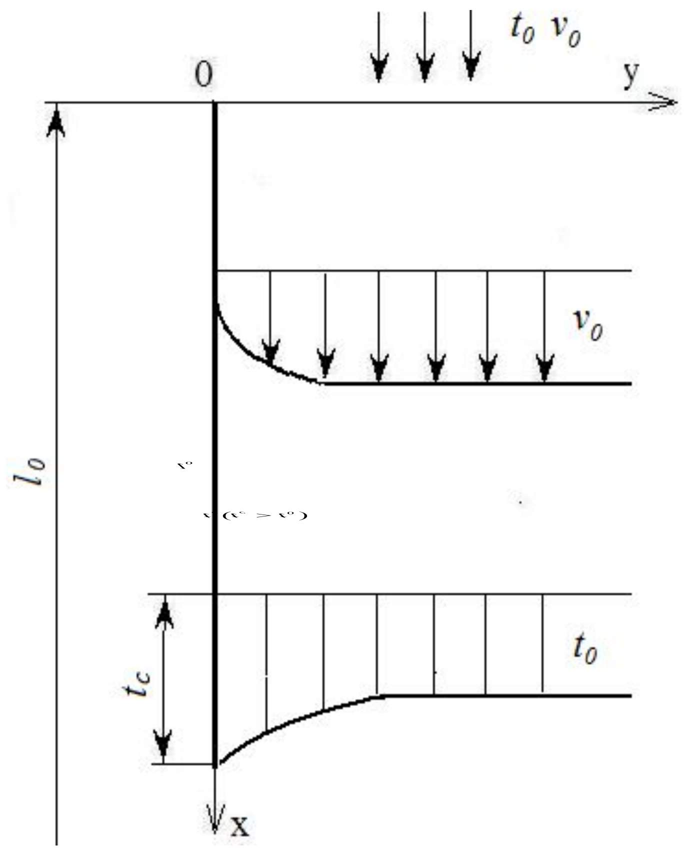
Условия подобия процессов конвективного теплообмена

Система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена и условия однозначности включают значительное количество переменных. В связи с этим для изучения конвективного теплообмена большое значение имеют экспериментальные исследования, которые невозможны без использования теории подобия. С помощью этой теории размерные физические величины можно объединить в безразмерные комплексы, что существенно упрощает проведение исследований. Рассмотрим постановку краевой задачи конвективного теплообмена (рис)



Пусть поверхность твердого тела омывается несжимаемой жидкостью с параметрами:

температурой t_0 скоростью v_0

Характерный размер тела l_0

температура поверхности тела - $t_c (t_c > t_0)$

Допустим, что теплофизические параметры жидкости постоянны. Учитывая расположение осей на рис., запишем:

$$g_x = g, g_y = g_z = 0$$

В этом случае поле температур и скоростей можно описать дифференциальными уравнениями в приближении пограничного слоя

$$v_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}$$

$$\vartheta = t - t_o \qquad dt = d\vartheta \qquad t_o = const$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + g\beta\vartheta$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Граничные условия:

при $y = \infty$ $\qquad \vartheta = \vartheta_0 = 0, v_x = v_0, v_y = 0;$

при $\quad y = 0 \qquad 0 < x < l_0, -\infty \le z \le +\infty;$

$$\vartheta = \vartheta_c = t_c - t_0 = const, v_x = v_y = v_z = 0;$$

В этих уравнениях можно выделить три вида величин:

– независимые переменные x, y

– зависимые переменные ϑ, v_x, v_y

– постоянные величины $v_0, t_0, l_0, \vartheta_c, \nu, a, g, \beta$

Введем безразмерные величины: $X=\frac{x}{l_0}$ $Y=\frac{y}{l_0}$ $W_x=\frac{v_x}{v_0}$ $W_y=\frac{v_y}{v_0}$ $\Theta=\frac{\vartheta}{\vartheta_c}$

Тогда: $x=l_0X$ $y=l_0Y$ $v_x=v_0W_x$ $v_y=v_0W_y$ $\vartheta=\vartheta_c\Theta$

Подставляя в вышеуказанные дифференциальные уравнения, получаем для 1-го:

$$v_0W_x\frac{\partial\vartheta_c\Theta}{\partial l_0X}+v_0W_y\frac{\partial\vartheta_c\Theta}{\partial l_0Y}=a\frac{\partial^2\vartheta_c\Theta}{\partial(l_0Y)^2}=\frac{v_0\vartheta_c}{l_0}\left[W_x\frac{\partial\Theta}{\partial X}+W_y\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right]=$$

$$=a\vartheta_c\frac{\partial^2\Theta}{l_0^2\partial Y^2}$$

Сокращая на ϑ_c , получаем:

$$\frac{v_0l_0}{a}\left[W_x\frac{\partial\Theta}{\partial X}+W_y\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right]=\frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2}$$

для 2-го:

$$v_0W_x\frac{\partial v_0W_x}{\partial l_0X}+v_0W_y\frac{\partial v_0Wx}{\partial l_0Y}=\nu\frac{\partial}{\partial l_0Y}\left(\frac{\partial v_0W_x}{\partial l_0Y}\right)+g\beta\vartheta_c\Theta$$

$$\frac{v_0^2}{l_0}\left(W_x\frac{\partial W_x}{\partial X}+W_y\frac{\partial W_x}{\partial Y}\right)=\frac{\nu\cdot v_0}{l_0^2}\frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2}+g\beta\vartheta_c\Theta$$

Умножая левую и правую части уравнения на $\frac{l_0^2}{\nu\cdot v_0}$, получим:

$$\frac{v_0 l_0}{\nu}\left(W_x\frac{\partial W_x}{\partial X}+W_y\frac{\partial W_x}{\partial Y}\right)=\frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2}+\frac{g\beta\vartheta_c l_0^2}{\nu\cdot v_0}\Theta$$

Представим последнее слагаемое в виде:

$$\frac{g\beta\vartheta_c l_0^2}{\nu\cdot v_0}\Theta=\frac{g\beta\vartheta_c l_0^3}{\nu^2}\cdot\frac{\nu}{v_0 l_0}\Theta$$

Тогда окончательно уравнение движения примет вид:

$$\frac{v_0 l_0}{\nu}\left(W_x\frac{\partial W_x}{\partial X}+W_y\frac{\partial W_x}{\partial Y}\right)=\frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2}+\frac{g\beta\vartheta_c l_0^3}{\nu^2}\frac{\nu}{v_0 l_0}\Theta$$

Аналогично преобразуем и уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial v_0 W_x}{\partial l_0 X}+\frac{\partial v_0 W_y}{\partial l_0 Y}=0 \qquad \text{или} \qquad \frac{v_0}{l_0}\left(\frac{\partial W_x}{\partial X}+\frac{\partial W_y}{\partial Y}\right)=0$$

Учитывая, что $\frac{\nu}{l_0} \neq 0$, окончательно имеем: $\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} = 0$

Граничные условия запишем в виде:

при $Y = \infty$ $\quad \Theta = \Theta_0 = 0, W_x = 1, W_y = 0;$

при $Y = 0$ $\quad 0 < X < l_0, \quad \Theta = \Theta_c = 1, W_x = W_y = 0;$

Если известно температурное поле, тогда: $\alpha = -\frac{\lambda}{t_c - t_0}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{y=0}$

Или: $\frac{\alpha \cdot l_0}{\lambda} = -\left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y}\right)_{Y=0}$

В полученных уравнениях можно выделить безразмерные комплексы (числа подобия):

$Nu = \frac{\alpha \cdot l_0}{\lambda}$ – **число Нуссельта**

В задачах конвективного теплообмена число (критерий) Nu является искомой величиной для нахождения коэффициента α

Известный из гидравлики критерий, характеризующий соотношение сил инерции и вязкости:

$$\mathrm{Re} = \frac{v_0 \cdot l_0}{\nu}$$ – **число Рейнольдса**

Тепловой аналог числа Рейнольдса: $$Pe = \frac{v_0 \cdot l_0}{a}$$ – **число Пекле**

Критерий, характеризующий подъемную силу, возникающую вследствие разности плотностей:

$$Gr = \frac{g\beta\vartheta_c \cdot l_0^3}{\nu^2}$$ – **число Грасгофа**

Для однородной среды при $\beta = const$

$$Ar = \frac{g l_0^3}{\nu^2}\frac{(\rho - \rho_0)}{\rho}$$ **- число Архимеда**

Используя критерии подобия систему дифференциальных уравнений можно записать в следующем виде:

$$Nu = -\frac{\partial \Theta}{\partial Y}$$

$$Pe\left(W_x \frac{\partial \Theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2}$$

$$\mathrm{Re}\left(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} \right) = \frac{Gr}{\mathrm{Re}} \Theta + \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2}$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} = 0$$

В этих уравнениях можно выделить три вида безразмерных величин:

– независимые переменные X, Y

– зависимые переменные Nu, Θ, W_x, W_y

– постоянные величины из граничных условий Pe, Re, Gr

Тогда можно записать:

$$Nu = f_1(X_c, Y_c, Pe, \mathrm{Re}, Gr)$$

$$\Theta = f_2(X, Y, Pe, \mathrm{Re}, Gr)$$

$$W_x = f_3(X, Y, Pe, \mathrm{Re}, Gr)$$

$$W_y = f_4(X, Y, Pe, \mathrm{Re}, Gr)$$

Эти уравнения называют уравнениями подобия. Величины X_c, Y_c соответствуют поверхности стенки, т.к. нахождение α или Nu имеет смысл только для точек, лежащих на поверхности стенки.

Если в уравнении движения учесть член $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial X}$, тогда в безразмерном виде это уравнение будет иметь вид:

$$\frac{l_0}{\rho v_0}\frac{\partial p}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{p}{\rho v_0^2}\frac{v_0 l_0}{\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial X}\left(Eu\,\mathrm{Re}\right)$$

$$Eu = \frac{p}{\rho v_0^2}$$ – **число Эйлера**

Число Эйлера характеризует соотношение сил давления и инерции.

При изучении конвективного теплообмена используется число Прандтля (мера подобия полей температур и скоростей):

$$\Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda}$$ – **число Прандтля**

Для газов $\Pr$ практически не зависит от температуры и давления, а определяется атомностью газа. Для данного газа $\Pr = const$

Для жидкостей при увеличении температуры число $\Pr$ резко уменьшается.

С учетом этого критерий Пекле можно записать в виде:

$$Pe = \mathrm{Re} \cdot \Pr = \frac{v_0 l_0}{\nu} \frac{\nu}{a}$$

Также используется и критерий Рэлея – $Ra = Gr \cdot \Pr$

Исходя из вышеизложенного, сформулируем условия подобия физических процессов:

1. Подобные процессы должны иметь одинаковую физическую природу и описываться одинаковыми по форме записи дифференциальными уравнениями.

2. Условия однозначности должны быть одинаковыми, кроме числовых значений размерных постоянных, входящих в эти условия.

3. Одноименные определяющие критерии должны иметь одинаковое числовое значение.

В числа подобия входит линейный размер .

l_0

Теория подобия не дает однозначного ответа на вопрос, какой размер должен быть принят за определяющий. Обычно за определяющий (характерный) размер принимают тот, который в наибольшей степени влияет на процесс и удобен в расчетной практике (например, диаметр трубы, продольная координата и т.д.). Теория подобия не дает универсальных рекомендаций к выбору и определяющей температуры – температуры, при которой выбираются входящие в числа подобия физические свойства теплоносителя. Целесообразно в качестве определяющей использовать температуру, которая наиболее полно отражает особенности состояния теплоносителя и процесса теплообмена, а также может быть легко вычислена.