Лекция 8. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

8.1. ИМПУЛЬС СИЛЫ

Примером применения законов сохранения импульса и энергии при решении реальной физической задачи является удар абсолютно упругих и неупругих тел.

Удар (или соударение) – это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время.

Помимо ударов в прямом смысле этого слова (столкновение атомов или бильярдных шаров), сюда можно отнести и такие, как удар человека о землю при прыжках с балкона в известных анекдотах и т.д.

Силы взаимодействия между сталкивающимися телами (ударные или мгновенные силы) столь велики, что внешними силами, действующими на них можно пренебречь.
Это позволяет систему тел, в процессе их соударения, приближенно рассматривать как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения.
Когда происходит столкновение между простыми телами, сила взаимодействия за очень короткое время обычно нарастает от нулевого значения в момент контакта до очень большой величины, а затем вновь резко спадает до нулевого значения.

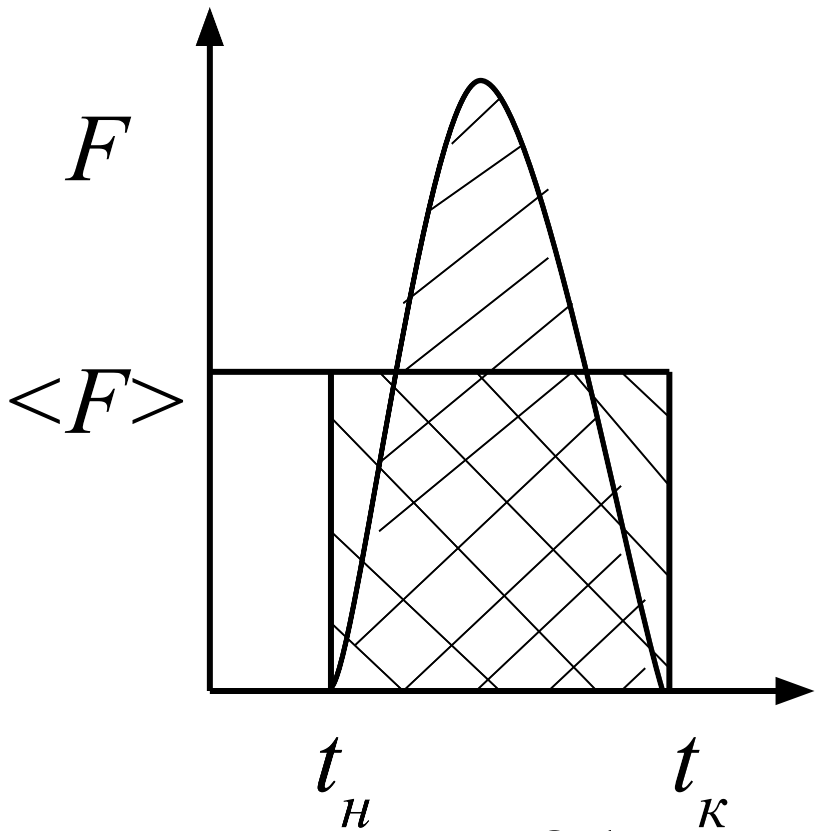


Рис. 8.1

На рисунке 8.1. приведена типичная зависимость величины силы, с которой одно тело действует на другое при столкновении, от времени. В интервал времени $\Delta t = t_к - t_н$, где $t_н$ - "начальный" момент времени (когда начала действовать сила) и $t_к$ – "конечный" момент времени (когда сила перестала действовать), обычно можно определить с большой точностью (как правило, он очень короткий).

Из второго закона следует, что результирующая сила, действующая на тело, равна скорости изменения его импульса:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

(эта формула применима к каждому из участвующих в столкновении тел). В течение бесконечно малого временного интервала dt импульс изменяется на величину $d\vec{p} = \vec{F}dt$. Проинтегрировав это равенство по времени в течение которого проходит столкновение, получим:

$$\vec{p}_к - \vec{p}_н = \int_{t_H}^{t_K} \vec{F}dt$$

где $\vec{p}_н$ и $\vec{p}_к$ – импульсы тела соответственно перед столкновением и после него.

Интеграл от силы по времени в течение которого она действует, называется импульсом силы:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

Таким образом, изменение импульса тела равно импульсу силы, действующей на него:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{к} - \vec{p}_{н} = \int_{t_H}^{t_K} \vec{F} dt \qquad (8.1)$$

Единицы измерения импульса силы и импульса тела совпадают, т.е. в системе СИ мы имеем единицы кг·м/с (или Н/с).

Поскольку импульс силы $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$

равен площади под кривой, описывающей зависимость величины силы $\vec{F}$ от t (рис. 8.1), формула (8.1) справедлива, только, если сила $\vec{F}$ есть равнодействующая всех сил, действующих на тело. Она справедлива для любой равнодействующей силы $\vec{F}$, причем импульсы $\mathbf{p}_н$ и $\mathbf{p}_к$ точно соответствуют моментам времени $t_н$ и $t_к$. В некоторых случаях удобно использовать среднюю силу $F_{ср}$, действующую во время столкновения. Она определяется как такая постоянная сила, которая действует в течение того же промежутка времени $\Delta t = t_к - t_н$, что и реальная сила, создает тот же импульс силы и, следовательно, тоже изменение импульса.

Таким образом

$$\vec{\mathrm{I}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathrm{F}}\,\mathrm{d}t$$

На рисунке 8.1 указали величину средней силы пунктирной линией $<F>$, соответствующей импульсной силе. Площадь прямоугольника $<F>\cdot\Delta t$ равна площади под кривой, описывающей зависимость импульса силы от времени.

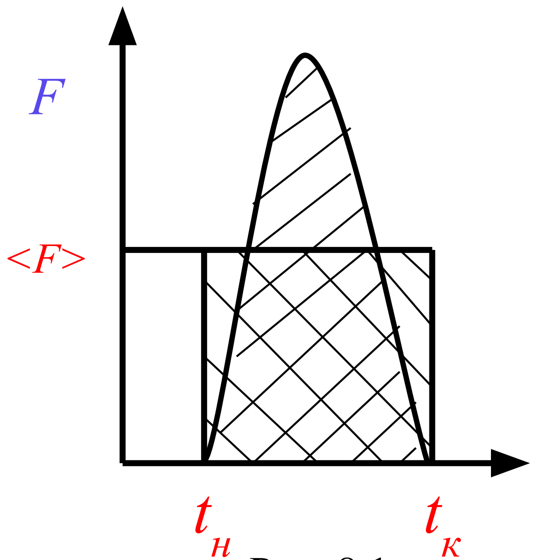


Рис. 8.1

Содержание

Задача. а) Вычислите импульс силы, который испытал человек массой 70 кг, приземлившись на твёрдую землю после прыжка с высоты 5,0 м. Найдите при этом среднюю силу, действовавшую на ноги человека, если он приземлился б) на прямые ноги и в) на согнутых ногах. Предположим, что в случае п. б) центр масс тела во время удара о землю переместился на 1,0 см, а в случае п. в) на 50 см.

Примечание: Предел прочности (предельные напряжения) кости (конечности) на растяжение – $130 \cdot 10^6$ Н/м^2, на сжатие – $170 \cdot 10^6$ Н/м^2

8.2. УДАР АБСОЛЮТНО УПРУГИХ И НЕУПРУГИХ ТЕЛ

Применим теперь законы сохранения энергии и импульса к лобовому упругому и неупругому удару. Тела во время удара претерпевают деформацию. Сущность удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации. Во время удара происходит перераспределение энергии между соударяющимися телами. Наблюдения показывают, что относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения. Это объясняется тем, что нет идеально упругих тел и идеально гладких поверхностей.

Отношение нормальных составляющих относительной скорости тел после и до удара называется *коэффициентом восстановления k*:

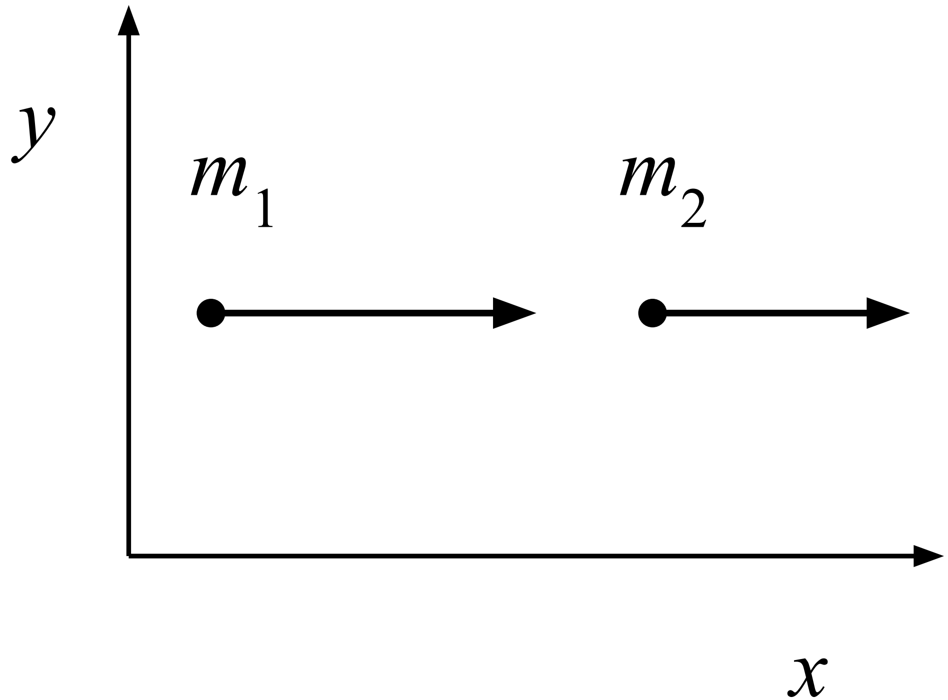
$$k = V_n^{'} / V_n$$

Если для сталкивающихся тел k = 0, то такие тела называются абсолютно неупругими, если k = 1 – абсолютно упругими. На практике для тел 0 < k < 1 (например, для стальных шаров k ≈ 0,56, для шаров из слоновой кости k ≈ 0,89, для свинца k ≈ 0). Однако в некоторых случаях тела можно рассматривать с большой степенью точности как абсолютно упругие, либо как абсолютно неупругие.

Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел и нормальная к поверхности их соприкосновения, называется линией удара. Удар называется центральным, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центр масс. Мы будем рассматривать только центральные абсолютно упругие и абсолютно неупругие удары.

8.2.а). Абсолютно упругий удар – столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию (это идеальный случай). Для абсолютно упругого удара выполняется закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии.

Обозначим скорости частиц до удара через V_1 и V_2, а после удара V_1' и V_2'. При любом значении $V > 0$ частица движется вправо (координата x возрастает), в то время как при $V < 0$ частица движется влево и координата x уменьшается. Напоминаю, мы рассматриваем центральный удар.



При указанных допущениях законы сохранения имеют вид:

З.С.И.:

$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V_1' + m_2V_2' \quad (8.2)$$

З.С.К.Э.:

$$\frac{m_1V_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2V_2^{\,2}}{2} = \frac{m_1V_1'^{\,2}}{2} + \frac{m_2V_2'^{\,2}}{2} \quad (8.3)$$

Или

$$m_1(V_1 - V_1') = m_2(V_2' - V_2) \quad (8.4)$$

$$m_1(V_1^{\,2} - V_1'^{\,2}) = m_2(V_2'^{\,2} - V_2^{\,2}) \quad (8.5)$$

$$m_1(V_1 - V_1')(V_1 + V_1') = m_2(V_2' - V_2)(V_2' + V_2) \quad (8.6)$$

Разделив (8.6) на (8.4), получим

$$V_1 + V_1^| = V_2^| + V_2 \qquad \text{или} \qquad V_1 - V_2 = V_2^| - V_1^| \quad (8.7)$$

Итак, мы получили, что

относительная скорость двух частиц после столкновения в точности равна их относительной скорости до столкновения.

!Это верно для любого лобового удара, независимо от того, какие массы имеют частицы!

Разберем несколько примеров

1.Частицы с одинаковыми массами. Из закона сохранения импульса имеем:

а). $v_1 + v_2 = v_1^| + v_2^|$. Поскольку неизвестных величин две, необходимо еще одно уравнение. Можно использовать закон сохранения кинетической энергии, но проще применить уравнение (8.7), согласно которому, относительные скорости до и после столкновения одинаковы.

б). $V_1 - V_2 = V_2^{|} - V_1^{|}$. Сумма а) и б) дает $V_1^{|} = V_2$, а разность а) и б) дает $V_1 = V_2^{|}$, таким образом, в результате столкновения частицы “обмениваются” скоростями; частица 2 приобретает скорость частицы 1, и наоборот. Если частица 2 первоначально покоилась (V_2=0), то мы имеем , $V_2^{|} = V_1$ $V_1^{|} = 0$

2. Частица 2 первоначально покоилась (V_2=0). Объединяя уравнение сохранения импульсов с полученными выше соотношениями для $V_2^{|}$ и $V_1^{|}$, получаем:

$$\vec{V}_2^{|} = V_1\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) \quad , \quad \vec{V}_1^{|} = V_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad (8.8)$$

Представляют интерес некоторые частные случаи:

а) $V_2=0$, $m_1=m_2$. Здесь мы имеем $V_2^{|}=V_2$ и $V_1^{|}=0$. Этот случай мы уже рассматривали.

б) $V_2=0$, $m_1>>m_2$. Это случай, когда очень массивная частица налетает на легкую покоящуюся частицу. Используя (8.8) имеем, $V_2^{|}\approx 2V_1$, $V_1^{|}=V_1$. Таким образом, скорость массивной частицы практически не меняется, а скорость легкой становится равной удвоенной скорости налетающей частицы.

в) $V_2=0$, $m_1<<m_2$. Движущееся легкое тело сталкивается с очень массивным покоящимся телом. Из (8.8) имеем:

$$m_1<<m_2, \quad V_1^{|}=-V_1 .$$

Массивное тело практически остается в покое, тогда как очень легкое тело отскакивает практически с той же по величине (но противоположно направленной) скоростью.

г) $V_2=0$, $m_1>m_2$. Первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью $\left(V_1' < V_1\right)$. Скорость второго шара после удара больше, чем скорость первого после удара $V_2' > V_1'$.

д) $V_2=0$, $m_1<m_2$. Направление удара первого шара изменяется – шар отскакивает обратно. Второй шар движется в ту же сторону, в которую двигался первый шар до удара, но с меньшей скоростью, т. е. $V_2^{|} < V_1^{|}$

8.2.б). Абсолютно неупругий удар – столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое.

Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу.

Если массы шаров m_1 и m_2, их скорости до удара $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$, то используя закон сохранения импульса, можно записать $m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}$, где $\vec{V}$ - скорость движения шаров после удара. Тогда:

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2} \qquad (8.9)$$

Если шары двигались навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом. В частном случае, если массы шаров равны ($m_1=m_2$), то $\vec{V} = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2)/2$.

Выясним, как меняется кинетическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе. Так как в процессе соударения шаров между ними действуют силы, зависящие не от самих деформаций, а от их скоростей, то мы имеем дело с силами, подобными силам трения, поэтому закон сохранения механической энергии не должен соблюдаться.

Вследствие деформации происходит “потеря” кинетической энергии , перешедшей в тепловую или другие формы энергии. Эту “потерю” можно определить по разности кинетических энергий до и после удара:

$$\Delta T = \left(\frac{m_1 V_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 V_2^{\,2}}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) V^{2}}{2}$$

Используя (8.9), получаем

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (V_1 - V_2)^2$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно (V_2=0), то

$$V = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2} \quad , \quad \Delta T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 V_1^2}{2}$$

Когда $m_2 >> m_1$ (масса неподвижного тела очень большая), то $V << V_1$ и почти вся кинетическая энергия при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому, например, для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка.

Когда $m_1 >> m_2$, тогда $V \approx V_1$ и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение, а не на остаточную деформацию (пример, молоток - гвоздь).

Абсолютно неупругий удар – пример того, как происходит “потеря” механической энергии под действием диссипативных сил.

Содержание