

Сегодня: *

Лекция 8

Тема: ДИФРАКЦИЯ

Содержание лекции:

- 8.4. Дифракция Фраунгофера:
 - 8.4.1. Дифракция Фраунгофера на одной щели;
 - 8.4.2. Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке;
- 8.5. Пространственная решетка;
- 8.6. Дифракция на пространственной решетке.
Формула Вульфа-Брэггов;
- 8.7. Разрешающая способность оптических приборов:
 - 8.7.1. Разрешающая способность объектива;
 - 8.7.2. Разрешающая способность дифракционной решетки.

8.4. Дифракция Фраунгофера

Немецкий физик И. Фраунгофер (1787-1826) рассмотрел дифракцию плоских световых волн, или дифракцию в параллельных лучах. Дифракция Фраунгофера, имеющая большое практическое значение, наблюдается в том случае, когда источник света и точка наблюдения бесконечно удалены от препятствия, вызвавшего дифракцию. Чтобы этот тип дифракции осуществить, достаточно источник света поместить в фокусе собирающей линзы, а дифракционную картину исследовать в фокальной плоскости второй собирающей линзы, установленной за препятствием.

8.4.1. Дифракция Фраунгофера на одной щели.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера от бесконечно длинной щели (для этого практически достаточно, чтобы длина щели была значительно больше ее ширины). Пусть плоская монохроматическая световая волна падает

перпендикулярно плоскости щели шириной a (рис. 8.8 а)

Рис. 8.8



Так как экран по предположению находится очень далеко, то лучи, направленные в любую из его точек, по существу, параллельны. Рассмотрим сначала свет, падающий по нормали к плоскости щели (рис. 8.8, а). Все лучи находятся в фазе, поэтому в центре экрана возникает светлое пятно. Рассмотрим теперь лучи, идущие под углом θ (рис. 8.8, б), таким, что луч из верхнего края щели проходит ровно на одну длину волны больше луча от нижнего края щели. Луч из центра щели проходит путь, который на половину длины волны больше пути луча от нижнего края щели. Эти лучи оказываются в противофазе и, интерферируя, гасят друг друга. Аналогичным образом луч из точки

щели, гасит луч из точки, расположенной на таком же расстоянии над центром щели. Таким образом, каждый луч из нижней половины щели гасит соответствующий луч, проходящий через ее верхнюю половину. Интерферируя попарно, все лучи гасят друг друга; поэтому на экране под данным углом света не будет. Угол θ , при котором происходит гасящая интерференция, как видно из рис. 8.8, б, удовлетворяет соотношению $\lambda = D \sin \theta$, откуда

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{D}$$

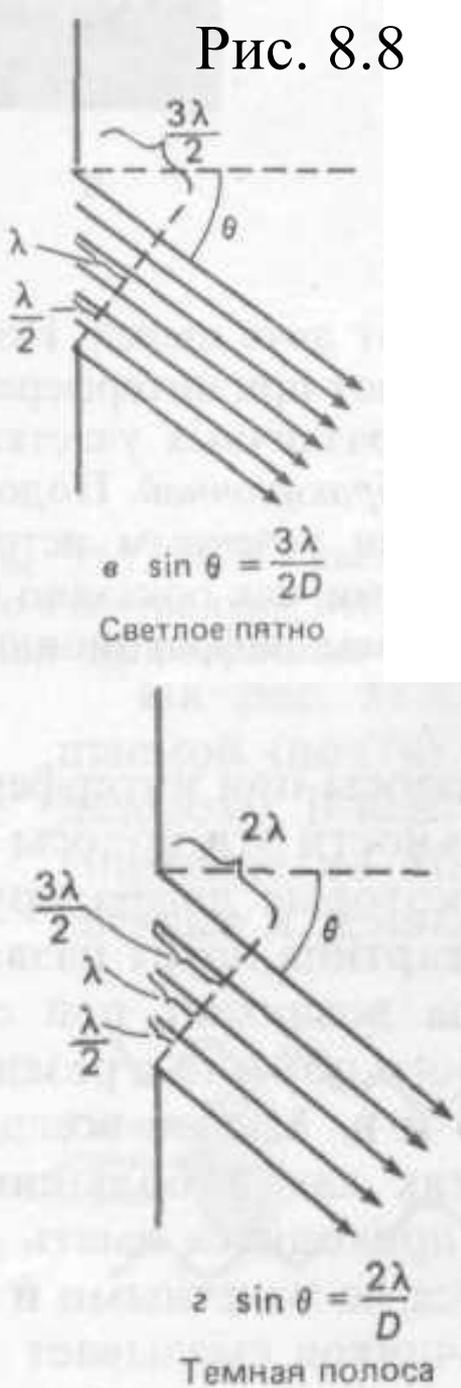
[первый минимум].

(8.4.1)

Интенсивность света максимальна при $\theta = 0^\circ$ и убывает до минимума (с интенсивностью, равной нулю) при угле θ , задаваемом соотношением (8.4.1).

Рассмотрим теперь больший угол θ , такой, что луч из верхнего края щели проходит путь, на $(\frac{3}{2})\lambda$ превышающий путь луча из нижнего края щели (рис. 8.8, в). В этом

Рис. 8.8



случае лучи из нижней трети щели, попарно интерферируя, гасят лучи из средней трети, так как в каждой паре лучи оказываются в противофазе. Но свет из верхней трети щели все же достигнет экрана, и под данным углом θ на экране возникнет светлое пятно, но не столь яркое, как центральное пятно, соответствующее $\theta = 0^\circ$. При еще большем угле θ , таком, что луч из верхнего края щели проходит путь, на 2λ превышающий путь луча из нижнего края щели (рис. 8.8, б), лучи из нижней четверти щели будут гасить лучи из второй снизу четверти, так как разность хода между ними составит $\lambda/2$. В свою очередь лучи из четверти, расположенной непосредственно над центром щели, интерферируют с лучами из ее верхней четверти и гасят их. Следовательно, под выбранным углом

В распределении интенсивности на дифракционной картине опять наблюдается минимум с нулевой интенсивностью. График зависимости интенсивности света от угла показан на рис. 8.9,а. Он хорошо соответствует снимку, представленному на рис. 8.9,б. Обратите внимание на то, что минимумы (с нулевой интенсивностью) соответствуют

$$D \sin \theta = m \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (8.4.2)$$

за исключением $m = 0$, которому отвечает наибольший из максимумов. Между минимумами расположены меньшие (по сравнению с $m = 0$) макс

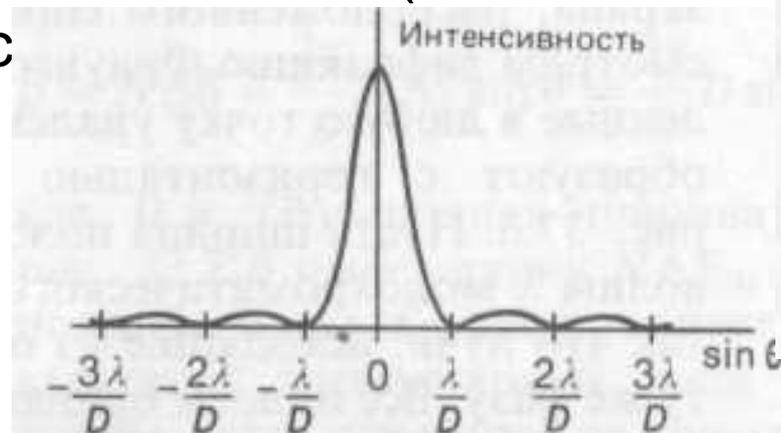


Рис. 8.9,а

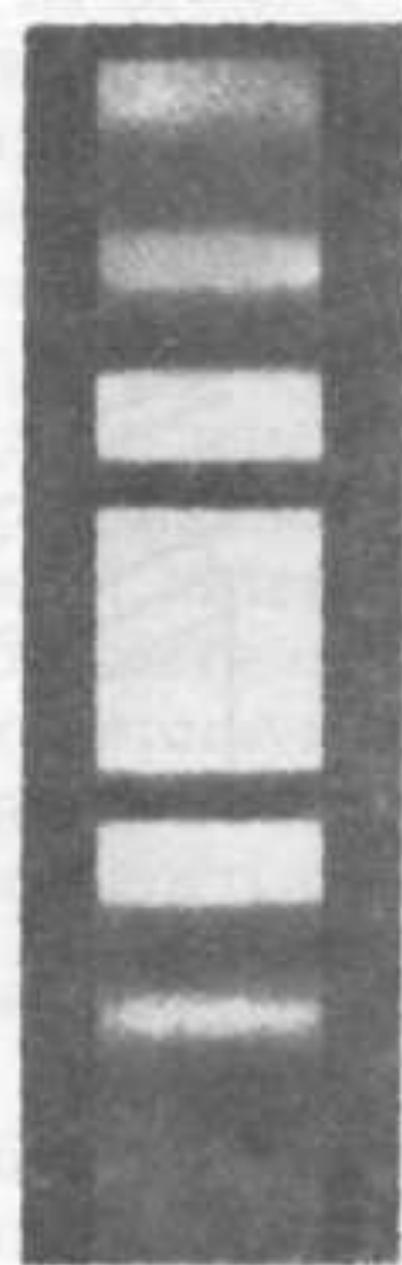


Рис. 8.9,б

Из соотношения (8.4.1) видно, что, чем меньше апертура D , тем сильнее центральный дифракционный максимум.

Следовательно, если *число зон Френеля четное*

$$D \sin\theta = \pm 2m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (8.4.3)$$

то в точке наблюдения имеет место дифракционный минимум (полная темнота), если же *число зон Френеля нечетное*

$$D \sin\theta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (8.4.4)$$

то наблюдается дифракционный максимум, соответствующий действию одной некомпенсированной зоны Френеля.

Из условий (8.4.3) и (8.4.4) можно найти направления на точки экрана, в которых *амплитуда* (а следовательно, и *интенсивность*) равна нулю ($\sin \theta_{\min} = \pm m\lambda/D$) или *максимальна* (так как $\sin \theta_{\max} = \pm (2m + 1)\lambda/2D$).

Распределение интенсивности на экране, получаемое вследствие дифракции (дифракционный спектр), приведено

Расчеты показывают, что интенсивности центрального и последующих максимумов относятся как $1 : 0,047 : 0,017 : 0,0083 : \dots$, т. е. основная часть световой энергии сосредоточена в центральном максимуме. Из опыта и соответствующих расчетов следует, что сужение щели приводит к тому, что центральный максимум расплывается, а его яркость уменьшается (это, естественно, относится и к другим максимумам). Наоборот, чем щель шире ($D > \lambda$), тем картина ярче, но дифракционные полосы уже, а число самих полос больше. При $D \gg \lambda$, в центре получается резкое изображение источника света, т. е. имеет место прямолинейное распространение света.

Положение дифракционных максимумов зависит от длины волны λ , поэтому рассмотренный вид дифракционная картина имеет лишь для монохроматического света. В случае белого света будет наблюдаться совокупность соответствующих картин для разных цветов (сдвинутых друг относительно друга в соответствии с длиной волны λ). Центральный максимум ($\theta = 0$) будет общим для всех длин волн, поэтому центр

белой полосы, переходящей в цветную картину. Последующие максимумы для разных длин волн уже не совпадают между собой, **ближе к центру расположатся максимумы, соответствующие более коротким волнам**. Однако они настолько расплывчаты, что отчетливого разделения различных длин волн с помощью дифракции на одной щели получить невозможно.

8.4.2. Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке

Большое практическое значение имеет дифракция, наблюдаемая при прохождении света через одномерную дифракционную решетку — систему параллельных щелей равной ширины, лежащих в одной плоскости и разделенных равными по ширине непрозрачными промежутками. Рассматривая дифракцию Фраунгофера на щели, мы видели, что распределение интенсивности на экране определяется направлением дифрагированных лучей. Это означает, что перемещение щели параллельно самой себе влево или вправо не изменит дифракционной картины. Следовательно, если перейти от одной щели ко многим (к дифракционной решетке), то

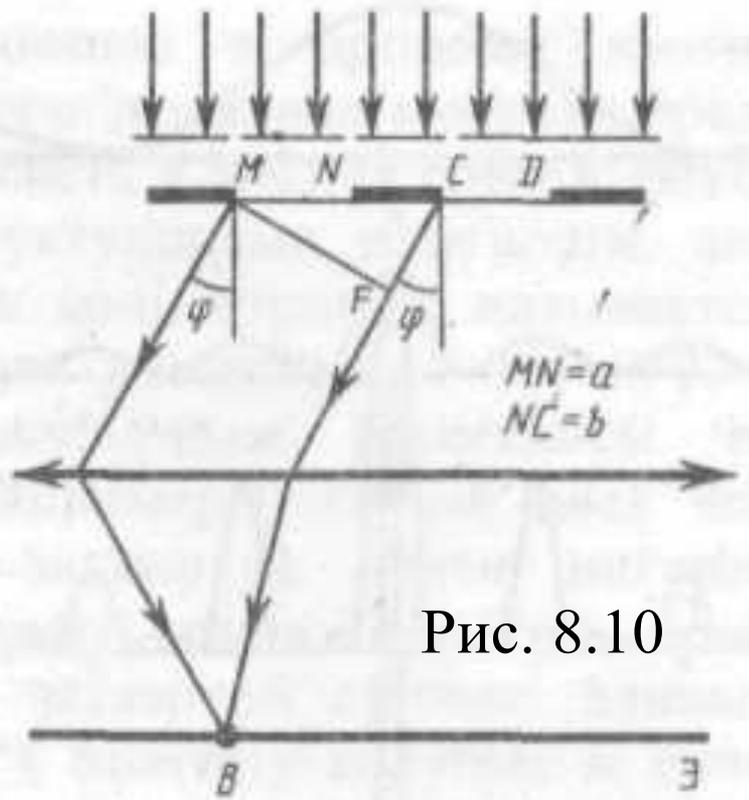


Рис. 8.10

дифракционные картины, создаваемые каждой щелью в отдельности, будут одинаковыми. Дифракционная картина на решетке определяется как результат взаимной интерференции волн, идущих от всех щелей, т. е. в дифракционной решетке осуществляется многолучевая интерференция когерентных дифрагированных пучков света, идущих от всех щелей. Для наглядности рассмотрим дифракционную решетку, состоящую из

двух щелей: **MN** и **CD** (рис. 8.10). Если ширина каждой щели равна **a**, а ширина непрозрачных участков между щелями **b**, то величина

d = a + b называется **постоянной (периодом) дифракционной решетки**. Пусть плоская монохроматическая волна падает нормально к плоскости решетки. Так как щели находятся друг от друга на одинаковых расстояниях, то разности хода лучей,

одинаковы в пределах всей дифракционной решетки:

$$(8.4.5) \quad \Delta = CF = (a + b) \sin \varphi = d \sin \varphi.$$

Очевидно, что в тех направлениях, в которых *ни одна* из щелей не распространяет свет, он не будет распространяться и *при двух щелях*, т. е. *прежние (главные) минимумы* интенсивности будут наблюдаться в направлениях, определенных условием $a \sin \varphi = \pm m \lambda$ ($m = 1, 2, 3, \dots$).

Кроме того, вследствие взаимной интерференции световых лучей, посылаемых двумя щелями, в некоторых направлениях они будут гасить друг друга, т. е. возникнут дополнительные минимумы. Очевидно, что эти дополнительные минимумы будут наблюдаться в тех направлениях, которым соответствует разность хода лучей $\lambda/2$,

$3\lambda/2, \dots$, посылаемых, например, от крайних левых точек *M* и *C* обеих щелей. Таким образом, с учетом (8.4.5) условие

$$d \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Наоборот, действие одной щели будет усиливать действие другой, если

$$d \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

(8.4.6)

т. е. направлениям (8.4.6) соответствуют так называемые **главные максимумы**.

Таким образом, полная дифракционная картина для двух щелей определяет

$$a \sin \varphi = \lambda, \quad 2\lambda, \quad 3\lambda, \dots;$$

главные минимумы

$$d \sin \varphi = \lambda/2, \quad 3/2\lambda, \quad 5/2\lambda, \dots;$$

дополнительные минимумы

$$d \sin \varphi = 0, \quad \lambda, \quad 2\lambda, \quad 3\lambda,$$

главные максимумы

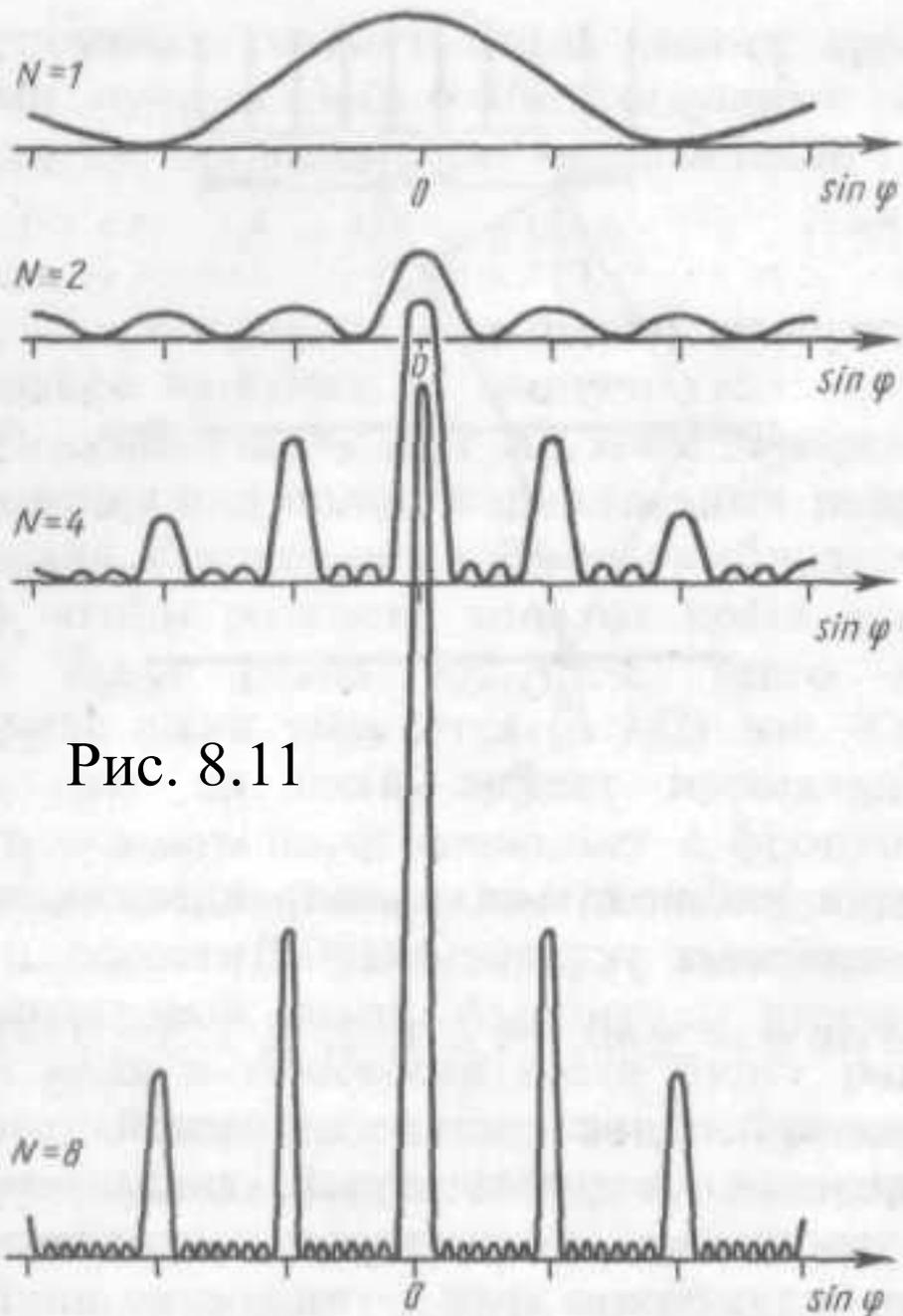


Рис. 8.11

т. е. между двумя главными максимумами располагается один дополнительный минимум. Аналогично можно показать, что между каждыми двумя главными максимумами при трех щелях располагаются два дополнительных минимума, при четырех щелях — три и т. д.

Если дифракционная решетка состоит из N щелей, то условие главных минимумов является условие (8.4.5), условие главных максимумов — условие (8.4.6), а условие дополнительных минимумов

$$d \sin \varphi = \pm m' \lambda / N$$

$$(m' = 1, 2, \dots, N - 1, N + 1, \dots, 2N - 1, 2N + 1, \dots),$$

где m' может принимать все целочисленные значения, кроме $0, N, 2N, \dots$, т. е. кроме тех, при которых условие (8.4.7) переходит в (8.4.5). Следовательно, в случае N щелей между двумя главными максимумами располагается $(N - 1)$ дополнительных минимумов, разделенных вторичными максимумами, создающими весьма слабый фон.

Чем больше щелей N , тем большее количество световой энергии пройдет через решетку, тем больше минимумов образуется между соседними главными максимумами, тем, следовательно, более интенсивными и более острыми будут максимумы. На рис. 8.11 качественно сопоставлена дифракционная картина от одной, двух, четырех и восьми щелей. Так как модуль $\sin \varphi$ не может быть больше единицы, то из (8.4.6) следует, что число главных максимумов

$m \leq d/\lambda$ определяется отношением периода решетки к длине волны. Положение главных максимумов зависит от длины волны λ (см. (8.4.6)). Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы, кроме центрального ($m = 0$), разложатся в спектр, фиолетовая область которого будет обращена к центру дифракционной картины, красная — наружу. Это свойство дифракционной решетки используется для исследования спектрального состава света (определения длин волн и интенсивностей всех его монохроматических компонентов), т. е. дифракционная решетка может быть использована как спектральный прибор. Дифракционные решетки, используемые в различных областях спектра, различаются размерами, формой, материалом поверхности, профилем штрихов и их частотой (от 6000 - 0,25 штрих/мм, что позволяет перекрывать область спектра от рентгеновской его части до инфракрасной). Например, ступенчатый профиль решетки позволяет концентрировать основную часть падающей энергии в направлении одного определенного

8.4.2. Дифракция в опыте с интерференцией от двух щелей

Анализируя опыт Юнга с интерференцией от двух щелей, мы предполагали равномерную освещенность центральной части экрана. Это эквивалентно предположению о том, что щели являются бесконечно узкими, в результате чего центральный дифракционный пик размывается на весь экран. Разумеется, этого никогда не бывает с реальными щелями и дифракция ослабляет интенсивность вторичных интерференционных максимумов (светлых полос) так, что они не имеют одинаковой высоты.

Вычислим теперь распределение интенсивности для интерференционной картины в опыте Юнга с учетом дифракции. Предположим, что обе щели имеют одинаковую ширину D и

центры их находятся на расстоянии d друг от друга. Так как расстояние до экрана велико по сравнению с d (по предположению мы рассматриваем дифракцию Фраунгофера), дифракционные картины от каждой щели в отдельности, по существу, совпадают. Следовательно, амплитуда волны, падающей уже не будет равна

$$E_{\theta_0} = 2E_0 \cos \delta/2,$$

как это следовало бы из формулы (9.10) с учетом дифракции дается выражением

$$E_{\theta_0} = 2E_0 \left(\frac{\sin [\beta/2]}{[\beta/2]} \right) \cos \frac{\delta}{2}.$$

(В этой главе мы имели дело только с амплитудой вектора напряженности электрического поля E и писали поэтому просто E_{θ} вместо E_{θ_0} , как это делалось раньше).

Следовательно, интенсивность определяется выражением

$$I_{\theta} = I_0 \left(\frac{\sin [\beta/2]}{[\beta/2]} \right)^2 \left(\cos \frac{\delta}{2} \right)^2, \quad (8.4.8)$$

где

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} D \sin \theta, \quad \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta.$$

Первый из членов в скобках в формуле (8.4.8) иногда называют дифракционным множителем, а второй - интерференционным множителем. На рис. 8.8, а и б приведены графики, соответствующие случаю, когда $d = 6D$ и $D = 10\lambda$ (график на рис. 8.8,б совпадает с графиком на рис. 8.11 с точностью до множителя I_0). На рис. 8.8,в изображено произведение соответственно дифракционного и интерференционного множителей и коэффициента I_0 в зависимости от угла θ (или положения на экране, когда угол θ не слишком велик) согласно соотношению (8.4.8). Штриховая линия на рис. 8.8,в показывает, что дифракционный множитель ведет себя подобно огибающей интерференционных пиков. На рис. 8.8 заметно убывание

центра. Более отчетливо это видно на рис. 8.8 для случая с меньшим отношением d/D .

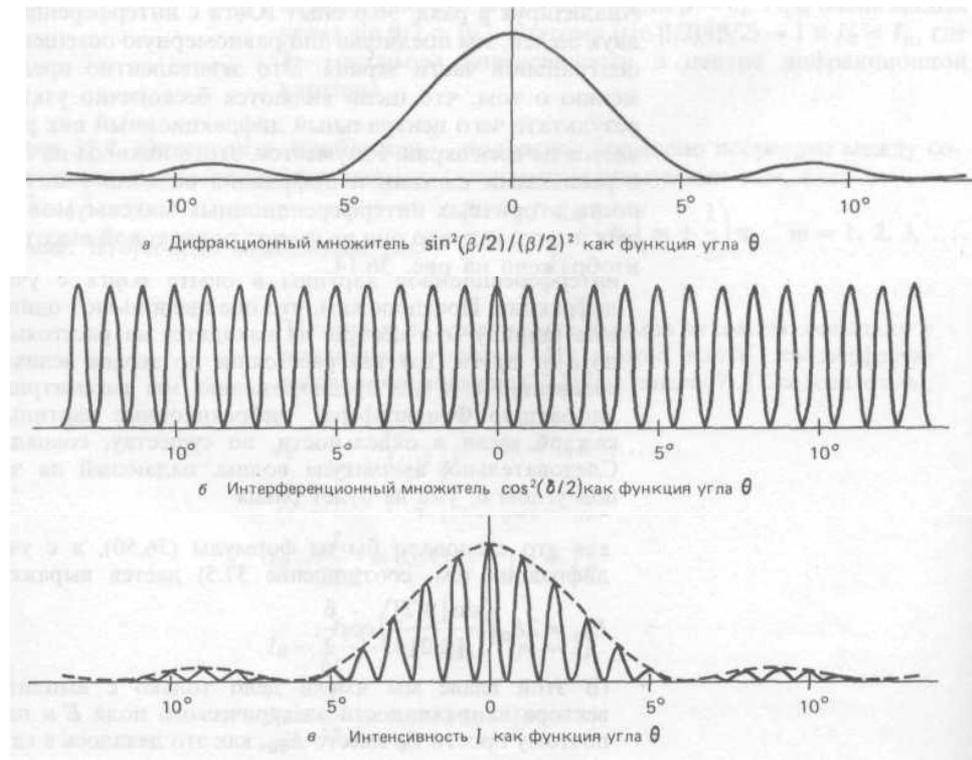


Рис. 8.8. Дифракционный множитель (а); интерференционный множитель (б) и результирующая интенсивность I (в) как функции угла θ при $d=6D = 60\lambda$.

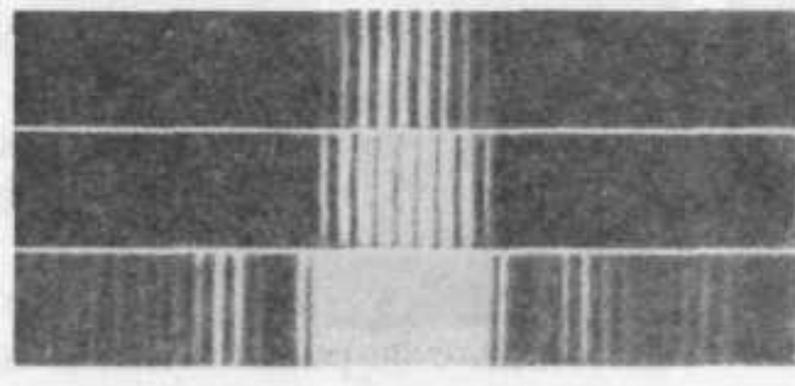


Рис. 8.8. Фотографии интерференционной картины при интерференции от двух щелей, обнаруживающие дифракционные эффекты; $d = 6D$

Из последнего примера видно, что число интерференционных полос, уместяющихся в центральном

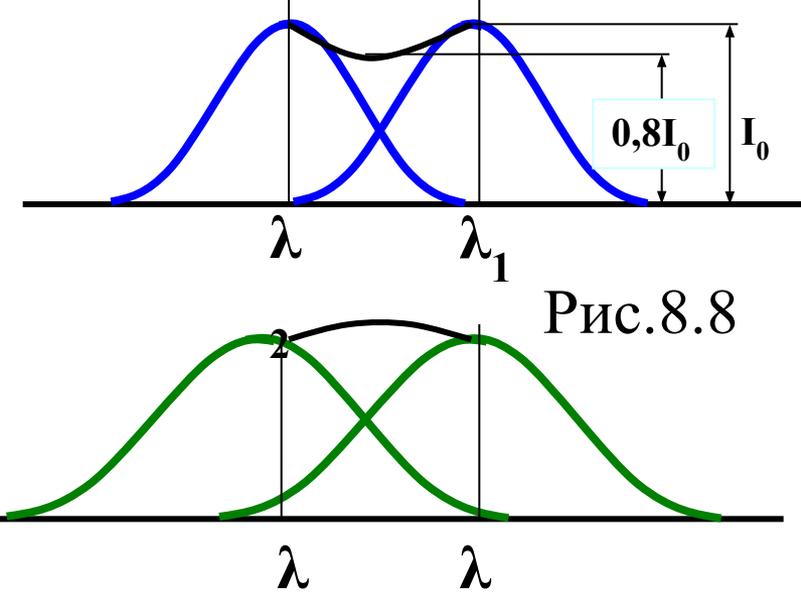
дифракционном пике, зависит только от отношения d/D и не зависит от длины волны λ . Расстояние между дифракционными максимумами (угловое или линейное на экране) зависит от λ . В рассмотренном случае $D = 10 \lambda$ и первый дифракционный минимум соответствует $\sin \theta = \lambda / D = 0,10$, т.е. расположен под углом θ около 6° . Интерференция и дифракция обусловлены одним и тем же явлением - суперпозицией когерентных волн с различными фазами. Таким образом, различие между интерференционной и дифракционной картинами обусловлено не столько различием их физической природы, сколько традициями и удобством описания (так, в этом разделе мы анализировали по отдельности картины, возникающие на экране в опыте Юнга: сначала как интерференционную, а затем как дифракционную). Обычно мы

говорим о дифракции, когда речь заходит об анализе суперпозиции множества бесконечно малых и обычно смежных источников (как, например, при разбиении источника на бесконечно малые части). Под интерференцией принято понимать суперпозицию волн от конечного (и обычно небольшого) числа когерентных источников.

8.4 Разрешающая способность решетки.

Используя даже идеальную оптическую систему (такую, для которой отсутствуют дефекты и аберрации), невозможно получить стигматическое изображение точечного источника, что объясняется волновой природой света. Изображение любой светящейся точки в монохроматическом свете представляет собой дифракционную картину, т. е. точечный источник отображается в виде центрального светлого пятна, окруженного чередующимися темными и светлыми кольцами.

Согласно критерию Рэлея: изображения двух близлежащих одинаковых точечных источников или двух близлежащих спектральных линий с равными интенсивностями и одинаковыми симметричными контурами разрешимы (разделены для восприятия), если центральный максимум дифракционной картины от одного источника (линии) совпадает с первым минимумом дифракционной картины от другого (рис. 8.8, а). При выполнении



критерия Рэлея интенсивность «провала» между максимумами составляет 80 % интенсивности в максимуме, что является достаточным для разрешения линий λ_1 и λ_2 . Если критерий Рэлея нарушен, то наблюдается одна линия (рис. 8.8, б).

Разрешающей способностью спектрального прибора называют безразмерную величину (8.4.1) $R = \lambda/\delta\lambda$, где $\delta\lambda$ — абсолютное значение минимальной разности длин волн двух соседних спектральных линий, при которой эти линии регистрируются отдельно.

Пусть максимум m -го порядка для длины волны λ_2 наблюдается под углом φ , т. е., согласно (8.4.1), $d \sin\varphi = m \lambda_2$. При переходе от максимума к соседнему минимуму разность хода меняется на λ/N , где N - число щелей решетки. Следовательно, минимум λ_1 ,

наблюдаемый под углом φ_{\min} , удовлетворяет условию $d \sin \varphi_{\min} = m \lambda_1 + \lambda_1 / N$. По критерию Рэлея, $\varphi = \varphi_{\min}$, т. е.

$m \lambda_2 = m \lambda_1 + \lambda_1 / N$, или $\lambda_1 / (\lambda_2 - \lambda_1) = m N$. Так как λ_1 и λ_2 близки между собой, т. е. $\lambda_2 - \lambda_1 = \delta \lambda$, то, согласно

$$R_{\text{диф.реш.}} = m N \quad (8.4.1),$$

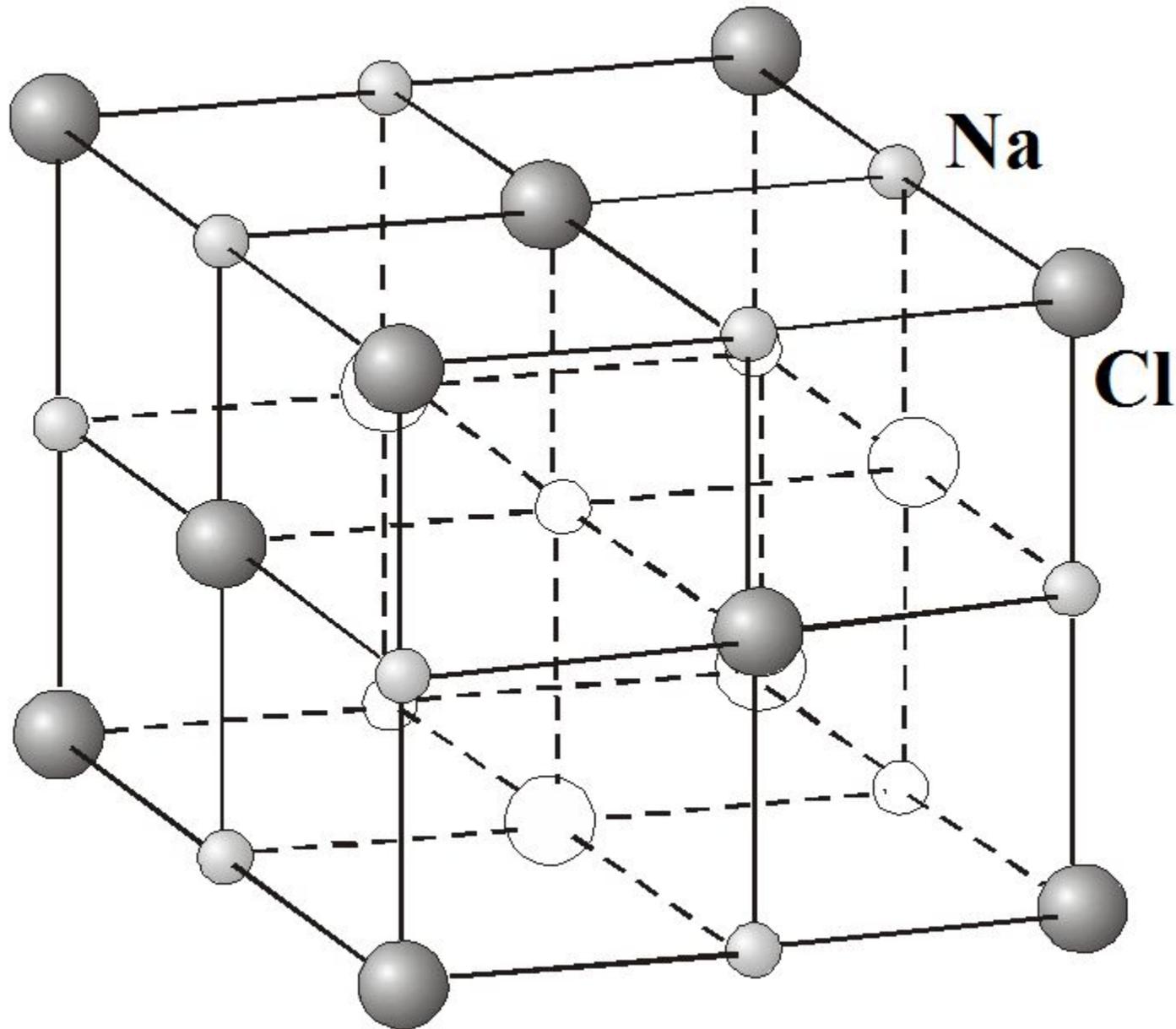
Таким образом, разрешающая способность дифракционной решетки пропорциональна порядку m спектров и числу N щелей, т. е. при заданном числе щелей увеличивается при переходе к спектрам высших порядков. Современные дифракционные решетки обладают довольно высокой разрешающей способностью (до $2 \cdot 10^5$).

Дифракция на пространственных решетках.

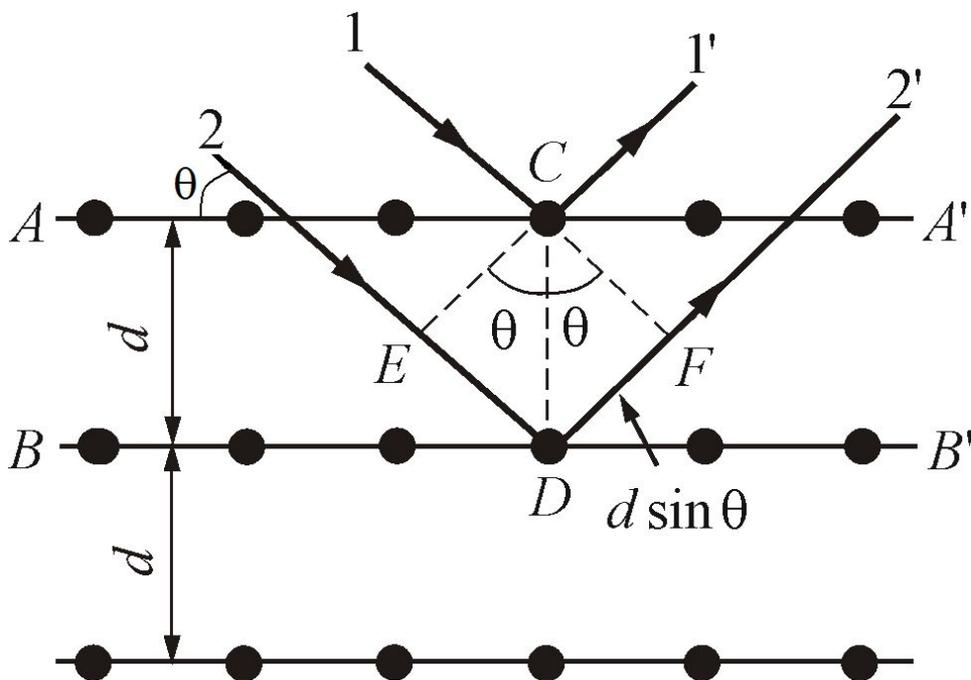
Дифракция рентгеновских лучей

Пространственной или *трехмерной* *дифракционной решеткой* называется такая *оптически неоднородная среда*, в которой *неоднородности периодически повторяются при изменении всех трех пространственных координат.*

Кристаллическая структура NaCl.



В 1918 г. русский физик Г.В. Вульф и английские ученые отец и сын Генри и Лоуренс Брэгги, независимо друг от друга, предложили простой метод расчета дифракции рентгеновских лучей в кристаллах, как **результат отражения рентгеновских лучей от плоскостей кристалла.**



Интерференционные максимумы должны удовлетворять **условию Вульфа-Брэггов :**

$$2d \sin \theta = m\lambda$$

