7.2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим систему материальных точек массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, движущихся со скоростями $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, \ldots, \vec{\upsilon}_n$.

Пусть $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ - равнодействующие консервативных внутренних сил, действующих на каждую из точек,

а $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ - равнодействующие внешних сил, которые также будем считать консервативными. Кроме того, будем считать, что на материальные точки действуют еще и внешние неконсервативные силы; равнодействующие этих сил, действующих на каждую материальную точку, обозначим $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$.

При $\upsilon \ll c$ массы материальных точек постоянные и уравнение второго закона Ньютона для этих точек следующие:

$$m_1 \frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{f}_1$$

$$m_2 \frac{d\vec{\upsilon}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{f}_2 \qquad \text{(I)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_n \frac{d\vec{\upsilon}_n}{dt} = \vec{F}_n + \vec{\mathbf{F}}_n + \vec{f}_n$$

Двигаясь под действием сил, точки системы за интервал времени dt совершают перемещения, соответственно равные, $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \ldots, d\vec{r}_n$. Умножим каждое из уравнений скалярно на соответствующее перемещение и, учитывая, что $d\vec{r}_i = \vec{\upsilon}_i dt$, получим (II).

$$m_1\vec{\upsilon}_1 d\vec{\upsilon}_1 - (\vec{F}_1 + \vec{\mathbf{F}}_1)d\vec{r}_1 = \vec{f}_1 d\vec{r}_1$$

$$m_2\vec{\upsilon}_2 d\vec{\upsilon}_2 - (\vec{F}_2 + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}})d\vec{r}_2 = \vec{f}_2 d\vec{r}_2 \qquad \text{(II)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_n\vec{\upsilon}_n d\vec{\upsilon}_n - (\vec{F}_n + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{n}})d\vec{r}_n = \vec{f}_n \vec{r}_n$$

Сложив эти уравнения, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{\upsilon}_i d\vec{\upsilon}_i) - \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}})d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{f}_i d\vec{r}_i \qquad (7.15)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{\upsilon}_i d\vec{\upsilon}_i) - \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i + \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{i})d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i d\vec{r}_i$$

Первый член равенства $\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{\upsilon}_i d\vec{\upsilon}_i) = \sum_{i=1}^{n} d(m_i(\vec{\upsilon}_i^{\,2}/2) =$ dT, (7.15)

где dT – приращение кинетической энергии. Второй член $\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i + \vec{\mathrm{F}}_\mathrm{i})d\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{i}$ равен элементарной работе внутренних и внешних консервативных сил, взятой со знаком минус, т.е. равен элементарному приращению потенциальной энергии $d\Pi$ системы (уравнение 7.8).

Правая часть равенства (7.15) задает работу внешних неконсервативных сил, действующих на систему, таким образом, имеем

$$d(T + \Pi) = dA \tag{7.16}$$

При переходе системы из состояния *1* в состояние *2* $\int_1^2 d(T+\Pi)=A_{12}$, т.е. изменение полной механической энергии системы при переходе из одного состояния в другое, равно работе, совершенной при этом внешними неконсервативными силами. Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, то из (7.16) следует, что $d(T+\Pi)=0$, откуда

$$E=T+\Pi=const, \qquad (7.17)$$

т.е. полная механическая энергия системы сохраняется. Выражение (7.17) представляет собой закон сохранения механической энергии: **в системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется, т.е. не изменяется со временем.**

В консервативных системах полная механическая энергия остается постоянной. Могут лишь происходить превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах так, что полная энергия остается неизменной. Этот закон не есть просто закон количественного сохранения энергии, а закон **сохранения** и **превращения** энергии, выражающий и качественную сторону взаимного превращения различных форм движения друг в друга. **Закон сохранения и превращения энергии – фундаментальный закон природы**, **он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микротел.**

В системе, в которой действуют также неконсервативные силы, например силы трения, полная механическая энергия не сохраняется. Следовательно, в этих случаях закон сохранения механической энергии несправедлив. Однако при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. Таким образом, **энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой.** В этом и заключается физическая сущность закона сохранения и превращения энергии – сущность неуничтожимости материи и ее движения.

Содержание

7.3. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ И УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

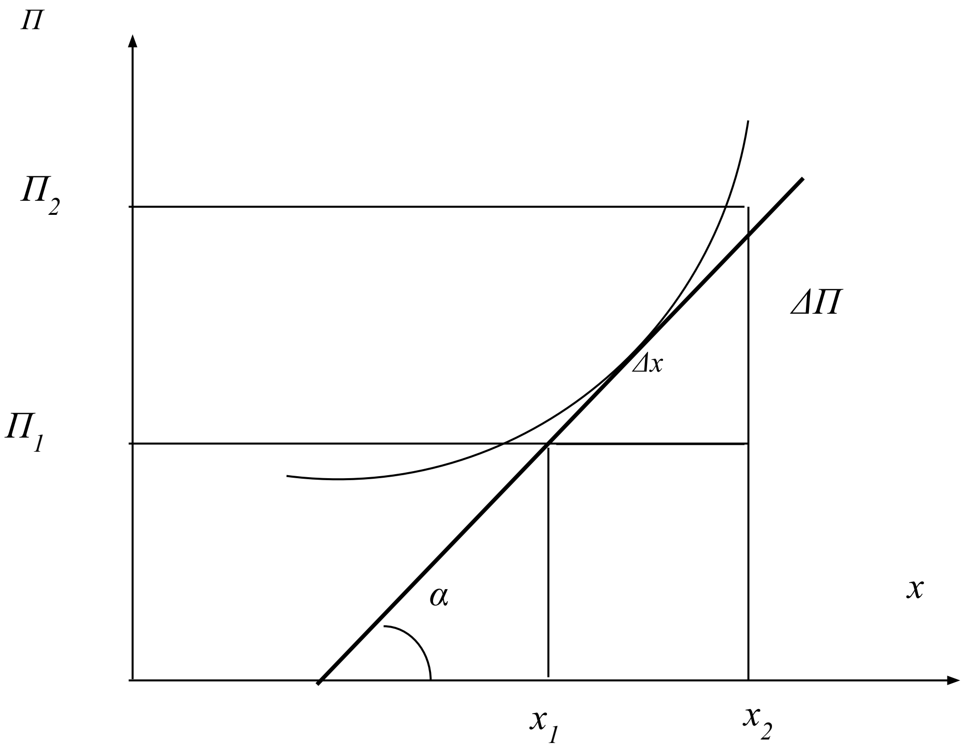


Рис.7.6

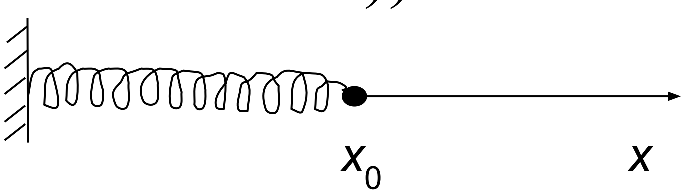
Часто материальная точка может двигаться только по некоторой заданной кривой, например вдоль оси абсцисс. В этом случае ее потенциальная энергия зависит только от одной переменной, т.е.

$$U = f(x).$$

График, изображающий зависимость потенциальной энергии от расстояния, называется потенциальной кривой. Оказывается, что анализ формы этого графика дает очень много сведений о характере движения точки.

В качестве примера рассмотрим движение частицы под действием упругой силы (рис. 7.5). При $x = x_0$ пружина не деформирована и силы, действующие на частицу, равны нулю. При отклонении частицы от положения равновесия на нее действует сила $F = -k(x - x_0)$.

(Заметим, что при $x > x_0$ сила отрицательна (притяжение), а при $x < x_0$ – положительна (отталкивание)).



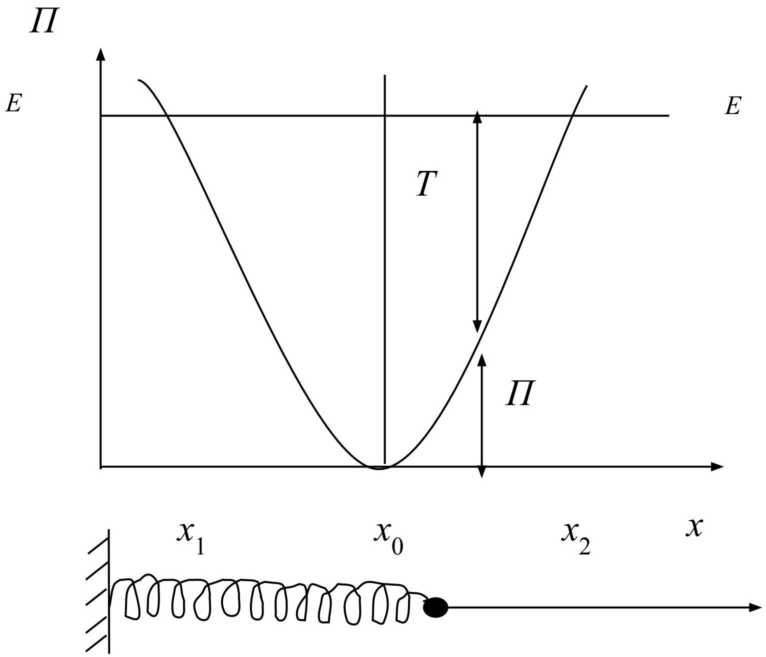


Рис.7.5

Она изображена на рис. 7.5 в виде параболы с вершиной в точке $x = x_0$. Механическая же энергия частицы $E = T + П$ является постоянной величиной и она изображается на графике прямой, параллельной оси абсцисс.

Из графика, прежде всего, видно, что кинетическую энергию в любой точке можно найти сразу как длину отрезка от прямой *EE* до параболы, ибо $T = E - П$. Максимальное значение кинетической энергии частица имеет при $x = x_0$; здесь $П = 0$, и $T_{макс} = E$. В точках же $x = x_1$ и $x = x_2$, кинетическая энергия частицы равна нулю, ибо здесь $П_{макс} = E$.

Далее из графика видно, что частица не может сместиться правее точки x_2 и левее точки x_1. Действительно, кинетическая энергия не может быть отрицательной величиной, следовательно, потенциальная энергия не может быть больше полной. В этом случае говорят, что частица находится в **потенциальной яме** с координатами x_1 и x_2.

Анализ наклона потенциальной кривой позволяет сразу же определить знак силы и тем самым – характер её действия (притяжения или отталкивания). В самом деле, элементарная работа $\Delta \grave{A} = F\Delta \tilde{o}$; с другой стороны,

$$F\Delta x = -\Delta \Pi$$

Следовательно, если сила – функция только одной координаты, например абсциссы x, то $F = -\Delta \ddot{I} \,/\, \Delta \tilde{o}$,
или $\Delta A = \ddot{I}_1 - \ddot{I}_2 = -\Delta \ddot{I}$.

Но на графике 7.6 $\Delta U / \Delta x = \mathbf{tg}\,\alpha$, где α - угол наклона потенциальной кривой к оси абсцисс. Соответственно, точное значение силы получается лишь в пределе, когда перемещение Δx стремится к нулю:

$$F_x = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \ddot{I}}{\Delta \tilde{o}} = -\frac{d\ddot{I}}{dx} = -\ddot{I}^{\,\prime}(x) \qquad (7.19)$$

Итак, в консервативных системах сила равна производной от потенциальной энергии по координате, взятой с противоположным знаком.

В случае, когда потенциальная энергия возрастает, потенциальная кривая образует с осью абсцисс острый угол. Тангенс острого угла – положительное число, а сила имеет противоположный знак, т.е. отрицательный; следовательно, она является силой притяжения.

Если же потенциальная энергия убывает, то потенциальная кривая образует с осью абсцисс тупой угол, тангенс которого является отрицательным числом. В этом случае сила положительна, т.е. является силой отталкивания.

Наконец, в точках минимума или максимума энергии, сила, очевидно, равна нулю, ибо в окрестностях этих точек она меняет знак. На границах касательная к потенциальной кривой в этих точках параллельна оси абсцисс. В соответствии с (7.19) в точках M и N (рис. 7.7) сила равна нулю, следовательно $\frac{d\ddot{I}}{dx} = 0$ - условие равновесия. Зная вид функции, которой выражается потенциальная энергия, можно сделать ряд заключений о характере движения частицы. Поясним это, воспользовавшись графиком на рис.7.7.

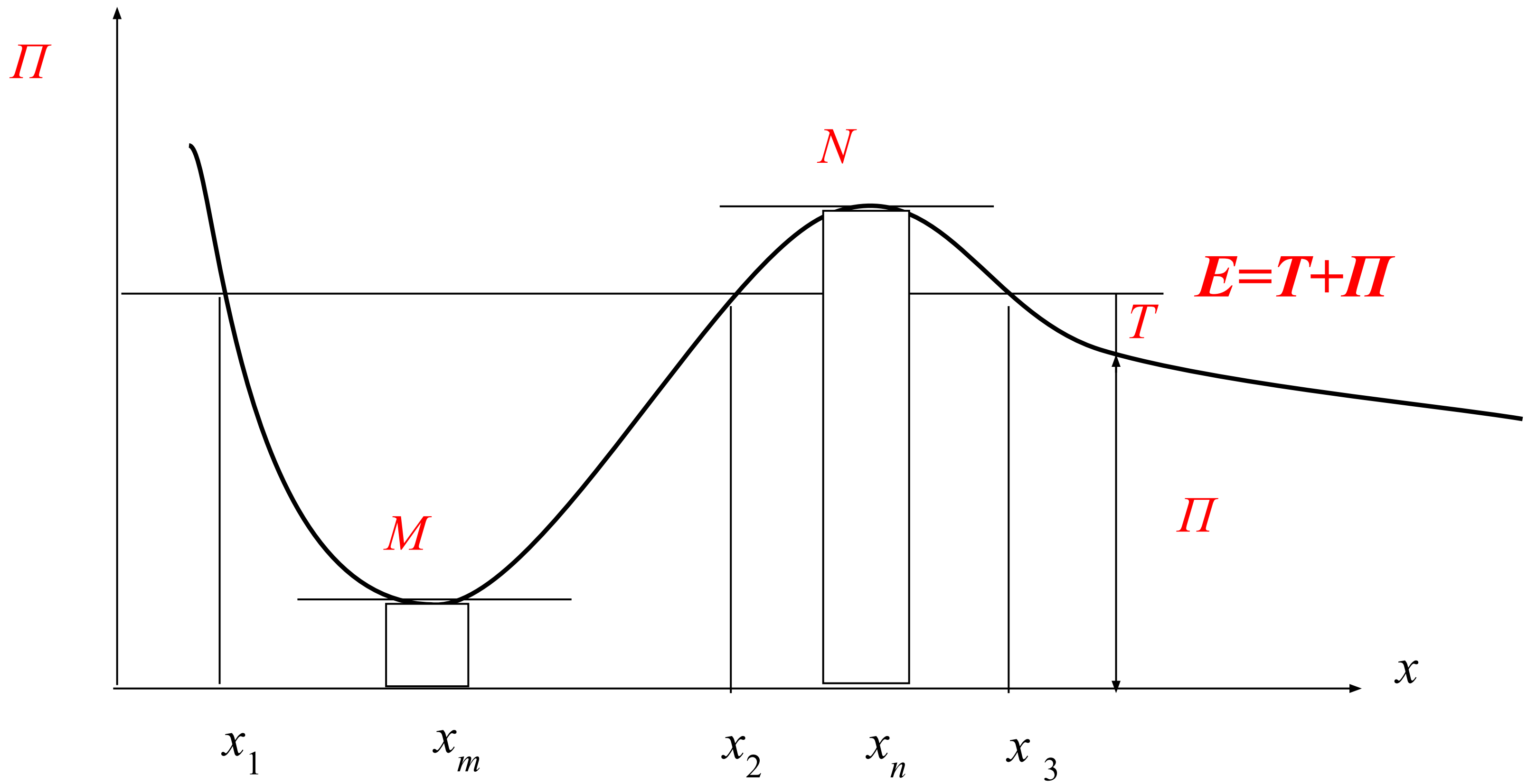


Рис.7.7

Если полная энергия имеет значение, указанное на рис.7.7, то частица может совершать движение либо в пределе от x_1 до x_2, либо в пределах от x_3 до бесконечности.

В области $x<x_1$ и $x_2<x<x_3$ частица проникнуть не может, так как потенциальная энергия не может стать больше полной энергии (если бы это случилось, то кинетическая энергия стала бы отрицательной). Таким образом, область $x_2 < x < x_3$ представляет собой потенциальный барьер, через который классическая частица не может проникнуть, имея должный запас полной энергии. Область $x_2 < x < x_3$ называется потенциальной ямой.

Если частица при своем движении не может удаляться на бесконечность, движение называется финитным. Если же частица может уходить сколь угодно далеко, движение называется инфинитным. Частица в потенциальной яме совершает финитное движение. Финитным будет также движение частицы с отрицательной полной энергией в центральном поле сил притяжения (предполагается, что потенциальная энергия обращается в нуль на бесконечности).

Точка M – точка устойчивого равновесия. Условием устойчивого равновесия является минимальное значение потенциальной энергии $\frac{d^2\Pi}{dx^2} > 0$.

Точка N – точка неустойчивого равновесия. Условием неустойчивого равновесия является минимальное значение потенциальной энергии $\frac{d^2\Pi}{dx^2} < 0$.