6.2. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Энергия представляет собой одно из наиболее важных понятий в науке. Однако мы не можем дать простого и в тоже время строгого и полного определения энергии всего лишь в нескольких словах. Любой из различных ее видов можно определить весьма просто, и здесь мы определим кинетическую энергию (поступательного) движения, а в следующей лекции и потенциальную (механическую) энергию. В дальнейшем мы рассмотрим другие виды энергии, например, связанные с тепловым движением (во второй части курса данного семестра).

Все виды энергии объединяет то, что их можно определить согласованно друг с другом, т.е. их единицы измерения должны совпадать с единицами измерения работы (сила · расстояние), и таким образом, что сумма всех видов энергии, а именно полная энергия, должна оставаться неизменной, какой бы процесс мы ни рассматривали. Иными словами, энергию можно определить как величину, которая сохраняется.

Если понимать под движением не только простое перемещение, но и любые превращения происходящие в системе, то определение энергии можно сформулировать следующим образом.

Энергия – скалярная величина, являющаяся общей мерой различных форм движения материи.

Для анализа качественно различных форм движения материи и соответствующих взаимодействий, рассматривают различные виды энергии: *механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную, энергию слабых взаимодействий.*

При взаимодействии одно из тел выступает в качестве источника работы, а другое – как объект, над которым совершается работа (молоток – гвоздь, электровоз – вагон, ядро – стена и т.д.). С этих позиций можно дать еще одно определение энергии: *энергия есть мера работоспособности системы в данных условиях.*

Это простое определение не совсем точно и в действительности не применимо ко всем видам энергии, но его вполне достаточно для механической энергии, которая рассматривается в первой части нашего семестрового курса.
Различают ***кинетическую и потенциальную энергию***. Займемся первой.

Движущееся тело может совершить работу над другим телом, с которым оно соударяется: летящее ядро пушки совершает работу над кирпичной стеной, которую оно проламывает, движущийся молоток производит работу по забиванию гвоздя. В любом из этих случаев движущееся тело действует с определенной силой на второе тело и перемещает его на некоторое расстояние. Движущееся тело обладает способностью совершать работу, и потому можно говорить, что оно обладает энергией.

Энергию механического движения называют кинетической энергией.

Для того, чтобы получить количественное определение кинетической энергии, вычислим работу, которую действительно может совершить движущееся тело. Будем считать, что рассматриваемое тело является материальной частицей или в любом случае может двигаться лишь поступательно. Пусть тело массой *m*, движущееся со скоростью $\vec{V}$, соударяется со вторым телом (над которым оно производит работу) и затем останавливается. Напишем уравнение движения частицы:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}, \tag{6.8}$$

Здесь $\vec{F}$ - результирующая сила, действующая на частицу.

Умножив уравнение (6.8) на перемещение частицы $d\vec{L} = \vec{V} \cdot dt$, получим:

$$m \cdot \vec{a} \cdot \vec{V} \cdot dt = \vec{F} \cdot d\vec{L} \qquad \textbf{(6.9)}$$

Произведение $\vec{V}dt$ представляет собой приращение скорости $d\vec{V}$ за время dt. Соответственно

$$m \cdot \vec{a} \cdot \vec{V}dt = m \cdot \vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot dt = m \cdot \vec{V} \cdot d\vec{V} = m \cdot d\left(\frac{V^2}{2}\right) = d\left(\frac{m \cdot V^2}{2}\right) \qquad \textbf{(6.10)}$$

Произведя теперь замену в (6.9), придем к соотношению:

$$d\left(\frac{m \cdot V^2}{2}\right) = \vec{F} \cdot d\vec{L} \qquad \textbf{(6.11)}$$

Если система замкнута, т.е. $\vec{F} = 0$, то $d(m \cdot V^2/2)=0$, а сама величина:

$$T = \frac{m \cdot V^2}{2} = const \qquad \textbf{(6.12)}$$

остается постоянной.

Эта величина называется *кинетической энергией* (можно обозначить: E_K, W_K) *поступательного (трансляционного) движения тела.*

Умножив на m числитель и знаменатель выражения (6.12) и приняв во внимание, что произведение $m \cdot V$ равно импульсу частицы P, выражению для кинетической энергии можно придать вид:

$$T = \frac{P^2}{2 \cdot m} \qquad (6.13)$$

Определение кинетической энергии (6.12) дает количественный смысл представлению о энергии как способности совершать работу. Очень важно и то, что определение кинетической энергии позволяет сравнивать с еще более общим понятием энергии, которая сохраняется в любом процессе.

Мы убедились в том, что движущееся тело может совершать работу. Верно и обратное: чтобы тело приобрело кинетическую энергию, над ним надо совершить работу. Для того, чтобы найти точную взаимосвязь, обратим ход рассуждений. Предположим, что тело массой m движется прямолинейно с начальной скоростью V_1, при чем для равномерного ускорения его скорости V_2 прикладывают силу в направлении, параллельном движению тела, при чем сила действует на расстоянии L. Тогда работа, совершаемая над телом, равна $A=F \cdot L$. ($cos\alpha=1$, т.к. $\vec{F} \parallel \vec{V}$). Используя второй закон Ньютона $F=m \cdot a$ и формулу $V_2^2 = V_1^2 + 2 \cdot a \cdot L$, где V_1 и V_2- начальная и конечная скорости соответственно, находим

$$A = F \cdot L = m \cdot a \cdot L = m \cdot \left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2 \cdot L}\right) \cdot L, \text{или} \qquad \textbf{(6.14)}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_1^2 = T_2 - T_1 = \Delta T$$

Таким образом: полная работа, произведенная над телом, равна изменению его кинетической энергии.

Это утверждение иногда называют теоремой о связи работы и энергии. Заметим, что, поскольку мы использовали второй закон Ньютона, сила F должна быть результирующей (суммой всех сил, действующих на тело). Поэтому сформулированное выше утверждение справедливо лишь в том случае, когда А - это полная работа, произведенная над телом.

Соотношение между работой и кинетической энергией можно рассматривать с двух точек зрения. С одной стороны, если над телом совершается работа, его кинетическая энергия возрастает. С другой стороны, если у тела имеется кинетическая энергия, оно может совершить работу над каким-то другим телом, и если это происходит, то его собственная кинетическая энергия уменьшается. Это можно выразить иначе: если полная работа А, совершаемая над телом, положительна, то его кинетическая энергия возрастает; если же А отрицательна, то кинетическая энергия убывает. В случае, когда полная работа равна нулю, кинетическая энергия остается постоянной.

Из (6.14) следует, что энергия имеет ту же размерность, что и работа, следовательно, должна иметь те же единицы измерения. Кинетическая энергия, как и работа, является скалярной величиной, кинетическая энергия системы частиц равна скалярной сумме кинетических энергий отдельных частиц, входящих в систему.

Из формулы (6.12) видно, что кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела, т.е. !!! кинетическая энергия есть функция состояния ее движения !!!

При выводе формулы (6.14) предполагалось, что движение рассматривается в инерциальной системе отсчета, т.к. иначе нельзя было бы использовать законы Ньютона. В разных инерциальных системах отсчета, движущихся относительно друг друга, скорость тела, а, следовательно, и его кинетическая энергия будут неодинаковы. Таким образом, !!! кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета!!!

Задача 6.2 Горизонтально расположенная пружина имеет коэффициент упругости (жесткость) k=180 Н/м (рис 6.2.1).

а). Какая работа требуется, чтобы сжать ее из свободного состояния (x=0) до значения x=15,5 см (x-величина деформации пружины)?

б). Если прикрепить теперь к концу пружины груз массой m=1,85 кг, то какова будет его скорость, когда он отделиться от пружины в точке x=0? Трением пренебречь

в). Рассмотрите случай б), считая теперь груз скользящим по полу и принимая коэффициент трения скольжения, равным μ=0,27.

Лекция 7. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

7.1. Потенциальная энергия.

7.2. Закон сохраненияЗакон сохранения механической энергии.

7.3. Потенциальные кривые и условия равновесия механических систем.

7.1. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Потенциальная энергия – механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Если частица в каждой точке пространства подвержена воздействию других тел, то говорят, что эта частица находится в поле сил. Так, например, частица у поверхности Земли находится в поле сил тяжести – в каждой точке пространства на нее действует сила $\vec{P} = m\vec{g}$.

В качестве второго примера, рассмотрим заряженную частицу e, находящуюся в электрическом поле, возбуждаемом неподвижным точечным зарядом q. Это поле характерно тем, что направление силы, действующей на частицу в любой точке пространства, проходит через неподвижный центр (заряд q), а величина силы зависит только от расстояния до этого центра: $F=F(r)$. ***Поле сил, обладающее такими свойствами, называется центральным.***

Если во всех точках поля силы, действующие на частицу, одинаковы по величине и направлению $(\vec{F} = const)$, поле называется однородным.

Поле, изменяющееся со временем, называется нестационарным. Поле, остающееся постоянным во времени, называется стационарным.

Для стационарного поля может оказаться, что работа, совершаемая над частицей силами поля, зависит лишь от начального и конечного положения частицы и не зависит от пути, по которому двигалась частица. Силы, обладающие такими свойствами, называются консервативными.

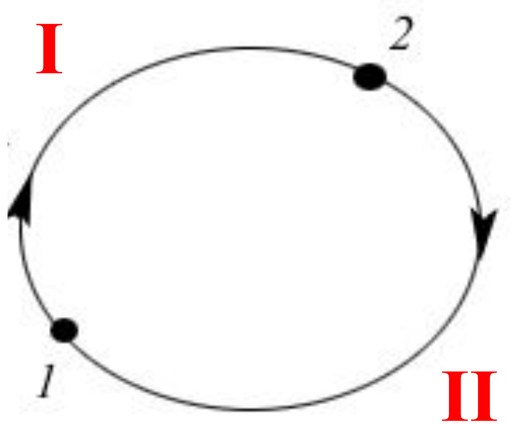


Рис. 7.1

Из независимости работы консервативных сил от пути вытекает, что работа таких сил на замкнутом пути, равна нулю. Чтобы доказать это, разобьем произвольный замкнутый путь на две части: путь **I**, по которому частица переходит из точки 1 в точку 2, и путь **II**, по которому тело переходит из точки 2 в точку 1, причем точки 1 и 2 выберем произвольно. Работа на всем замкнутом пути равна сумме работ, совершаемых на каждом из участков:

$$A = \left(A_{12}\right)_{\mathrm{I}} + \left(A_{21}\right)_{\mathrm{II}} \tag{7.1}$$

Легко сообразить, что работы $(A_{21})_{\mathrm{I}}$ и $(A_{12})_{\mathrm{II}}$ отличаются только знаком. Действительно, если направление силы не меняется, а направление перемещения изменить на противоположное, то работа, согласно определению, изменит знак. Таким образом, равенство (7.1) можно записать в виде $A = \left(A_{12}\right)_{\mathrm{I}} - \left(A_{21}\right)_{\mathrm{II}}$, и

поскольку работа не зависит от пути, т.е., $\left(A_{12}\right)_{\mathrm{I}} = \left(A_{21}\right)_{\mathrm{II}}$, мы приходим к выводу, что $A=0$.

Из равенства нулю работы на замкнутом пути легко получить, что работа A_{12} не зависит от пути. Это можно сделать, обратив ход проведенных выше рассуждений.

Сделайте это самостоятельно.

Таким образом, консервативные силы можно определить двумя способами:

1) **Как силы, работа которых не зависит от пути, по которому частица переходит из одного положения в другое.**

2) **Как силы, работа которых на любом замкнутом пути равна нулю.**

7.1.1. РАБОТА УПРУГОЙ СИЛЫ

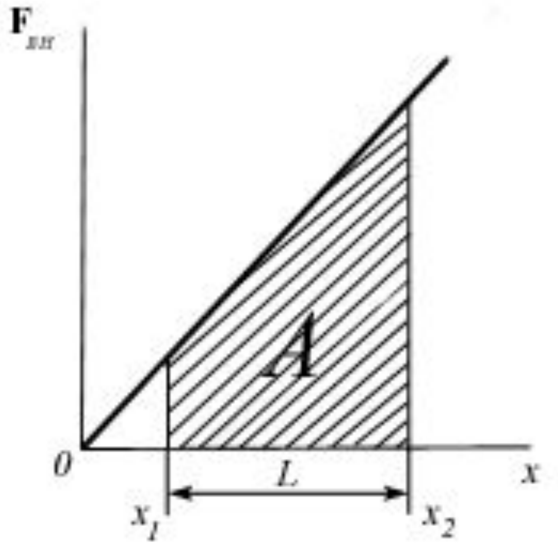


Рис. 7.2

Вначале вычислим работу внешней силы, растягивающей пружину. По III закону Ньютона внешняя сила равна по модулю силе упругости, но имеет противоположное направление

$$\left(\vec{\mathbf{F}}_{внешн.} = -\vec{\mathbf{F}}_{упр.}\right)$$

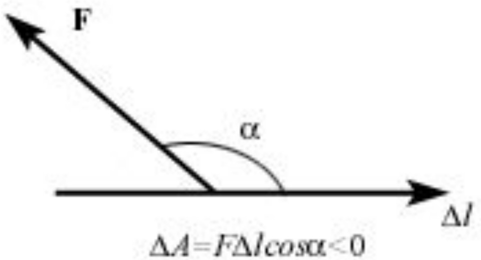
Учитывая выражение для упругой силы $\vec{F}_{упр.} = -kx$ (k - жесткость), получим:

$$F_{внешн} = kx \qquad (7.2)$$

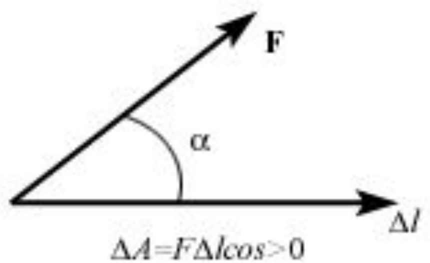
График этой силы изображен на рис.7.2.

Работа внешней силы на участке пути численно равна площади заштрихованной трапеции:

$$A_{внешн} = \frac{F_1 + F_2}{2} l = \frac{kx_1 + kx_2}{2}(x_2 - x_1) = \frac{kx_2{}^2}{2} - \frac{kx_1{}^2}{2} \quad (7.3)$$



a)



b)

Работа упругой силы на том же участке отличается только знаком, следовательно,

$$A_{упр.} = \frac{kx_1{}^2}{2} - \frac{kx_2{}^2}{2} \quad (7.4)$$

Естественно, что этот же результат можно получить интегрированием:

$$A_{упр.} = \int_{x_1}^{x_2} F_{упр.} dx = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx_1{}^2}{2} - \frac{kx_2{}^2}{2}$$

При $x_1 < x_2$, т.е. при растяжении пружины, упругая сила совершает отрицательную работу, что соответствует правилу о знаке силы: **силы притяжения считаются - отрицательными, силы отталкивания – положительными.**

Действительно, при увеличении расстояния между притягивающимися телами сила притяжения составляет тупой угол с направлением перемещения $(\pi/2 < \alpha \le \pi)$, а косинус такого тупого угла является отрицательным числом. Здесь сила притяжения совершает отрицательную работу (рис.7.2,*a*). Сила же отталкивания составляет острый угол с направлением перемещения $(0 < \alpha \le \pi/2)$; она совершает положительную работу (рис.7.2,*b*). Итак, силы упругости являются консервативными силами.

7.1.2. РАБОТА ГРАВИТАЦИОННОЙ СИЛЫ

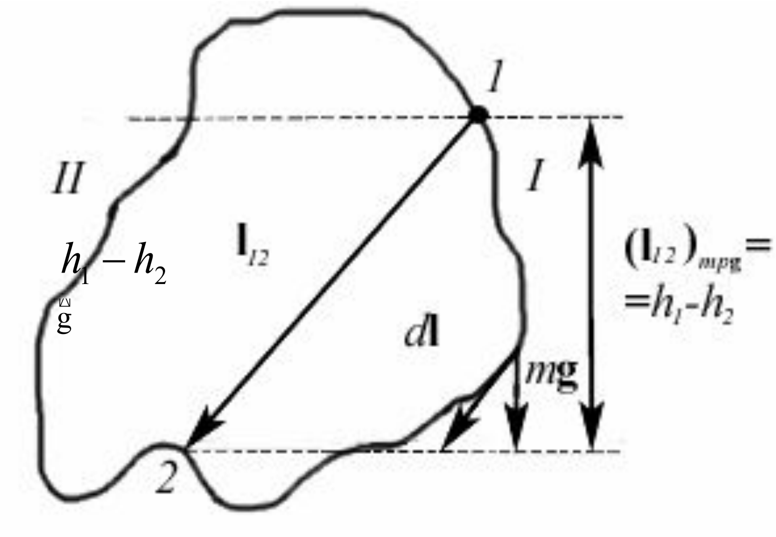


Рис. 7.3

Докажем, что сила тяжести является консервативной. Эта сила в любой точке имеет одинаковую величину и одинаковое направление – вниз по вертикали (рис.7.3). Поэтому, независимо от того, по какому из путей (I или II) движется частица, работа A_{12}, согласно (6.4) определяется выражением:

$$A_{12} = m\vec{\mathbf{g}}\vec{\mathbf{l}}_{12} = mg(\mathbf{l}_{12})_{пр.\vec{\mathbf{g}}}$$

Из рисунка 7.3 видно, что проекция вектора $\mathbf{l}_{12}$ на направление $\mathbf{g}$ равна разности высот, следовательно, выражение для работы можно записать в виде:

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2) \tag{7.5}$$

Последнее выражение очевидно не зависит от пути; отсюда следует, что сила тяжести консервативна.

Естественно, что этот же результат можно получить интегрированием:

$$A_{\text{гравит}} = \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{гравит}} dr = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\gamma m M}{r^2} dr = -\frac{\gamma m M}{r_1} + \frac{\gamma m M}{r_2} \tag{7.6}$$

Если $r_1 = R$ (радиус Земли), $r_2 = R + h$, m – масса тела, M – масса Земли, то

$$A = -\frac{\gamma mM}{R} + \frac{\gamma mM}{R+h} = -\frac{\gamma mMh}{R(R+h)}$$

Работа внешней силы имеет противоположный знак. Следовательно,

$$A = \frac{\gamma mMh}{R(R+h)}$$

Если высота $h<R$, то можно приближенно получить

$R + h \approx R$.

Т.к. $mg = \frac{\gamma mM}{R^2}$, то $g = \frac{\gamma M}{R}$ и тогда $A = mgh$, где $h=h_1-h_2$.

7.1.3. РАБОТА КУЛОНОВСКОЙ СИЛЫ (САМОСТОЯТЕЛЬНО!!!)

Отметим, что поле консервативных сил является частным случаем потенциального силового поля. Поле сил называется *потенциальным*, если его можно описать с помощью функции *U(x,y,z,t)*, градиент которой определяет силу в каждой точке поля: $\vec{F} = \nabla U$. Функция *U* называется *потенциальной функцией* или *потенциалом*. В случае, когда потенциал явно не зависит от времени, т. е. *U=U(x,y,z)*, потенциальное поле оказывается стационарным, а его силы консервативными. В этом случае $U(x, y, z) = -\Pi(x, y, z)$,

где Π(x,y,z,t) – потенциальная энергия частицы.

Для нестационарного силового поля, описываемого потенциалом *U(x,y,z,t)*, отождествлять потенциальные и консервативные силы нельзя.

Работа консервативных сил при элементарном (бесконечно малом) изменении конфигурации системы равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком минус, так как работа совершается за счет убыли потенциальной энергии:

$$dA = -d\Pi \qquad (7.8)$$

Работа dA выражается как скалярное произведение силы $\vec{\mathbf{F}}$ на перемещение $d\vec{\mathbf{r}}$ и выражение (7.8) можно записать в виде:

$$\vec{\mathbf{F}} d\vec{\mathbf{r}} = -d\Pi \qquad (7.9)$$

Потенциальная энергия может быть определена исходя из (7.9) как $\Pi = -\int \mathbf{F} d\mathbf{r} + C$, где C – постоянная интегрирования, т.е. потенциальная энергия определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной. Однако это обстоятельство не имеет никакого значения, так как во все физические соотношения входит либо разность значений *П* в двух положениях тела, либо производная функции *П* по координатам. Поэтому потенциальную энергию тела в каком-либо положении принимают равной нулю (выбирают нулевой уровень отсчета), а энергию в других положениях отсчитывают относительно этого уровня.

Следовательно, если известна функция *П(r),* то из формулы (7.9) можно найти силу по модулю и направлению.

Рассмотрим перемещение частицы параллельно оси x по dx. Такое перемещение сопровождается совершением над частицей работы, равной $dA = \mathbf{F} d\mathbf{s} = F_x dx$

(компоненты перемещения dy и dz равны нулю). Согласно (7.8) та же работа может быть представлена как убыль потенциальной энергии: $dA=-d\Pi$. Приравняв оба выражения для работы, получим, что $F_x dx = -d\Pi$

откуда $F_x = -d\Pi / dx$ $(y=const,\ z=const)$

Выражение, стоящее справа, представляет собой производную функции П(x,y,z), вычисленную в предположении, что переменные y и z остаются неизменными, а изменяется лишь переменная x. Подобные производные называются частными и обозначаются в отличии от производных функций одной переменной, символом .дП/дх

Следовательно, компонента силы по оси *x* равна взятой с обратным знаком частной производной потенциальной энергии по переменной *x*: $F_x = -\partial \Pi / \partial x$. Для компонент силы по осям y и z получаются аналогичные выражения, таким образом:

$$F_x = -\partial \Pi / \partial x; F_y = -\partial \Pi / \partial y; F_z = -\partial \Pi / \partial z \qquad (7.10)$$

Зная компоненты, можно найти вектор силы:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad \Pi} \qquad (7.11)$$

$$\mathrm{grad}\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\vec{\mathbf{k}} \qquad (7.12)$$

Где $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ - единичные векторы координатных осей.

Вектор, определяемый выражением (7.11) называется Градиентом Скаляра П.

Для него наряду с обозначением $\overrightarrow{grad\,\Pi}$ применяется также обозначение $\nabla \Pi$ («набла») обозначает символический вектор, называемый оператором Гамильтона или набла-оператором:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\mathbf{k}} \qquad (7.13)$$

Итак, консервативная сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому с обратным знаком (7.11). Из равенства (7.11) следует, что вектор градиента направлен против силы поля. А так как вектор силы указывает направление убывания потенциальной энергии (7.9), то градиент всегда направлен в сторону возрастания потенциальной энергии.

Очевидно, что при перемещении по замкнутому контуру (см. рис.7.4) начальное и конечное положение тела совпадают и работа при этом равна нулю:

$$\oint (\vec{F} d\vec{r}) = 0 \qquad (7.14)$$

Линейный интеграл по замкнутому контуру, приведенный в левой части уравнения (7.14), называют циркуляцией вектора $\vec{F}$.

Тогда циркуляция вектора потенциальной силы по замкнутому контуру равна нулю.

Для неконсервативных сил это условие не выполняется. Типичным представителем неконсервативных сил является сила трения. Работа этой силы по замкнутой траектории не равна нулю. Часть работы, совершаемой при трении, превращается в тепло и рассеивается. Такие силы называют диссипативными.

Полная механическая энергия системы – энергия механического движения и взаимодействия E=T+П.

Содержание