8.3. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

Рассмотрим теперь системы, массы которых изменяются. Такие системы можно рассматривать как своего рода неупругое столкновение. В этом случае проще всего обратиться к формуле из пятой лекции:

$$\vec{P} = M\vec{V}_{ц.м.} \tag{8.10}$$

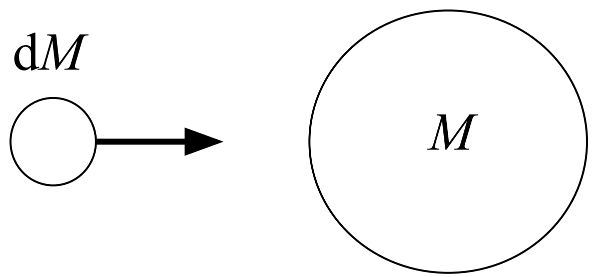
полный импульс системы частицы равен произведению полной массы системы M и скорости Ц.М. системы.

Если продифференцировав обе части равенства (8.10) по времени, то при условии, что М постоянна, получим:

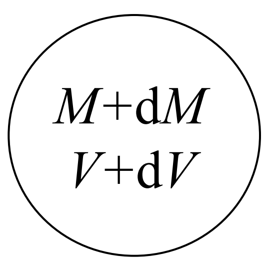
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{V}_{ц.м.}}{dt} = M\vec{a}_{ц.м.} = \vec{F}_{внешн.} \qquad (8.11)$$

где $\vec{F}_{внешн.}$ - внешняя результирующая сила, приложенная к системе. Необходимо очень тщательно определять систему и учитывать все изменения ее импульса. Важным примером систем с переменной массой являются ракеты, которые движутся вперед за счет выбрасывания назад сгоревших газов; при этом ракета ускоряется силой, действующей на нее со стороны газов. Масса M ракеты все время уменьшается, т.е. $dM/dt<0$.

Другим примером систем с переменной массой представляет собой погрузка сыпучих или иных материалов на транспортную ленту конвейера; при этом масса M нагруженного конвейера возрастает, т.е. $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t>0$.



а) в момент времени t



б) в момент времени $t+\mathrm{d}t$

Рис. 8.2.

Общий случай системы с переменной массой можно исследовать на примере системы, изображенной на рис. 8.2.

В некоторый момент времени t система имеет массу M и импульс ; по направлению к ней движется со скоростью $\vec{u}$ небольшое (бесконечно малое) тело тело массой dM, которое находится в состоянии, близком к тому, чтобы войти в рассматриваемую систему. Для простоты будем называть этот процесс “столкновением”. За бесконечно малый промежуток времени dt к массе системы M добавляется масса dM. Таким образом, через время dt масса системы изменится от M до M+dM. (заметим, что масса dM может быть отрицательной величиной, например для ракеты, летящей вперед за счет выброшенных газов).

Для того, чтобы применить формулу (8.11), необходимо рассмотреть определенную фиксированную систему частиц. Иными словами, изменение импульса мы должны рассматривать у одних и тех же частиц как до столкновения так и после него. Полную систему мы определим как включающую в себя массы M и dM. Тогда в исходном состоянии, т.е. в момент времени t, ее полный импульс равен $M\vec{V} + \vec{U}dM$. В момент времени t+dt (после того как масса dM присоединилась к массе M) скорость системы в целом становится равной $\vec{V} + d\vec{V}$,

а ее полный импульс равен $d\vec{P}$.

Таким образом изменение импульса $d\vec{P}$ запишется в виде:

$$d\vec{P} = (M + dM)(\vec{V} + d\vec{V}) - (M\vec{V} + \vec{U}dM) = Md\vec{V} + \vec{V}dM + dMd\vec{V} - \vec{U}dM$$

При этом в соответствии с формулой (8.11) имеем

$$\vec{F}_{внешн.} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{Md\vec{V} + \vec{V}dM - \vec{U}dM}{dt}$$

Или

$$\vec{F}_{внешн} = M\frac{d\vec{V}}{dt} - (\vec{U} - \vec{V})\frac{dM}{dt} \qquad (8.12,a)$$

При написании этой формулы мы опустили слагаемое $\frac{dM d\vec{V}}{dt}$, поскольку в пределе бесконечно малых величин оно равно нулю. Заметим, что разность $\vec{U} - \vec{V}$ есть не что иное, как скорость $\vec{V}_{отн}$ тела массой d*M* относительно скорости тела массой *M*. Таким образом, $\vec{V}_{отн} = \vec{U} - \vec{V}$ это скорость с которой масса d*M* входит в систему с точки зрения наблюдателя, связанного с массой *M*.

Уравнение (8.12,*а*) можно записать теперь в виде:

$$M\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_{внешн} + \vec{V}_{отн.}\frac{dM}{dt} \qquad (8.12,б)$$

Первое слагаемое в правой части $\vec{F}_{внеш}$ описывает внешнюю силу, действующую на систему в целом (в случае ракеты в нее следует включать силу тяжести и силу сопротивления воздуха). В нее не входит сила, с которой тело массой dM действует на тело массой M в результате их столкновения, поскольку для системы в целом (полной системы), эта сила является внутренней.

Второе слагаемое в правой части $\vec{V}_{отн}(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)$ описывает скорость, с которой импульс передается системе (или уносится от нее), благодаря добавлению или выносу из нее массы. Поэтому это слагаемое можно рассматривать как своего рода силу, которая обусловлена добавлением (или выбрасыванием) массы и действует на систему массой *M*. Для ракеты это слагаемое называют силой реактивной тяги, т.к. оно описывает силу, возникающую в результате выбрасывания продуктов сгорания и действующую на ракету.

Уравнение (8.12,б) – уравнение движения тела переменной массы, которое впервые было выведено И.В. Мещерским. Из уравнения (8.12,б) можно получить уравнение Э.К. Циолковского (при условии что на ракету не действуют внешние силы):

$$V = U \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

Оно показывает:

1) чем больше конечная масса ракеты m, тем больше должна быть стартовая масса ракеты m_0;

2) чем больше скорость истечения газов, тем больше может быть конечная масса при данной стартовой массе ракеты.

Выражения (8.12) получены для нерелятивистского случая.