

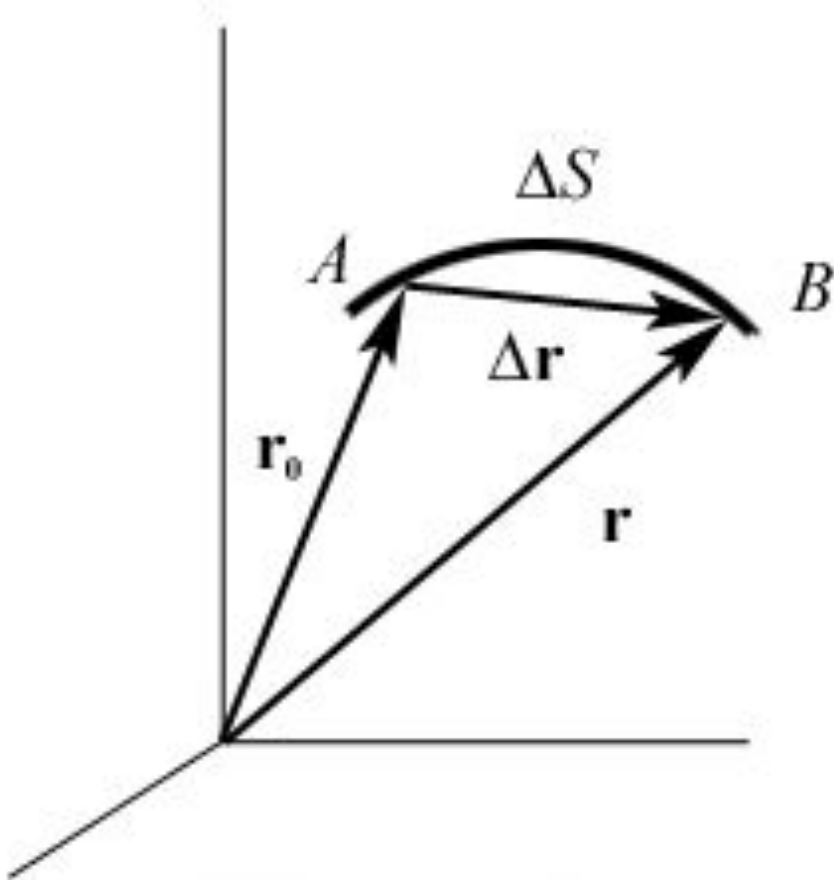
2.3. Кинематика поступательного движения

Исключая время t в уравнениях (2.1) и (2.2) получим уравнение траектории движения материальной точки.

Траектория движения материальной точки – линия, описываемая этой точкой в пространстве.

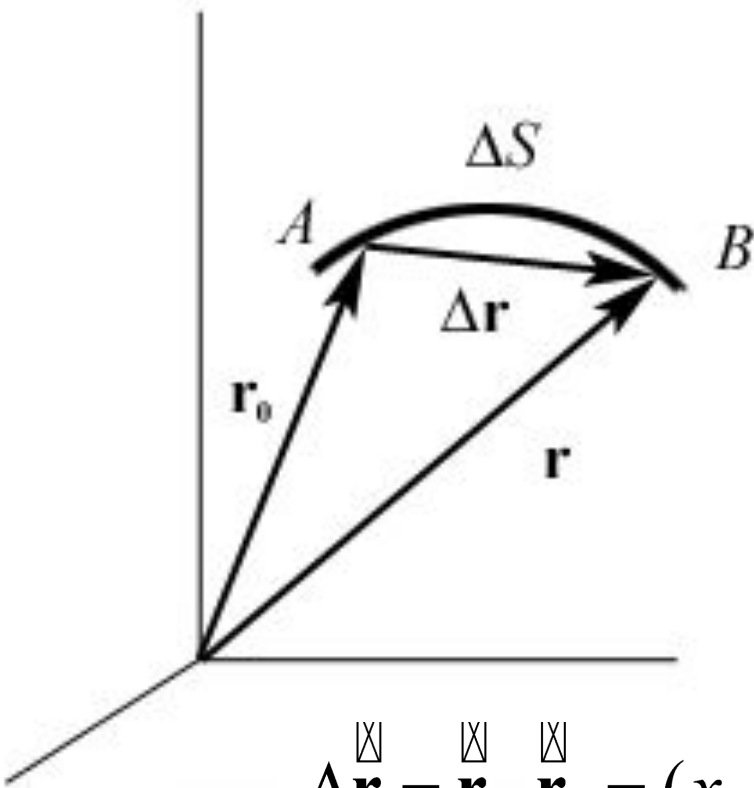
В зависимости от формы траектории движение может быть *прямолинейным (поступательным), криволинейным и вращательным.*

2.3. Кинематика поступательного движения



Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольной траектории. Отсчет времени начнем с момента, когда точка находилась в положении A . Длина участка траектории AB , пройденного материальной точкой с момента начала отсчета времени, называется **длиной пути ΔS** и является скалярной функцией времени: **$\Delta S = \Delta S(t)$**

2.3. Кинематика поступательного движения



Вектор $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, проведенный из начального положения движущейся точки в положение точки в данный момент времени (приращение радиуса – вектора $\Delta \mathbf{r}$ за рассматриваемый промежуток времени)

называется

перемещением

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$$

и в прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения $|\Delta \mathbf{r}|$ равен пройденному пути ΔS .

2.4. Скорость

Для характеристики движения материальной точки вводится векторная величина - **скорость**, которой определяют как **быстроту движения**, так и **изменение** его **направления** в данный момент времени.

Пусть материальная точка движется по какой-либо криволинейной траектории так, что в момент времени t ей соответствует радиус-вектор $\vec{r}$. В течение малого промежутка времени точка пройдет путь ΔS и получит элементарное (бесконечно малое) перемещение $\Delta \vec{r}$.

Вектором средней скорости $\vec{v}$ называется приращение $\Delta \vec{r}$ радиус-вектора точки к промежутку времени Δt :

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2.3)$$

2.4. Скорость

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением $\Delta \vec{r}$. При неограниченном уменьшении средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется **мгновенной скоростью** $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Мгновенная скорость – векторная величина, равная скорости материальной точки в фиксированный момент времени.

Мгновенная скорость – векторная величина, равная первой производной радиус–вектора движущейся точки по времени.

2.4. Скорость

Так как секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения, поэтому модуль мгновенной скорости

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

Таким образом, *модуль мгновенной скорости равен первой производной пути по времени*

(2.4)

$$v = \frac{ds}{dt}$$

2.4. Скорость

При неравномерном движении модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. В данном случае пользуются скалярной величиной $\langle v \rangle$ – средней скоростью неравномерного движения $\langle v \rangle = \Delta s / \Delta t$. Из рис. 3 вытекает, что $\langle v \rangle > \langle |\vec{v}| \rangle$, так как $\Delta s > \Delta r$, и только в случае прямолинейного движения $\Delta s = |\Delta \vec{r}|$.

Если выражение $ds = v dt$ (см. формулу 2.4) проинтегрировать по времени в пределах от t до $t + \Delta t$, то найдем длину пути, пройденного точкой за время Δt :

$$s = \int_t^{t+\Delta t} v dt \quad (2.5)$$

2.4. Скорость

В случае *равномерного* движения **числовое значение мгновенной скорости постоянно**; тогда выражение (2.5) примет вид:

$$s = v \int_t^{t+\Delta t} dt = v\Delta t$$

Длина пути, пройденного точкой за промежуток времени от t_1 до t_2 дается интегралом:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

2.5. Ускорение и его составляющие.

В случае неравномерного движения важно знать, как быстро изменяется скорость с течением времени.

Физической величиной характеризующей быстроту изменения скорости по модулю и направлению является *ускорение*.

Рассмотрим *плоское движение*, то есть движение, при котором все участки траектории точки лежат в одной плоскости.

Пусть вектор $\vec{v}$ задает скорость точки A в момент времени t . За время Δt движущаяся точка перешла в положение B и приобрела скорость, отличную от $\vec{v}$ как по модулю, так и по направлению и равную

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + d\vec{v}$$

Перенесем вектор $\vec{U}_1$ в точку A и найдем $\Delta \vec{U}$ (рис.4).

Разложим вектор $\Delta \vec{U}$ на две составляющие. Для этого из точки A (рис.4) по направлению скорости $\vec{U}$ отложим вектор $\vec{AD}$, по модулю равный U_1 . Очевидно, что вектор $\vec{CD}$, равный Δv_τ , определяет изменение скорости за время Δt по модулю:

$$\Delta v_\tau = v_1 - v$$

Вторая же составляющая $\Delta \vec{U}_n$ характеризует изменение скорости за время Δt по направлению.

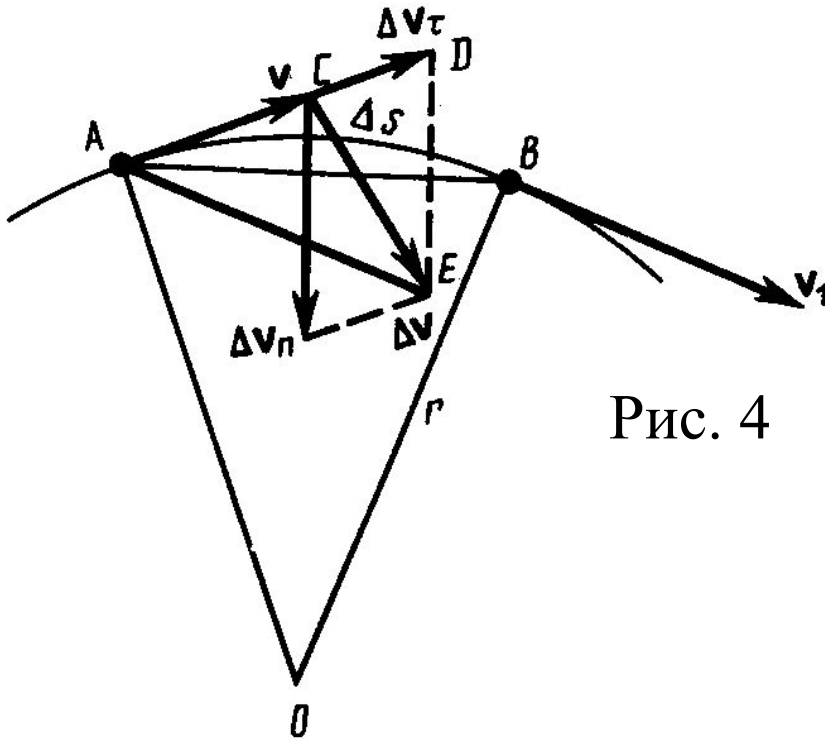


Рис. 4

Тангенциальная составляющая ускорения

$$a_{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

т.е. равна первой производной по времени от модуля скорости, определяя тем самым быстроту изменения скорости по модулю.

Найдем вторую составляющую ускорения. Допустим, что точка B достаточно близка к точке A , поэтому можно считать дугу окружности радиуса r , мало отличающейся от хорды AB . Тогда из подобия треугольников AOB и EAD следует $\Delta v_n / AB = \Delta v_1 / r$, но т.к. $AB = v \cdot \Delta t$, то

$$\frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v v_1}{r}$$

В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ получим $\vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}$.

Поскольку $\vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}$, угол EAD стремится к нулю, и т.к. треугольник EAD равнобедренный, то угол ADE между $\vec{v}$ и $\Delta \vec{v}_n$ стремится к прямому. Следовательно, при $\Delta t \rightarrow 0$ векторы $\vec{v}$ и $\Delta \vec{v}_n$ оказываются взаимно перпендикулярными. Так как вектор скорости направлен по касательной к траектории, то вектор $\Delta \vec{v}_n$, перпендикулярный вектору скорости, направлен к центру ее кривизны. Вторая составляющая ускорения равная

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{r},$$

называется **нормальной составляющей ускорения** и направлена по нормали к траектории к центру ее кривизны (поэтому ее называют также центростремительным ускорением).

Полное ускорение тела есть геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Итак, тангенциальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения скорости по модулю (направлена по касательной к траектории), а нормальная составляющая ускорения – быстроту изменения скорости по направлению (направлена к центру кривизны траектории).

В зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения движение можно классифицировать следующим образом:

- 1. $a_\tau = 0, a_n = 0$ – прямолинейное равномерное движение;**
- 2. $a_\tau = a = const, a_n = 0$ – прямолинейное равнопеременное движение.**

При таком виде движения $a_\tau = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$.

Если начальный момент времени $t_1=0$, а начальная скорость $v_1=v_0$, то, обозначив $t_2=t$ и $v_2=v$, получим $a = (v - v_0)/t$, откуда

$$v = v_0 + at$$

Проинтегрировав эту формулу в пределах от нуля до произвольного момента t , найдем, что длина пути пройденного точкой, в случае равнопеременного движения

$$S = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = v_0 t + at^2 / 2$$

3. $a_\tau = f(t)$, $a_n = 0$ – прямолинейное движение с переменным ускорением.

4. $a_\tau = 0$, $a_n = \text{const}$.

При $a_\tau = 0$ скорость по модулю не меняется, а изменяется по направлению. Из формулы $a_n = v^2/r$ следует, что радиус кривизны должен быть постоянным. Следовательно, движение по окружности является равномерным.

5. $a_\tau = 0, a_n \neq 0$ – равномерное криволинейное движение.

6. $a_\tau = \text{const}, a_n \neq 0$ – криволинейное равнопеременное движение.

7. $a_\tau = f(t), a_n \neq 0$ - криволинейное движение с переменным ускорением.

Задачи



1. Маленький шарик начинает скатываться без начальной скорости с вершины абсолютно гладкой полусферы радиуса R . На какой высоте он оторвётся от поверхности.

Ответ: $2R/3$



2. Цилиндр радиуса R лежит на двух тонких стержнях. С какой относительной скоростью V должны раздвигаться стержни, чтобы падения цилиндра происходило без контакта с ними.

Ответ: $V = 2\sqrt{gR}$



3. С какой скоростью шарик должен двигаться по верхней ступени лестницы, чтобы удариться о среднюю и нижнюю ступень только по одному разу. Ширина и высота ступеней - b .

Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{gb}$ $(\sqrt{2} - 1)\sqrt{gb}$

Лекция окончена!

Движение в поле тяжести Земли

Рассмотрим движение свободного тела в присутствии гравитационного поля Земли на примере выстрела из пушки. Если пушка расположена в точке с координатами $(0, 0, 0)$, то снаряд будет двигаться по траектории, которая описывается следующими уравнениями:

$$X = (v \cos \phi) t$$

$$Y = (v \sin \phi) t - g t^2 / 2,$$

где v - скорость снаряда вдоль ствола пушки, ϕ - угол между стволом пушки и горизонтом (ось X), t - время, g - ускорение свободного падения в поле тяжести Земли. Подставляя t из первого уравнения во второе, находим уравнение траектории движения снаряда:

$$Y = X \operatorname{tg} \phi - (g / 2 v^2)(1 + \operatorname{tg}^2 \phi) X^2$$

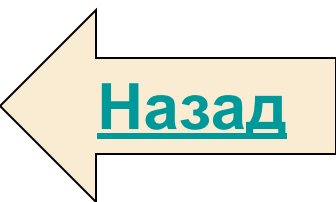


Дальше

Из приведённого выше уравнения видно, что траектория полёта снаряда имеет параболическую форму. Из этого уравнения находим максимальную дальность стрельбы $X_{\max}$ (при этом $Y=0$) и максимальную высоту полёта $Y_{\max}$ (первая производная Y по координате X равна нулю):

$$\begin{aligned} X_{\max} &= v^2 \sin(2\phi)/g \\ Y_{\max} &= v^2 \sin^2 \phi / 2g \end{aligned}$$

Из первого уравнения видно, что максимальная дальность полёта снаряда достигается при стрельбе под углом ϕ , равном 45° .



[Назад](#)