Лекция 6. Преобразования Лоренца

6.1.1.Постулаты. Поскольку преобразования Галилея для достаточно больших скоростей приводят к выводам, противоречащим экспериментам, и постоянство скорости света не является их следствием, они не отражают правильно той связи, которая существует для координат и времени инерциальных систем координат, движущихся друг относительно друга. **Необходимо найти другие преобразования, которые правильно описывают экспериментальные факты и, в частности, приводят к постоянству скорости света.** Эти преобразования называются преобразованиями Лоренца. Они могут быть введены исходя из двух принципов, обоснование которых было изложено в предыдущих параграфах:

1) принципа относительности;
2) принципа постоянства скорости света.

Оба эти принципа, хотя и подтверждены многочисленными экспериментами, имеют характер постулатов и поэтому иногда называются постулатом относительности и постулатом постоянства скорости света.

6.1.2.Линейность преобразования координат. Ориентировку движущихся систем координат чисто геометрическими преобразованиями, сводящимися к пространственным поворотам и переносам начала координат в пределах каждого из тел отсчета, можно всегда привести к такой, которая изображена на рис. 26. Поскольку скорости не складываются по классической формуле (12.10), можно ожидать, что время одной системы координат не выражается только через время другой системы координат, а зависит также и от координат. Поэтому в общем случае преобразования имеют следующий вид:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \Phi_1(x,y,z,t), \quad & y' &= \Phi_2(x,y,z,t), \\ z' &= \Phi_3(x,y,z,t), \quad & t' &= \Phi_4(x,y,z,t), \end{aligned}} \tag{6.1.1}$$

где в правых частях стоят некоторые функции Φ_b вид которых надо найти.

Общий вид этих функций определяется свойствами пространства и времени. При рассмотрении геометрических соотношений в выбранной системе отсчета и при измерениях в ней принималось, что каждая точка ничем не отличается от любой другой точки. Это означает, что начало системы координат может быть помещено в любой точке и все геометрические соотношения между любыми геометрическими объектами при этом совершенно одинаковы с теми, которые получаются при помещении начала координат в любую другую точку. **Это свойство называется однородностью пространства, т. е. свойством неизменности характеристик пространства при переходе от одной точки к другой.** Можно также в каждой точке пространства оси системы координат произвольным образом ориентировать в нем, при этом геометрические соотношения между геометрическими объектами также не изменяются. Это означает, что свойства пространства по различным направлениям одинаковы. Такое свойство называется изотропностью пространства.

Однородность и изотропность пространства являются его главными свойствами в инерциальных системах координат.

Время также обладает важнейшим свойством однородности. Физически это означает следующее. Пусть некоторая физическая ситуация возникает в некоторый момент времени. В последующие моменты времени она будет каким-то образом развиваться. И пусть такая же физическая ситуация возникает в любой другой момент времени. Если она в последующие моменты времени будет развиваться относительно этого момента точно так же, как она в первом случае развивалась относительно своего начального момента, то говорят, что время однородно. Иначе говоря,

однородность времени есть одинаковость развития и изменения данной физической ситуации независимо от того, в какой момент времени эта ситуация сложилась.

Из однородности пространства и времени следует, что преобразования (6.1.1) должны быть линейными. Для доказательства рассмотрим бесконечно малое изменение dx' , т. е. разность координат x' двух бесконечно близких точек. В нештрихованной системе им будут соответствовать бесконечно малые разности координат dx, dy, dz и времени dt. Из (14.1) можно вычислить полное изменение dx', связанное с изменениями величин x, y, z, t, по формуле полного дифференциала, известной из математики:

$$dx' = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}. \qquad (6.1.2)$$

В силу однородности пространства и времени эти соотношения должны быть одинаковыми для всех точек пространства и для любых моментов времени. А это означает, что величины $\partial\Phi_1/\partial x$, $\partial\Phi_1/\partial y$, $\partial\Phi_1/dz$, $\partial\Phi_1/dt$ не должны зависеть от координат и времени, т. е. являются постоянными. Поэтому функция Φ_1 имеет следующий вид:

$$\Phi_1(x, y, z, t) = A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_4 t + A_5, \qquad (6.1.3)$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 — постоянные. Таким образом, функция $\Phi_1(x,y,z,t)$ является линейной функцией своих аргументов. Аналогично доказывается, что в силу однородности пространства и времени и другие функции Φ_2, Φ_3 и Φ_4 в преобразованиях (6.1.1) будут линейными функциями от x, y, z, t.

6.1.3.Преобразования для *y* и *z*. Точка начала в каждой системе координат задается равенствами $x = y = z = 0$, $x' = y' = z' = 0$. Будем считать, что в момент $t = 0$ начала координат совпадают. Тогда свободный член A_5 в линейных преобразованиях вида (6.1..3) должен быть равен нулю и преобразования для y и z запишутся следующим образом

$$\begin{aligned} y' &= a_1x + a_2y + a_3z + a_4t, \\ z' &= b_1x + b_2y + b_3z + b_4t. \end{aligned} \qquad (6.1.4)$$

Ориентировка осей координат указана на рис. 4.1: ось y' параллельна оси y, а ось z — оси z. Поскольку ось x' все время совпадает с осью x, из условия $y = 0$ всегда следует равенство $y' = 0$, а из условия z = 0 — равенство z' = 0, т. е. должно быть

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 t, \\ 0 &= b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 t \end{aligned} \qquad (6.1.5)$$

при любых *x, y,* z и *t*. Это возможно лишь при условии

$$a_1 = a_3 = a_4 = 0, \quad b_1 == b_2 = b_4 = 0. \qquad (6.1.6)$$

Поэтому преобразования для *y* и z принимают следующий простой вид:

$$a' = ay, \quad z' = az, \qquad (6.1.7)$$

где учтено, что в силу равноправности осей *y* и z относительно движения коэффициенты в преобразованиях должны быть одинаковыми: $y_3 = b_з = a$. Коэффициент *a* в формуле (6.1.7) показывает, во сколько раз длина некоторого масштаба в штрихованной системе координат больше, чем в нештрихованной. Перепишем (6.1.7) в виде

$$y = \frac{1}{a} y', \quad z = \frac{1}{b} z'. \qquad (6.1.8)$$

Величина $1/a$ показывает, во сколько раз длина некоторого масштаба в нештрихованной системе больше, чем в штрихованной. Согласно принципу относительности, обе системы координат равноправны и поэтому при переходе от одной системы к другой длина масштаба должна изменяться так же, как и при обратном переходе. Поэтому в формулах (14.7) и (14.8) должно соблюдаться равенство $(1/a) = a$, откуда получаем $a = 1$ (возможное математически решение $a = -1$ исключается в силу выбранной ориентации осей: положительные значения осей y, z и y', z' совпадают). Следовательно, преобразования для координат y и z имеют вид:

$$y' = y, \quad z' = z. \qquad (6.1.9)$$

6.1.4.Преобразования для *x* и *t*. Поскольку переменные y и z преобразуются отдельно, переменные x и t могут быть связаны линейным преобразованием только друг с другом. Точка начала движущейся системы координат в неподвижной имеет координату $x = \upsilon t$,

а в движущейся системе — координату $x' = 0$. Поэтому в силу

$$x' = \alpha(x - \upsilon t) \qquad (6.1.10)$$

где α — коэффициент пропорциональности, который требуется определить.

Совершенно аналогичные рассуждения можно провести, отправ ляясь от движущейся системы, приняв ее за покоящуюся. Тогда в ней точка начала координат нештрихованной системы имеет коор динату $x' = -\upsilon t'$, поскольку в штрихованной системе нештрихованная движется в направлении отрицательных значений оси x. Точка начала координат нештрихованной системы в нештрихованной системе характеризуется равенством $x = 0$. Следовательно, отправляясь от штрихованной системы, как неподвижной, приходим вместо (6.1.10) к преобразованию

$$x = \alpha'(x' + \upsilon t), \tag{6.1.11}$$

где α' — коэффициент пропорциональности. Докажем, что согласно принципу относительности $\alpha = \alpha'$.

Пусть некоторый стержень покоится в штрихованной системе координат и имеет в ней длину l. Это означает, что координаты начала и конца стержня различаются в этой системе на величину l:

$$x_2' - x_1' = l. \tag{6.1.12}$$

В нештрихованной системе этот стержень движется со скоростью υ. Длиной его считается расстояние между двумя точками неподвижной системы, с которыми в один и тот же момент времени совпадают начало и конец движущегося стержня. Засечем концы его в момент t_0. На основании формул (6.1.10) получим для координат засечек x'_1 и x'_2 следующие выражения:

$$x_1' = \alpha(x_1 - \upsilon t_0), \quad x_2' = \alpha(x_2 - \upsilon t_0) \tag{6.1.13}$$

Следовательно, длина движущегося стержня в неподвижной нештрихованной системе равна

$$x_2 - x_1 = (x_2' - x_1')/\alpha = \boxtimes/\alpha. \tag{6.1.14}$$

Пусть теперь тот же стержень покоится в нештрихованной системе и имеет в ней длину l. Следовательно, координаты начала и конца стержня различаются в этой системе на величину l, т. е.

$$x_2 - x_1 = \boxtimes. \tag{6.1.15}$$

В штрихованной системе, принятой за неподвижную, этот стержень движется со скоростью $-\upsilon$. Чтобы измерить его длину относительно штрихованной системы, необходимо засечь начало и конец этого стержня в некоторый момент t'_0 этой системы. На основании формулы (6.1.11) имеем:

$$x_1 = \alpha'(x'_1 - \upsilon t'_0), \quad x_2 = \alpha'(x'_2 - \upsilon t'_0). \qquad (6.1.16)$$

Следовательно, длина движущегося стержня в штрихованной системе, принятой за неподвижную, равна

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1)/\alpha' = l/\alpha'. \qquad (6.1.17)$$

Согласно принципу относительности обе системы равноправны и длина одного и того же стержня, движущегося в этих системах с одинаковой скоростью, должна быть одинаковой. Поэтому в формулах (6.1.14) и (6.1.17) должно быть $(l/\alpha) = (l/\alpha')$, т. е. $\alpha = \alpha'$, что и требовалось доказать.

Теперь воспользуемся постулатом постоянства скорости света. Пусть в момент времени, когда начала координат совпадают и когда часы, находящиеся в началах координат, показывают время $t = t' = 0$, из них испускается световой сигнал. Распространение света в штрихованной и нештрихованной системах координат описывается равенствами:

$$x' = ct', \quad x = ct, \tag{6.1.18}$$

в которых учтено, что в обеих системах скорость света имеет одно и то же значение c. Эти равенства характеризуют положение светового сигнала, распространяющегося в направлении осей x, x' в любой момент времени каждой из систем координат. Подставляя (6.1.18) в формулы (6.1.10) и (6.1.11) с учетом того, что $\alpha = \alpha'$, находим:

$$ct' = \alpha t(c - \upsilon), \quad ct = \alpha t'(c + \upsilon). \tag{6.1.19}$$

Умножая левые и правые части этих равенств друг на. друга и сокра щая на $t't$, получаем

$$\alpha = 1/\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}. \tag{6.1.20}$$

Из равенства (6.1.11), используя (6.1.10), имеем

$$\upsilon t' = \frac{x}{\alpha} - x' = \frac{x}{\alpha} - \alpha(x - \upsilon t) = \alpha \upsilon t + x(\frac{1}{\alpha} - \alpha), \qquad (6.1.21)$$

откуда с учетом (6.1.20)

$$t' = \alpha\{t + \frac{x}{\upsilon}(\frac{1}{\alpha^2} - 1)\} = \frac{t - (\upsilon^2 / c^2)x}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}. \qquad (6.1.22)$$

6.1.5.Преобразования Лоренца. Преобразования (6.1.9), (6.1.10) и (6.1.22) связывают между собой координаты систем, движущихся относительно друг друга со скоростью υ. Они называются преобразованиями Лоренца. Выпишем их здесь еще раз:

$$x' = \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \; t' = \frac{t - (\upsilon^2 / c^2)x}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}. \quad (6.1.23)$$

Обратные преобразования согласно принципу относительности имеют такой же вид, но лишь изменяется знак скорости:

$$x = \frac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (\upsilon^2 / c^2) x'}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}. \quad (6.1.24)$$

Переход от (6.1.23) к (6.1.24) можно произвести и без использования принципа относительности. Для этого надо равенства (6.1.23) рассмотреть как систему уравнений относительно нештрихованных величин и решить ее. В результате получаются выражения (6.1.24). Рекомендуем проделать это вычисление в качестве упражнения.

6.1.6.Преобразования Галилея как предельный случай преобразований Лоренца. В предельном случае скоростей, много меньших скорости света, в преобразованиях Лоренца можно пренебречь величинами порядка $(v/c) << 1$ в сравнении с единицей, т. е. все величины v/c в этих преобразованиях положить равными нулю. Тогда они сведутся к преобразованиям Галилея (12.1). При малых скоростях различие между преобразованиями Лоренца и Галилея незначительно и поэтому неточность преобразований Галилея долго оставалась незамеченной.