000$ м, то $a=3,1_{10}^{-3} \text{ м}^{-1}$, тогда
- $K=2\omega \sin\phi/2a^2 \approx 7,5 \text{ м}^2/\text{с}$
- Сдвиг ветра $\delta U/\delta z \approx Ug/H=(10 \text{ м}/\text{с})/1000 \text{ м}$
- Сила трения $K \delta^2 U/\delta z^2 \approx 7,5_{10}^{-5} \text{ м}/\text{с}^2$, т.е. одного порядка с силой Кориолиса и силой барического градиента.

Основные свойства ветра в пограничном слое атмосферы



Первым свойством можно считать то, что направление ветра начинает совпадать с направлением геострофического ветра на высоте, определяемой равенством

$$\text{На } z = 0 \text{ } \alpha H \text{ } \vartheta = \text{или } H \text{ } \vartheta = \pi \sqrt{2K / 2\omega \sin \varphi}$$

Второе свойство спирали Экмана касается угла между направлением ветра у земли и направлением геострофического ветра. Этот угол легко найти и оценить по формуле:

$$\text{tg}(u, U_g)_{z \rightarrow 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{U_g e^{-az} \sin az}{U_g (1 - e^{-az} \cos az)} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-ae^{-az} \sin az + ae^{-az} \cos az}{ae^{-az} \cos az + ae^{-az} \sin az} = 1$$

$$\boxed{(u, U_g)_{z \rightarrow 0} = \pi / 4}$$

Направление действия силы трения:

$$U(z) := G \cdot \left(1 - e^{-a \cdot z} \cdot \cos(a \cdot z) \right) \quad V(z) := G \cdot e^{-a \cdot z} \cdot \sin(a \cdot z)$$

$$\frac{d}{dz} U(z) \rightarrow G \cdot (a \cdot \exp(-a \cdot z) \cdot \cos(a \cdot z) + \exp(-a \cdot z) \cdot \sin(a \cdot z) \cdot a)$$

$$\frac{d}{dz} V(z) \rightarrow -G \cdot a \cdot \exp(-a \cdot z) \cdot \sin(a \cdot z) + G \cdot \exp(-a \cdot z) \cdot \cos(a \cdot z) \cdot a$$

$$\frac{d^2}{dz^2} U(z) \rightarrow -2 \cdot G \cdot a^2 \cdot \exp(-a \cdot z) \cdot \sin(a \cdot z)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} V(z) \rightarrow \frac{\cos(a \cdot z)}{\sin(a \cdot z)}$$

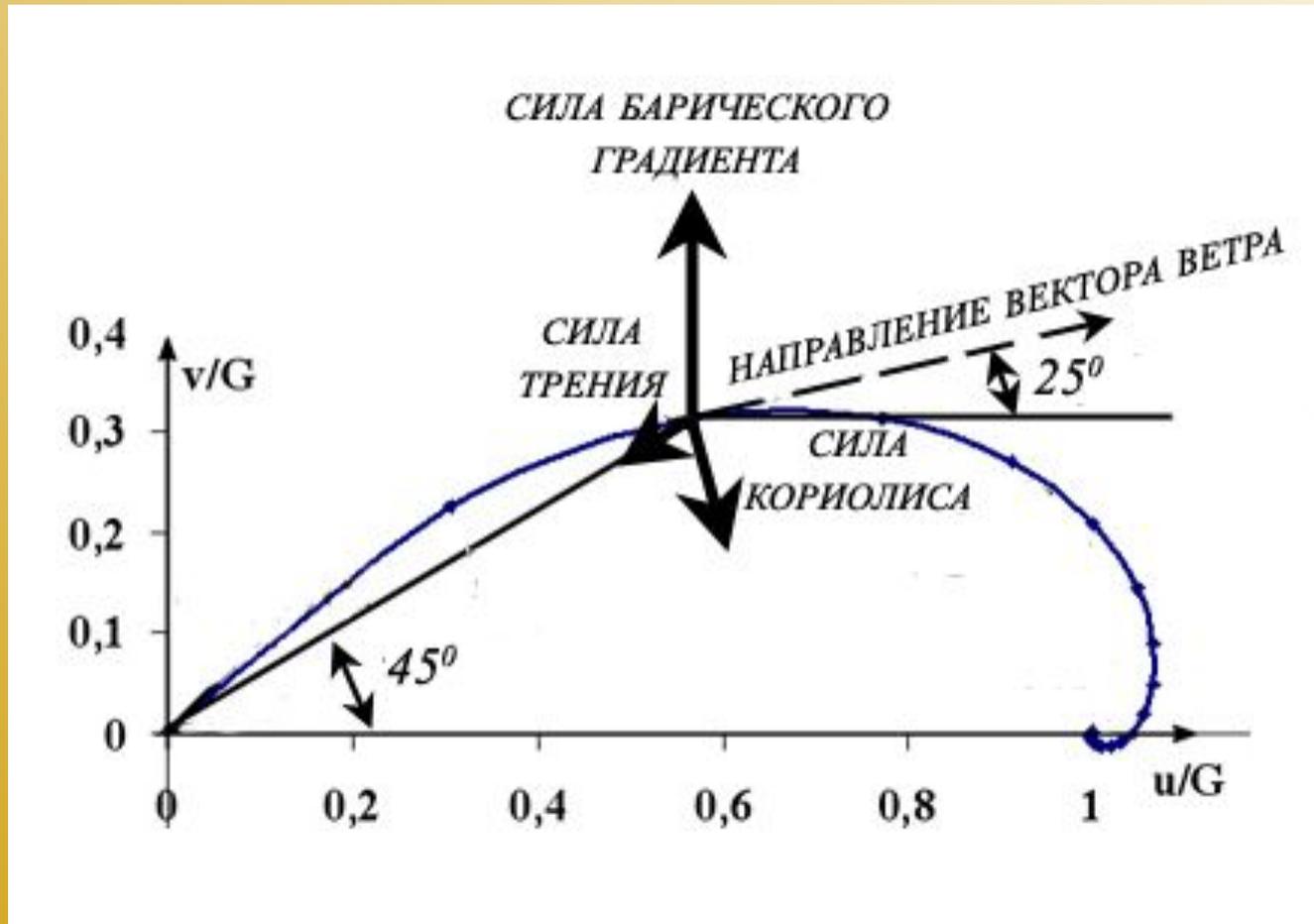
$$\frac{d^2}{dz^2} V(z) \rightarrow -2 \cdot G \cdot a^2 \cdot \exp(-a \cdot z) \cdot \cos(a \cdot z)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} U(z)$$

$$\frac{V(z)}{U(z)} \rightarrow \exp(-a \cdot z) \cdot \frac{\sin(a \cdot z)}{1 - \exp(-a \cdot z) \cdot \cos(a \cdot z)}$$

Направление вектора ветра НЕ точно противоположно вектору силы трения.

Направление силы трения



Угол ветра к изобаре меньше, чем угол трения
Сила трения не направлена точно против ветра

Вертикальная скорость на верхней границе экмановского ПС

Третье свойство определяет вертикальную скорость в экмановском пограничном слое как функцию высоты и геострофического вихря скорости в виде:

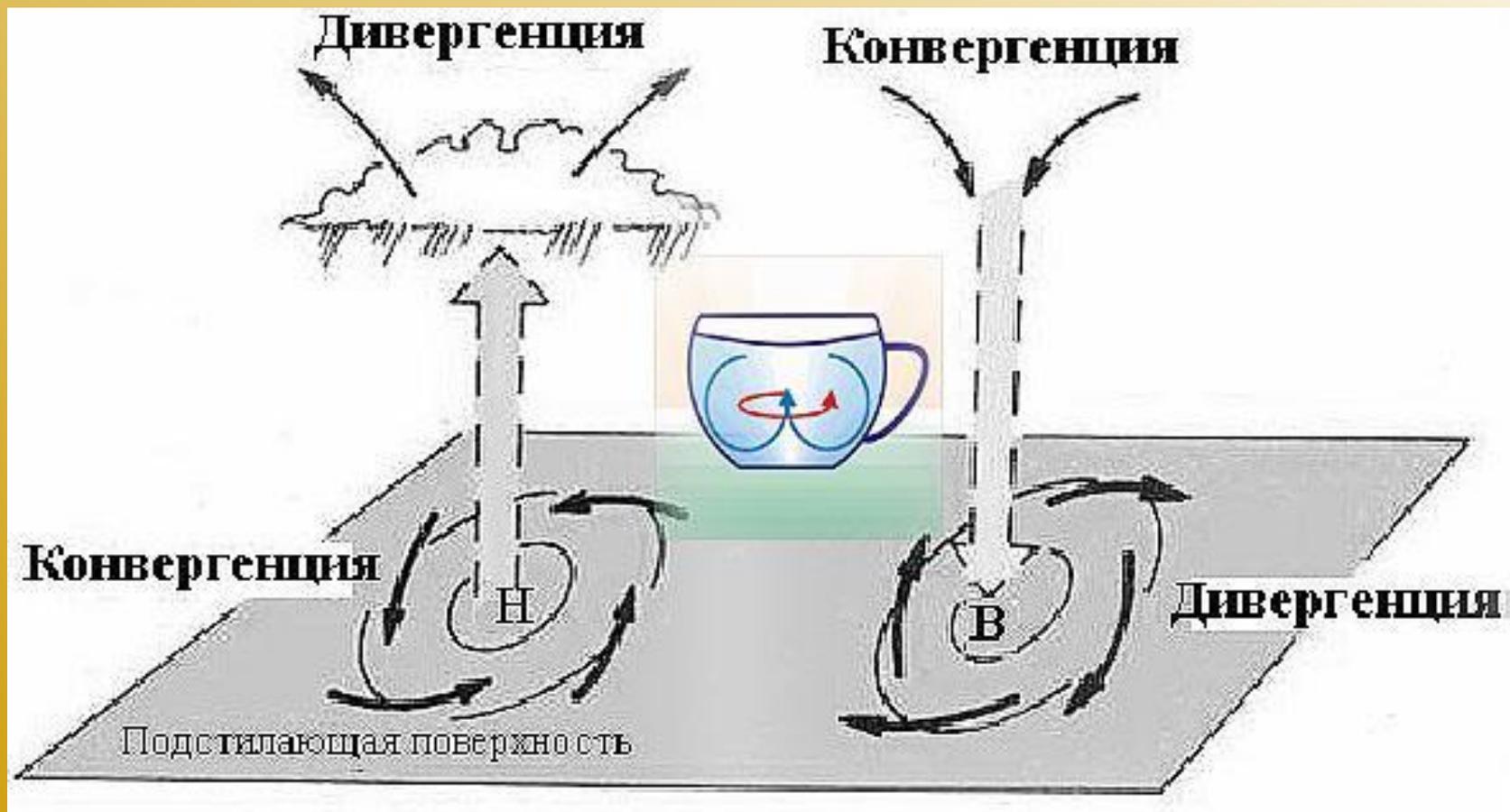
$$w(z) = -\int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = \Omega_g \cdot \int_0^z e^{-az} \sin az \cdot dz = \Omega_g \cdot \frac{(1 - \sqrt{2} \cdot e^{-az} \sin(az + \pi/4))}{2a}.$$

На верхней границе экмановского ПС

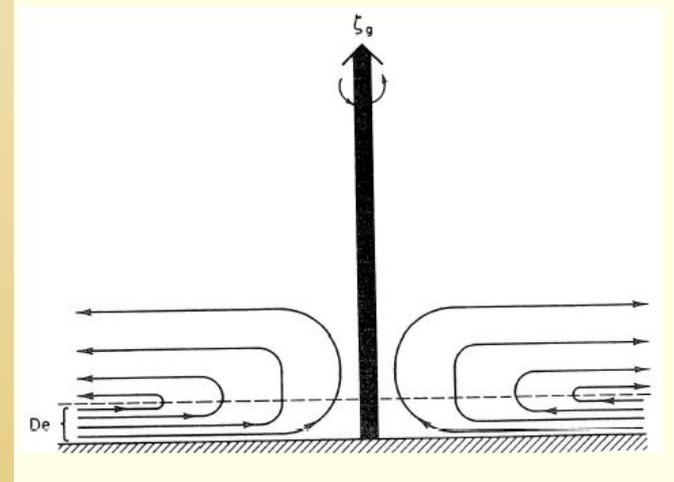
$$w(z = H_{ekm}) = \frac{\Omega_g}{2a}$$

Пример: при $\Omega_g = 3_{10}^{-5} \text{с}^{-1}$ (слаб. Ц), $a = 3_{10}^{-3} \text{м}^{-1}$ оценка $w = 1 \text{ см/с}$

«Экмановское накачивание» - процесс генерации вертикальных движений на верхней границе ПС

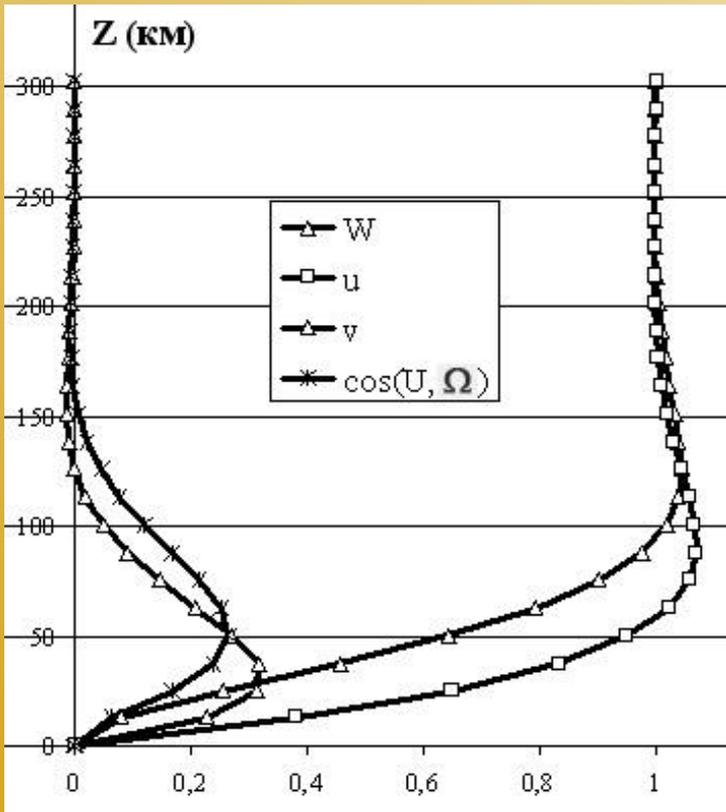


Важность «экмановского накачивания»



- Благодаря этому эффекту в ПС происходит преобразование вихрей с вертикальной осью, генерируемых в свободной атмосфере, в вихри с горизонтальной осью. С последующим распадом их и диссипацией.

Спиральность экмановской циркуляции



Для того, чтобы выявить четвертое свойство ветра в экмановском пограничном слое следует найти угол между вектором ветра и вектором вихря, определяющим угловую скорость вращения воздуха. Для этого следует вычислить скалярное произведение вектора скорости на вектор вихря, т.е. спиральность вектора скорости

$$\cos(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}) = \frac{\Omega_x \cdot u + \Omega_y \cdot v + \Omega_z \cdot w}{|\boldsymbol{\Omega}| \cdot |\mathbf{V}|} \approx \frac{-\frac{\partial v}{\partial z} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot v}{\left| \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right| \cdot |\mathbf{V}|}$$



Спиральность имеет максимум середине ПС. Там возникают мезомасштабные вихри, приводящие к облакообразованию



