ВОПРОС 22:

Леммы Чебышева

β:

Лемма 1.

$$] \xi : \quad x_i \geq 0 \quad \forall i = 1,\ldots,n.$$

$$] P(\xi_i) = p_i \Rightarrow$$

$$P(\eta \geq 1) < E(\eta)$$

Доказательство

$$P(\xi \geq 1) = \sum_{\forall i:\, x_i \geq 1} p_i \leq$$

$$\leq \sum_{\forall x_i \geq 1} p_i x_i \leq$$

$$\leq \sum_{\forall x_i \geq 1} p_i x_i + \sum_{\forall x_i < 1} p_i x_i = E(\eta)$$

Лемма 2.

$$\rceil\ \xi - \text{с.в.},\ \ \varepsilon > 0.$$

Тогда:

$$P[|\xi - E(\xi)| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$$

- неравенство Чебышева

Доказательство

$$P[|\xi - E_\xi < \varepsilon] =$$

$$= 1 - P(|\xi - E_\xi| \geq \varepsilon) =$$

$$= 1 - P\{\frac{(\xi - E_\xi)^2}{\varepsilon^2} > 1\} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} E\{[\xi - E_\xi]^2 = 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} D_\xi$$

ВОПРОС 23:

Закон больших чисел Чебышева

$]\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ – **последовательность**

- попарно независимых случайных величин: $D(\xi_i) \le C \quad \forall i.$

Тогда для $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)\right| < \varepsilon\right] = 1$$

Доказательство

$$1 \geq P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)\right| < \varepsilon\right] >=$$

$$\geq 1 - \frac{D(\bar{\xi}_n)}{\varepsilon^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i) \geq 1 - \frac{C}{\varepsilon^2 n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)\right| < \varepsilon\right] = 1$$

Частный случай закона больших чисел Чебышева

$$]E(\xi_i) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right] = 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Случайная величина ξ_n *сходится по вероятности к* числу *А*

если при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \leftarrow \infty} [P(|\xi_n - a| < \varepsilon)] \to 1$$

Частный случай закона больших чисел Чебышева – ФОРМУЛИРОВКА 2:

$$\exists \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots:$$

$$E(\xi_i) = a \quad D(\xi_i) < C \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) \xrightarrow{P} a$$

ВОПРОС 24:

Закон больших чисел Бернулли

$P(A) = p$

1. *n* независимых испытаний

2. Вероятность наступления события *A* равна

$$P(A) = p$$

$$P(\overline{A}) = 1 - p = q.$$

3. Вероятность того, что событие А произойдет m раз при n испытаниях

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

Закон больших чисел в форме Бернулли

$$\lim_{n\to\infty}\left[P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\right]=1$$

Доказательство

$$]\xi = \frac{m}{n},$$

$$E(\xi) = E\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} E(m) = \frac{np}{n} = p$$

$$D(\xi) = D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D(m) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$$

$$1 \geq P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\left(\frac{m}{n}\right)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

Тогда, при $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} [\, P(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon)\,] = 1$$

ВОПРОС 25:

Классическая центральная предельная теорема

$] \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \ldots :$ *независимсимы,*

$E_\xi < \infty, \quad D_\xi < \infty$

$$] S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \quad \Rightarrow$$

$$F\left(\frac{S_n - nE_\xi}{\sigma_\xi \sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} N(0,1)$$

Другая форма классической ЦПТ

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$F\left(\frac{\overline{x}_n - E_x}{\sigma_x}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} N(0,1)$$

Локальная центральная предельная теорема

$$l \quad F(X_1, X_2, ..., X_n ...)$$

- абсолютно непрерывна

1. $$Z_n = \frac{S_n - nE_X}{\sigma\sqrt{n}})$$

- абсолютно непрерывна

2. $$\varphi_{Z_n}(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ВОПРОС 26:

Теорема Ляпунова

$]\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ - попарно- независимые

- случайные величины

с математическими ожиданиями $E(\xi_i) = a_i$

и

дисперсиями $D(\xi_i) = \sigma^2{}_i$

обладающие следующими двумя свойствами:

1) $\exists L: \quad \forall i \quad |\xi_i - E(\xi_i)| < L$

2) $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$$\Rightarrow \quad \xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \underset{n\to\infty}{\widetilde{\in}} N$$

NB!

$$a = E(\xi) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i;$$

$$\sigma^2 = D(\xi) = D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2;$$

где Ф(х) - интеграл вероятностей

Следствие:

$$P(x_1 < \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n < x_2) \cong \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)$$

где Ф(х) - интеграл вероятностей

Александр Михайлович Ляпунов (25 мая 1857, Ярославль — 3 ноября 1918, Одесса) — русский математик и механик, академик Петербургской Академии наук с 1901 г., член-корреспондент Парижской академии наук, член Национальной академии деи Линчеи (Италия) и ряда других академий наук и научных обществ.

ВОПРОС 27:

Основной закон теории ошибок

Ошибки измерений в основном можно подразделить на три группы:

1) грубые ошибки;
2) систематические ошибки;
3) случайные ошибки.

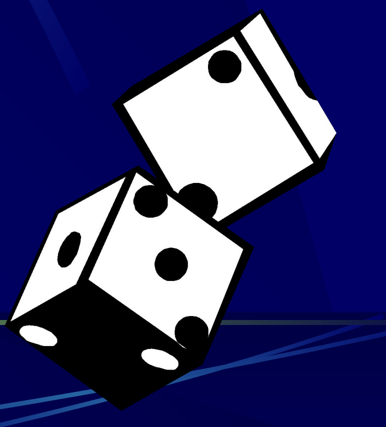
Основной закон ошибок:

$$\upsilon = z - a \in N$$

$$\Rightarrow \quad z = \upsilon + a \in N$$

ВОПРОС 28:

Интегральная теорема Лапласа



Теорема.

$\text{Į}\ \xi = m \quad -$

$-$ *число появления события A в n опытах :*

$\forall i = 1,\dots,n \quad P(A_i) = p \qquad (\, p \neq 1, \quad p \neq 0\,)$

$$\Rightarrow \quad F(m) \underset{n\to\infty}{\tilde{\in}} N(np, \quad \sqrt{npq}).$$

Следствие:

$$P(x_1 < m < x_2) \cong \Phi\left(\frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Пример:

Факультет выпускает в среднем *70%* специалистов, способных работать инженерами. Определить вероятность того, что из *1000 выпускников* число справляющихся с обязанностями инженера, заключено между *65* и *76*.

Решение.

$$p = 0,7; \quad q = 1 - p = 0,3; \quad n = 1000;$$

$$np = 0.7 \cdot 1000 = 700,$$

$$npq = 1000 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 210;$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{210} \approx 14,49.$$

$$P(652 < m < 760) = \Phi(\frac{760 - 700}{14,49}) - \Phi(\frac{652 - 700}{14,49}) =$$

$$= \Phi(4,14) - \Phi(-3,31) =$$

$$= \Phi(4,14) + \Phi(3,31) =$$

$$= 0,49997 + 0,49948 = 0,99945$$