Лекция 4. Преобразование координат

- 4.1. Принцип относительности.
- 4.2. Преобразования Галилея. Закон сложения скоростей
- 4.2. Постулаты Эйнштейна
- 4.3. Преобразования Лоренца
- 4.4. Следствия из преобразований Лоренца
- 4.5. Релятивистская механика
- 4.6. Взаимосвязь массы и энергии покоя

Введение

При изложении механики предполагалось, что все скорости движения тел значительно меньше скорости света. Причина этого в том, что ***механика Ньютона*** (***классическая***) неверна, при скоростях движения тел, близких к скорости света

$$(\upsilon \to c)$$

Правильная теория для этого случая, называется ***релятивистской механикой*** или специальной теорией относительности

Механика Ньютона оказалась замечательным приближением к релятивистской механике, справедливым в области $\upsilon << c$.

Большинство встречающихся в повседневной жизни скоростей значительно меньше скорости света. Но существуют явления, где это не так (ядерная физика, электромагнетизм, фотоэффект, астрономия).

***По классической механике*: механические явления происходят одинаково в двух системах отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно относительно друг друга.**

4.1. Принцип относительности Галилея

4.1.1.Геометрические преобразования координат. Положение точек относительно материального тела, принятого за систему отсчета, описывается с помощью системы координат, как это было подробно рассмотрено в Л.2. В каждой системе координат пространственное положение точки задается тремя числами, называемыми координатами. ***Формулы, связывающие эти числа в одной системе координат с соответствующими числами в другой системе координат, называются формулами преобразования координат или просто преобразованием координат.*** В качестве примеров в курсе высшей математики Вам были даны формулы преобразования от сферической и цилиндрической систем координат к декартовой, или — преобразование от одной декартовой системы координат к другой. Эти преобразования координат происходят в одной и той же системе отсчета и являются чисто геометрическими операциями, осуществляемыми алгебраическими методами. Они полностью определяются способом введения различных систем координат и геометрическими свойствами пространства. Они не связаны с движением тела отсчета.

Можно себе представить, что различные системы координат связаны с различными телами отсчета, которые покоятся друг относительно друга. Но покоящиеся друг относительно друга системы отсчета в совокупности составляют одну систему отсчета. Поэтому все эти системы координат описывают одну и ту же систему отсчета в различных переменных. Именно поэтому эти преобразования и являются чисто геометрическими. Для того чтобы рассматривать движение, необходимо было ввести измерение времени и синхронизовать часы. Однако преобразование пространственных координат в одной и той же системе отсчета не затрагивает времени, поскольку физические условия в некоторой точке определяются системой отсчета, а не тем, как в ней будет характеризоваться пространственное положение точки. Можно сказать, что время просто не имеет отношения к преобразованиям пространственных координат в пределах одной и той же системы отсчета.

4.1.2.Физические преобразования координат. Различные материальные тела, с которыми связаны различные системы отсчета, могут находиться в движении друг относительно друга. В каждой из систем отсчета введены свои системы координат, время в различных точках измеряется по часам, покоящимся в этих точках и синхронизованных между собой. Возникает вопрос о том, как связаны координаты и время двух разных систем отсчета, если эти системы находятся в относительном движении? Ответ на этот вопрос не может быть дан лишь на основе геометрических соображений. Это физическая задача. Она превращается в геометрическую лишь в том случае, когда относительная скорость различных систем отсчета равна нулю, физическое различие между системами отсчета исчезает и их можно рассматривать как одну систему отсчета.

4.1.3.Инерциальные системы отсчета и принцип относительности. Простейшее движение твердого тела — его поступательное равномерное прямолинейное движение. Соответственно этому простейшим относительным движением систем отсчета является поступательное равномерное прямолинейное движение. Одну из систем отсчета будем условно называть неподвижной, а другую — движущейся. В каждой из систем отсчета введем декартову систему координат. Координаты в неподвижной системе отсчета K будем обозначать через (x, y, z), а в движущейся K′ — через (x', y', z'). Условимся, что величины в движущейся системе координат будут обозначаться теми же буквами, что в неподвижной, но со штрихами. Оси систем координат направим, как указано на рис. 4.1.

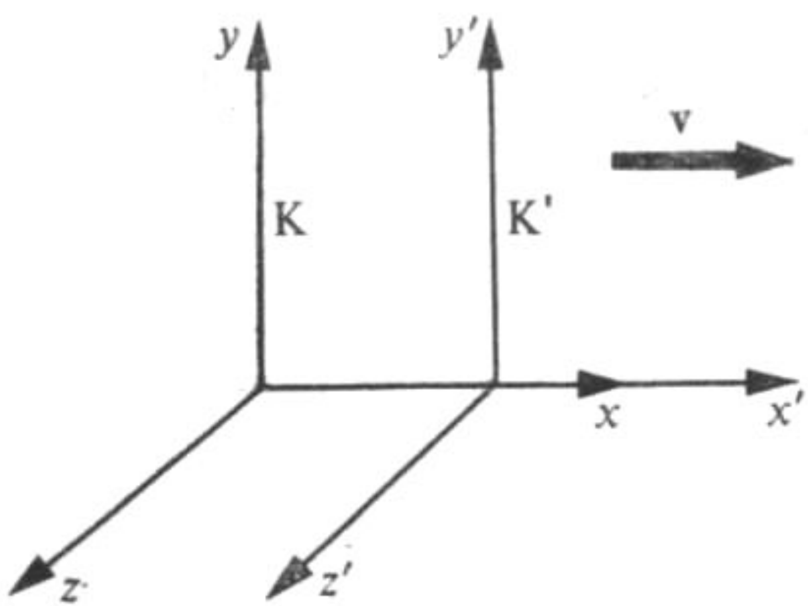


Рис.4.1.

Вместо того чтобы говорить: «тело отсчета, с которым связана штрихованная система координат, движется со скоростью **v**», будем сокращенно говорить: «штрихованная система координат движется со скоростью **v** относительно нештрихованной». Это не вызывает недоразумений, поскольку каждая система координат имеет смысл лишь при указании тела отсчета, с которым она связана. В том же смысле будем говорить об измерении времени в различных системах координат, о синхронизации часов и т. д., понимая, что все это производится в соответствующих системах отсчета.

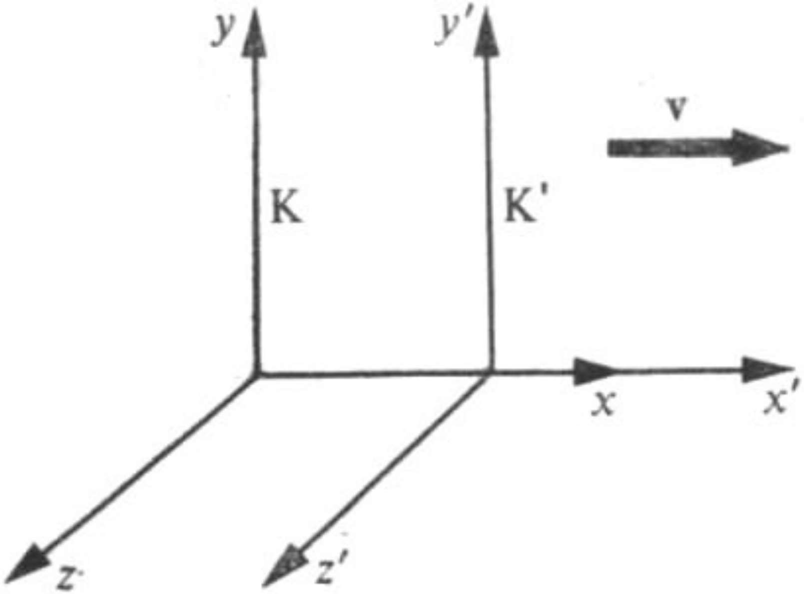


Рис.4.1. Относительное движение штрихованной и нештрихованной систем координат

Пространственным поворотом систем координат и перемещением начала координат можно всегда добиться такого положения, что оси x, x' этих систем координат совпадут, а движение будет происходить вдоль оси X. При таком взаимном расположении систем преобразования координат имеют наипростейший вид

Первый принципиальный вопрос, который возникает, состоит в следующем. Во 2-й и 4-й лекциях было рассмотрено измерение координат и времени в предположении справедливости геометрии Евклида, существовании единого времени и возможности синхронизации часов. Было сказано, что существование таких систем подтверждается опытом. **Теперь необходимо указать способ нахождения таких систем отсчета**. Это можно сделать лишь в результате изучения хода физических процессов в различных системах отсчета, движущихся друг относительно друга.

Давно было замечено, что по наблюдениям за ходом механических явлений в системах координат, движущихся равномерно и прямолинейно относительно поверхности Земли, ничего нельзя сказать об этом движении. Внутри каюты корабля, плывущего по морю без качки равномерно и прямолинейно, все механические явления протекают так же, как и на берегу.

Если на поверхности Земли проделать более тонкие физические опыты, например опыт с маятником Фуко, то удается обнаружить движение поверхности Земли относительно системы неподвижных звезд. Однако анализ показывает, что в этих опытах обнаруживается не скорость точек поверхности Земли относительно неподвижных звезд, а их ускорение.

Из других же многочисленных опытов следует, ***что во всех системах координат, движущихся равномерно и прямолинейно относительно системы неподвижных звезд и, следовательно, друг относительно друга, все механические явления протекают совершенно одинаково. Предполагается, что поля тяготения пренебрежимо малы. Такие системы координат называются инерциальными, поскольку в них справедлив закон инерции Ньютона: тело, удаленное достаточно далеко от других тел, движется относительно систем координат равномерно и прямолинейно.***

Утверждение, впервые высказанное Галилеем, о том, что во всех инерциальных системах координат механические явления протекают, одинаково, **называется принципом относительности Галилея**. В дальнейшем в результате изучения других явлений, в частности электромагнитных, справедливость этого положения была признана для любых явлений. В таком общем виде оно называется **принципом относительности специальной теории относительности или просто принципом относительности**. В настоящее время он с большой точностью экспериментально доказан для механических и электромагнитных явлений.

Тем не менее

принцип относительности является постулатом, т. е. основополагающим допущением, выходящим за пределы экспериментальной проверки. Это обусловлено двумя обстоятельствами.

Во-первых, в пределах изучаемого круга физических явлений эксперимент позволяет проверить утверждение лишь с определенной точностью, доступной измерениям на данном этапе развития науки. Утверждение же носит абсолютный характер, т. е. предполагает, что при сколь угодно большом повышении точности результаты эксперимента будут находиться в согласии с утверждением. Ясно, что это не может быть проверено экспериментально, потому что на каждом данном этапе развития науки эксперименты могут быть выполнены лишь с конечной точностью.

Во-вторых, неизвестны физические явления, которые в настоящее время не открыты. Утверждение о том, что все явления, которые будут открыты в будущем, подчиняются принципу относительности, есть также выход за пределы эксперимента. **Поэтому принцип относительности является постулатом и всегда в будущем останется таковым.** Это не умаляет его значения. Все научные понятия, законы, теории выработаны для определенного круга физических явлений и справедливы в определенных пределах. Выход за пределы их применимости не делает эти понятия, законы, теории и т. д. неправильными. Он лишь указывает границы, условия и точность их применимости. Прогресс науки как раз и состоит в выходе за пределы применимости существующих теорий.

Теперь вернемся к вопросу о том, в каких системах координат геометрия является евклидовой, существует единое время и возможна такая синхронизация часов, которая была описана выше? Ответ гласит: такими системами являются инерциальные системы координат. Этих систем существует бесконечное множество, но все они движутся поступательно равномерно и прямолинейно друг относительно друга. В последующем будут рассматриваться только инерциальные системы и лишь в Л. 18 — неинерциальные системы.

4.1.4.Ложное и истинное в физике. Для оценки значения физических теорий необходимо иметь в виду определенную асимметрию между понятиями истинного и ложного в физике. **Результаты данного физического эксперимента могут либо находиться в согласии с проверяемой теорией, либо ей противоречить**. **Если они ей противоречат, то теория ложна**. **Это утверждение абсолютно и окончательно и не может быть изменено никаким последующим развитием науки.**

Если же они ей не противоречат, то это лишь означает, что данный эксперимент не противоречит теории и можно продолжать ею пользоваться. К каким выводам относительно этой теории приведет дальнейшее развитие науки на основании этого эксперимента, сказать нельзя. Иначе говоря, **ложность физической теории может быть установлена на любом этапе, а истинность — лишь в перспективе развития.** Это связано с философским соотношением между абсолютной и относительной истинами. На каждом этапе познается относительная истина и лишь бесконечная последовательность этапов познания ведет человечество в направлении познания абсолютной истины. Этот процесс

Физическое содержание принципа относительности. Принцип относительности основывается на предположении, что существует бесчисленное множество систем координат, в которых геометрия является евклидовой, существует единое время и часы можно синхронизовать так, как это было описано ранее. Пространственно-временные соотношения в пределах каждой из этих систем координат совершенно одинаковы и по этому признаку системы координат неотличимы друг от друга. Справедливость такого предположения обосновывается большим числом экспериментальных фактов. Опыт показывает, что в таких системах координат соблюдается первый закон Ньютона и поэтому они называются инерциальными. Эти системы координат движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, без вращения

Указанные пространственно-временные соотношения должны соблюдаться во всем пространстве и в течение бесконечно больших промежутков времени. Если они справедливы лишь приближенно в ограниченной области пространства, то нельзя говорить о системе координат, в которой справедлив принцип относительности специальной теории относительности. Например, пусть **система координат движется прямолинейно и равноускоренно относительно системы неподвижных звезд**. В этой системе координат существует единое время, и в небольших областях пространства геометрия является с большой точностью евклидовой (при достаточно малых ускорениях), и можно приближенно синхронизовать часы так, как это было описано ранее. Однако такая система координат не относится к системам координат, к которым можно применять принцип относительности, и не является инерциальной, хотя в малой области пространства и для небольших промежутков времени пространственно-временные соотношения в этой системе мало отличаются от аналогичных соотношений в инерциальной системе координат.

Но содержание принципа относительности не сводится лишь к характеристике пространственно-временных соотношений. Принцип относительности является констатацией одинакового характера течения физических процессов в инерциальных системах координат и является, следовательно, физическим утверждением. Впрочем, надо иметь в виду обсужденный ранее смысл утверждений о свойствах пространства и времени.

Дома: ответить письменно на вопросы

1.Как определяется «время» в физике;

2. Как осуществить синхронизацию часов в различных системах координат.

3.Чем отличаются чисто геометрические преобразования координат от физических преобразований!

4. Если имеются различные системы отсчета, то при каком условии преобразования связанных с ними координат становятся геометрическим преобразованием!

4.2. Преобразования Галилея

4.2.1. Преобразования Галилея. Движущаяся со скоростью система координат k' (см. рис. 4.2) в каждый момент времени занимает определенное положение относительно неподвижной k.

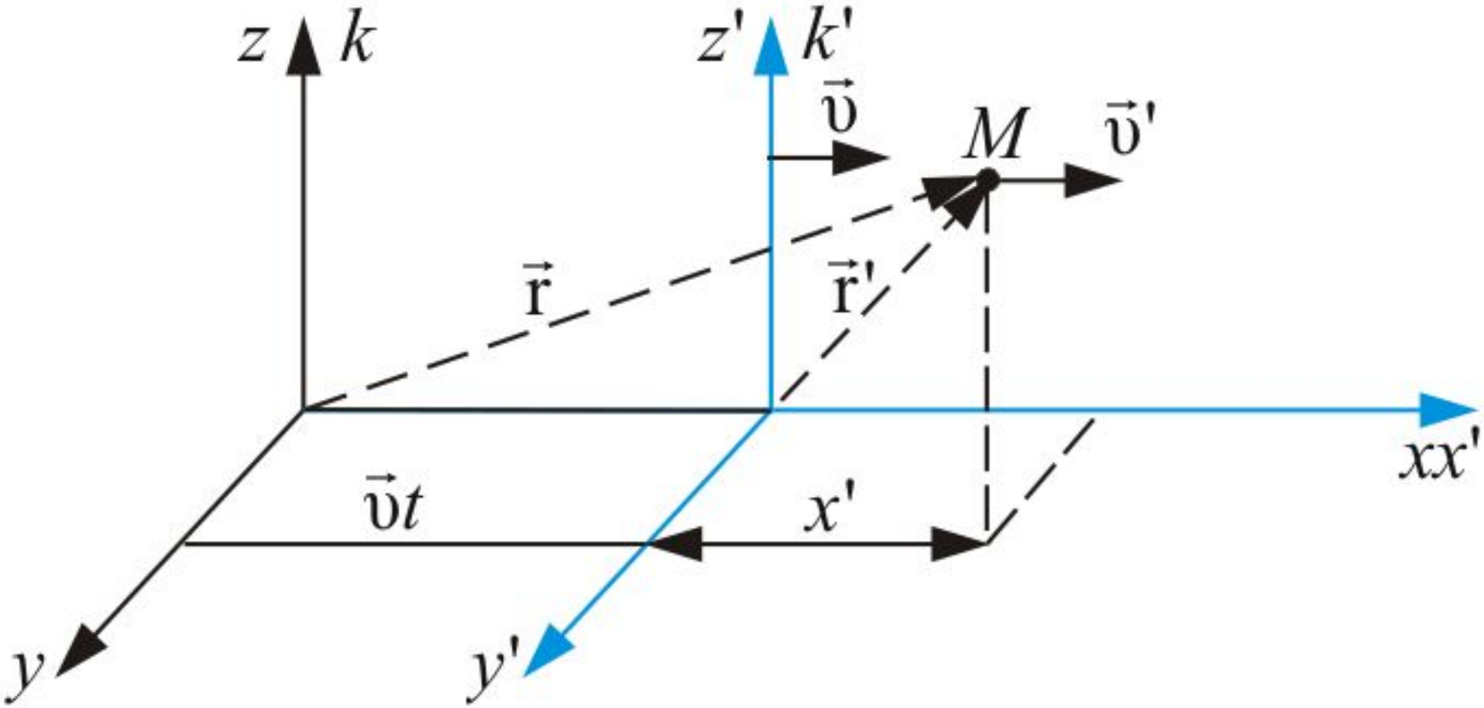


Рисунок 4.2. Система k' движется относительно k со скоростью $\upsilon = const$ вдоль оси x. Точка M движется в двух системах отсчета

Если начала обеих систем координат совпадают в момент $t = 0$, то в момент t начало движущейся системы координат находится в точке $x = \upsilon t$ неподвижной системы. Преобразования Галилея предполагают, что для координат и времени систем (x, y, z) и (x', y', z') в каждый момент существует такое соотношение, какое существовало бы между ними, если бы эти системы в данный момент покоились друг относительно друга, т. е. преобразования координат сводятся к геометрическим преобразованиям, которые были уже рассмотрены, а время является одним и тем же, т. е.

$$\boxed{x' = x - \upsilon t,\ y = y',\quad z = z',\quad t = t'. \qquad (4.2.1)}$$

Эти формулы называются преобразованиями Галилея.

Очевидно, что в качестве неподвижной системы можно было бы взять штрихованную. В штрихованной системе координат нештрихованная движется со скоростью υ в направлении отрицательных значений x', т. е. с отрицательной скоростью. Поэтому формулы преобразования в этом случае могут быть получены из (4.2.2) заменой штрихованных величин на нештрихованные и заменой $\upsilon \rightarrow -\upsilon$, *т.е. имеют вид*

$$x = x' + \upsilon t', \; y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \qquad (4.2.2)$$

Полезно заметить, что формулы (4.2.2) сейчас были получены из (4.2.1 не путем вычисления, т. е. не решением уравнений (4.2.1) относительно нештрихованных величин, а путем применения к преобразованиям (4.2.1) принципа относительности. Конечно, те же формулы (4.2.2) получаются из (4.2.1) просто решением их как системы уравнений относительно нештрихованных величин. Совпадение обоих результатов означает, что уравнения (4.2.1) и (4.2.2) не противоречат принципу относительности.

4.2.2. Инварианты преобразований. При преобразовании координат различные физические и геометрические величины, вообще говоря, изменяют свои численные значения. Например, положение некоторой точки характеризуется тремя числами (x_1 y_1, z_1). При изменении системы координат эти числа меняются. Ясно, что они характеризуют не какое-либо объективное свойство точки, а лишь положение точки относительно конкретной системы координат.

Если величина не изменяет своего численного значения при преобразовании координат, то это означает, что она имеет объективное значение, независимое от выбора той или иной системы координат. Такие величины отражают свойства самих изучаемых явлений и предметов, а не отношения этих явлений и предметов к системе координат, в которой они рассматриваются.

Величины, численное значение которых не изменяется при преобразовании координат, называются инвариантами преобразований.

Они имеют первостепенное значение в физической теории. Поэтому необходимо изучить инварианты преобразований Галилея.

4.2.3. Инвариантность длины. Пусть в штрихованной системе координат находится стержень, координаты концов которого (x'_1, y'_1, z'_1) и (x'_2, y'_2, z'_2). Это означает, что длина стержня в штрихованной системе равна

$$\boxed{l = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}}$$

В нештрихованной системе координат стержень движется поступательно и все его точки имеют скорость υ. Длиной движущегося стержня, по определению, называется расстояние между координатами его концов в некоторый момент времени. Таким образом, для измерения длины движущегося стержня необходимо одновременно, т. е. при одинаковых показаниях часов неподвижной системы координат, расположенных в соответствующих точках, отметить положение концов стержня. Пусть засечки положения концов движущегося стержня сделаны в неподвижной системе координат в момент t_0 и характеризуются координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2). Согласно формулам преобразования (4.2.2), координаты и время в движущейся и неподвижной системах связаны соотношениями:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1 - \upsilon t_0, \qquad & x_2' &= x_2 - \upsilon t_0, \\
y_1' &= y_1, & y_2' &= y_2, \\
z_1' &= z_1, & z_2' &= z_2, \\
t_1' &= t_1, & t_2' &= t_2.
\end{aligned}
\tag{4.2.3}
$$

Отсюда следует:

$$
\left(x_2' - x_1'\right) = (x_2 - x_1), \quad \left(y_2' - y_1'\right) = (y_2 - y_1), \quad \left(z_2' - z_1'\right) = (z_2 - z_1).
$$

и поэтому

$$
\boxtimes = \sqrt{\left(x_2' - x_1'\right)^2 + \left(y_2' - y_1'\right)^2 + \left(z_2' - z_1'\right)^2} =
$$

$$
\sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2} = \boxtimes' \tag{4.2.4}
$$

т. е. длина стержня в обеих системах координат одинакова. Это позволяет утверждать, что **длина является инвариантом преобразований Галилея.**

4.2.4.Абсолютный характер понятия одновременности. Обратим внимание на последнюю строчку в формуле (12.3): эти равенства показывают, что в тот момент, когда засекались концы движущегося стержня в неподвижной системе координат, часы, расположенные в тех точках движущейся системы координат, с которыми совпадают концы стержня, показывают одно и то же время. Это является следствием формулы преобразования времени от одной системы координат к другой в виде $t' = t$. Она говорит, что события, одновременные в одной системе, одновременны и в другой, т. е. утверждение об одновременности двух событий имеет абсолютный характер, независимый от системы координат.

4.2.5. Инвариантность интервала времени. Инвариантность интервала времени доказывается на основании формулы преобразования $t' = t$. Пусть в движущейся системе координат произошли события в некоторые моменты t'_1 и t'_2. Интервал времени между этими событиями

$$\Delta t' = t_2 - t_1 \qquad (4.2.5)$$

В неподвижной системе координат эти события на основании (12.2) произошли в моменты $t_1 = t'_1$ и $t_2 = t'_2$ и, следовательно, интервал времени между ними

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 = \Delta t' \qquad (4.2.6)$$

Таким образом, можно сказать, что **интервал времени является инвариантом преобразований Галилея.**

4.2.6. Сложение скоростей. Пусть в штрихованной системе координат движется материальная точка, зависимость координат которой от времени описывается формулами:

$$x'=x'(t'),\ y' = y'(t),\ z' = z'(t'), \qquad (4.2.7)$$

а компоненты скорости равны:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}. \qquad (4.2.8)$$

В неподвижной системе координат на основании (4.2.2) координаты этой точки изменяются со временем по закону:

$$x(t)=x'(t')+ \upsilon t',\ \ z(t)= z'(t'),\ y(t) = y‘(f),\ t = t', \qquad (4.2.9)$$

а компоненты ее скорости даются равенствами:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \upsilon\frac{dt'}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + \upsilon\frac{dt'}{dt'} = u'_x + \upsilon, \\ u'_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dt'} = u'_y, \\ u_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = \frac{dz'}{dt'} = u'_z. \end{aligned} \qquad (4.2.10)$$

которые являются **формулами сложения скоростей классической нерелятивистской механики.**

Скорость движения точки M (сигнала) u'_x в системе k' и u_x в системе k различны .

4.2.7. Инвариантность ускорения. Дифференцируя равенства (4.2.10) с учетом того, что $dt = dt'$, получаем:

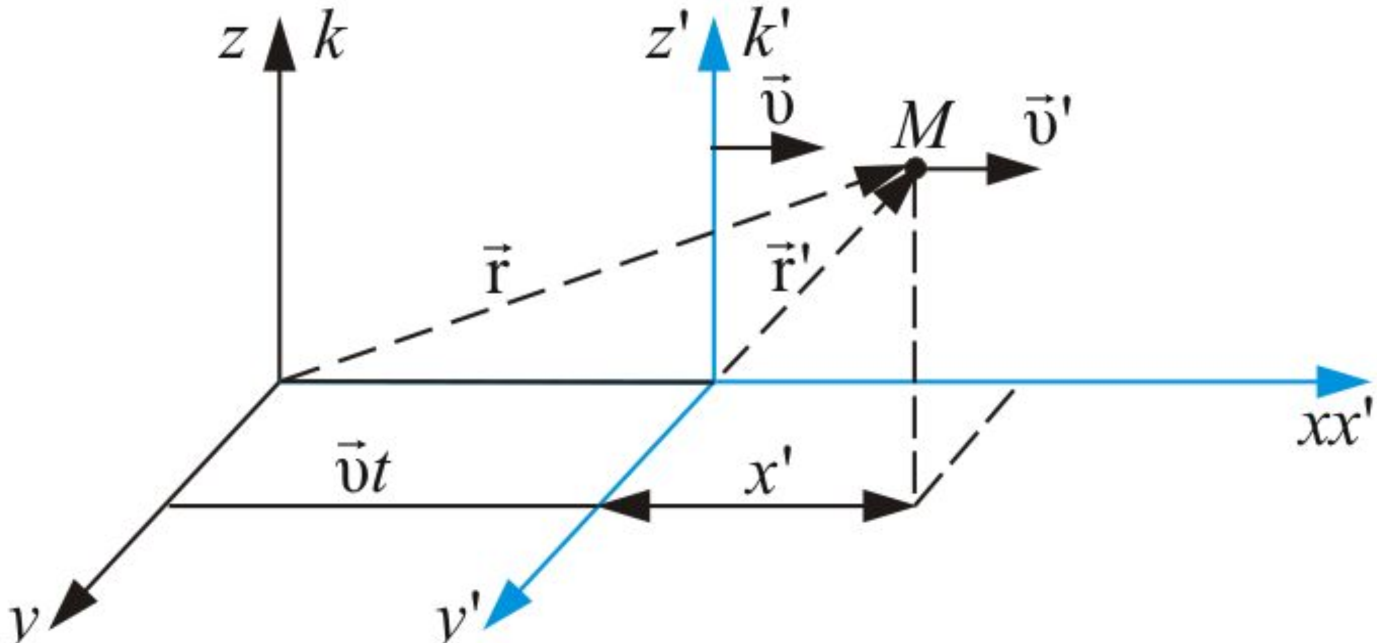
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt'^2}. \quad (4.2.11)$$

Эти формулы показывают, что **ускорение инвариантно относительно преобразований Галилея.**

4.2.8. Векторная форма преобразования Галилея. В уравнениях (4.2.1 -4.2.11) время $t = t'$ – т. е. в классической механике предполагалось, что время течет одинаково в обеих системах отсчета независимо от скорости. «*Существует абсолютное время, которое течет всегда одинаково и равномерно*», – говорил И. Ньютон.

В векторной форме ***преобразования Галилея*** можно записать так:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{\upsilon} t. \qquad (4.2.12)$$



4.2.9. Вывод:

Таким образом видим, что для **однозначного определения кинематических параметров**, *описывающих движение материальной точки* **относительно СО К**, *по измерениям, проведенным* **в СО К'**, *необходимо знать* **связь** *моментов времени* t *и* t_0

В **классической механике** *проблема взаимосвязи моментов времени* **в различных СО** *решается* **постулатом Галилея**

Моменты времени в различных СО совпадают с точность до постоянной величины, $t = t' + const$ *определяемой процедурой синхронизации часов*

Обычно считают **часы синхронизированными таким образом,** *что* $const = 0$, *то есть при таком* **способе синхронизации** *из последнего уравнения несложно получить* **связь ускорений в произвольных СО**

$$\boxed{t = t'} \qquad \boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,'} \qquad \boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,'} \qquad \boxed{\vec{a} = \vec{a}\,'}$$

***Эти уравнения называют* преобразованиями Галилея *для* инерциальных СО**