Лекция 3. Кинематика вращательного движения

3.1. Равномерное вращательное движение.

3.2. Неравномерное вращательное движение.

3.3. Кинематика вращательного движения тела вокруг оси.

3.1. Равномерное вращательное движение

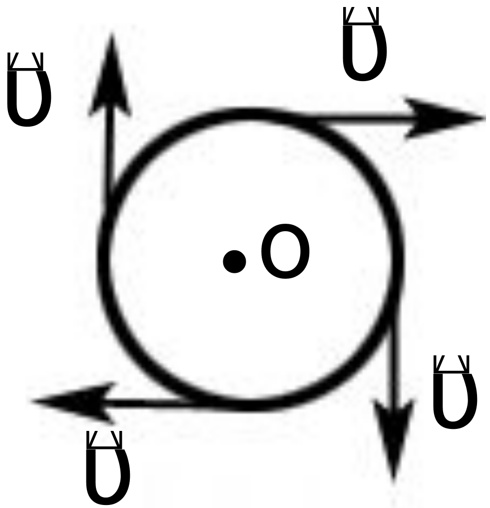

Рис.3.1

При движении тела по окружности с постоянной по величине скоростью υ говорят, что оно совершает ***равномерное вращательное движение.***

Поскольку ускорение определяется как быстрота изменения скорости, изменение направления скорости даёт вклад в ускорение точно так же, как и изменение величины скорости.

Таким образом, тело, совершающее равномерное вращательное движение, ускоряется.

Теперь изучим это ускорение количественно. Ускорение определяется следующим образом:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt},$$

где $\Delta \vec{\upsilon}$ - изменение скорости за малый промежуток времени Δt. Нас интересует в конечном счёте ситуация, когда Δt стремится к нулю, то есть когда мы имеем дело с мгновенным ускорением.

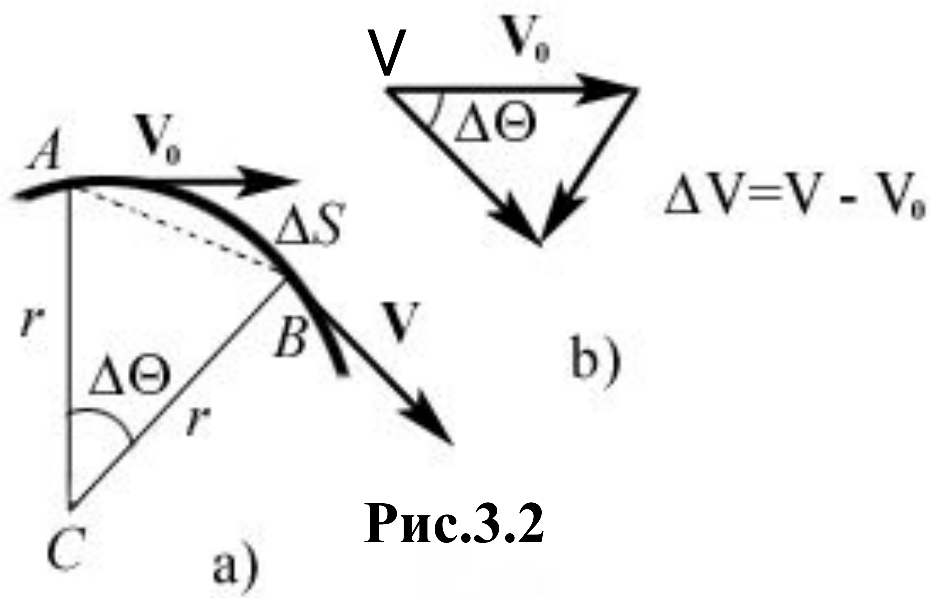

Рис.3.2

За время Δt тело переместится из точки *А* в точку *В*, пройдя небольшое расстояние, Δs которое стягивается малым углом $\Delta\Theta$.

Изменение вектора скорости равно $\Delta\vec{V} = \vec{V} - \vec{V}_0$.

Из этой диаграммы видно, что если Δt мало, то вектор будет почти параллелен вектору $\vec{V}_0$, а $\Delta\vec{V}$ почти перпендикулярен им, то есть вектор $\Delta\vec{V}$ направлен к центру окружности.

Поскольку по определению ускорение $\vec{a}$ совпадает по направлению с $\Delta\vec{V}$, оно тоже направлено к центру окружности.

Поэтому это ускорение и называют центростремительным ускорением. Мы обозначали его в предыдущей лекции как $\vec{a}_n$ и записали без вывода, что

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{r}.$$

На рис. 3.2,*b* векторы $\vec{V}$, $\vec{V}_0$ и $\Delta\vec{V}$ образуют треугольник, который подобен треугольнику *ABC* на рис. 3.2,*a*. Это следует из того факта, что угол между $\vec{V}$ и $\vec{V}_0$ равен ΔΘ (ΔΘ -угол, образуемый прямыми *CA* и *CB*), поскольку *CA* и *CB* $\perp \vec{V}_0$. Таким образом, мы можем записать

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta s}{r}, \text{ или } \Delta V = V(\Delta s/r).$$

Если $\Delta t \to 0$, то последние равенства выполняются точно, поскольку при этом длина дуги ΔS равна длине хорды AB. Чтобы найти величину центростремительного ускорения a_n, воспользуемся последним выражением для ΔV. Таким образом, мы имеем

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V}{r} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

А поскольку $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = V,$ **получаем** $a_n = \frac{V^2}{r}.$

Подведём итоги. Мы получили, что тело, движущееся по окружности радиуса r с постоянной скоростью V, обладает ускорением, направленным к центру окружности, величина которого определена выше.

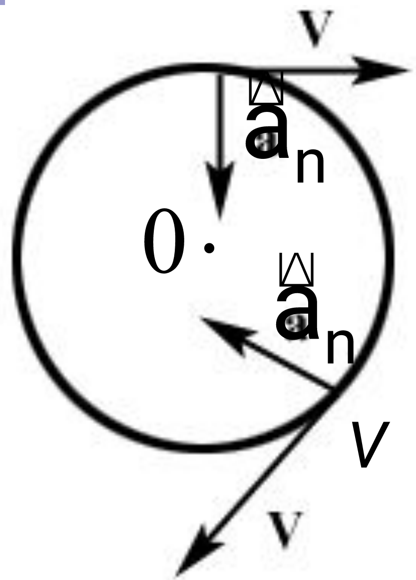

Рис. 3.3

Неудивительно, что это ускорение зависит от V и r. Чем больше скорость V, тем быстрее она меняет своё направление, а чем больше радиус, тем медленнее изменяется направление скорости. Впервые это соотношение было получено во второй половине XVII в. независимо Ньютоном и Гюйгенсом.

Следует заметить, что для описания различных видов движения не существует какого-либо общего соотношения между направлениями $\vec{v}$ и $\vec{a}$. В случае прямолинейного движения (например, когда тела падают по вертикали) $\vec{v}$ и $\vec{a}$ направлены параллельно друг другу. В случае же равномерного вращательного движения они перпендикулярны друг другу (рис.3.3),

поскольку скорость направлена по касательной к окружности, а ускорение направлено к её центру; при этом направления как $\vec{v}$, так и $\vec{a}$ изменяются. В общем случае баллистического движения (имеющего как вертикальную, так и горизонтальную составляющую) $\vec{a}$ постоянно и по величине и по направлению (направлено вниз, а величина его равна ускорению свободного падения *g*) и образует со скоростью различные углы по мере прохождения баллистической траектории.

При рассмотрении свободного падения и баллистического движения, поскольку в этих случаях $\vec{a}$ постоянно как по величине так и по направлению, можно пользоваться кинематическими уравнениями для случая движения с постоянным ускорением. Однако в случае равномерного вращательного движения их применять нельзя, поскольку направление ускорения изменяется.

Содержание

3.2. Неравномерное вращательное движение

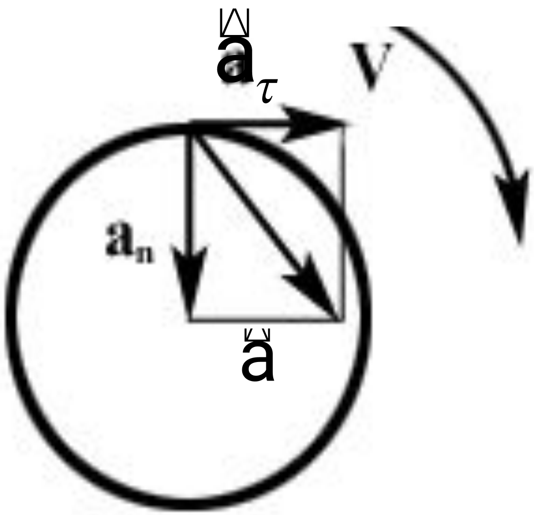

Рис.3.4

Если скорость частицы, вращающейся по окружности, изменяется по величине, то наряду с центростремительным $\vec{a}_n$ ускорением будет иметь место и тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$, которое возникает из-за изменения величины вектора скорости. Тангенциальное ускорение всегда направлено по касательной к окружности, и, если скорость увеличивается, то его направление совпадает с направлением движения (параллельно $\vec{V}$, как показано на рис. 3.4. для тела, движущегося по часовой стрелке).

В любом случае $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ всегда перпендикулярны друг другу, а их направления непрерывно меняются по мере движения тела по круговой траектории. Вектор полного ускорения является суммой этих двух ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \quad .$$

Поскольку $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ всегда перпендикулярны друг другу, величина ускорения в любой момент времени равна

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

Содержание

3.3. Кинематика вращательного движения тела вокруг оси

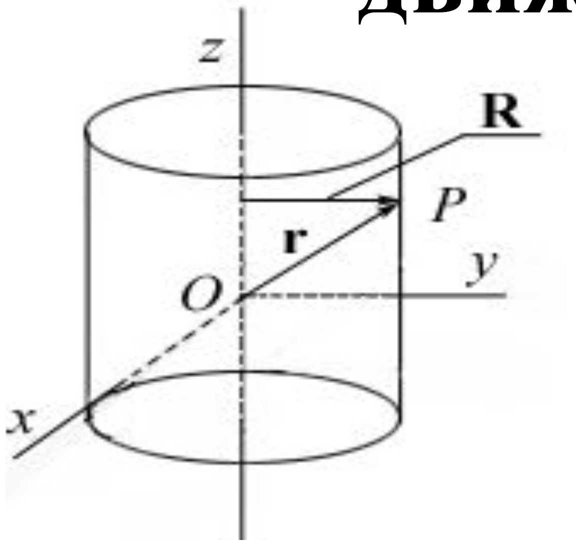

Рис.3.5.

Рассмотрим твёрдое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси. Пусть некоторая точка движется по окружности радиуса *R* (рис.3.5).

R - ***расстояние по перпендикуляру от оси вращения до рассматриваемой точки или частицы.***

Мы ввели это новое обозначение, чтобы отличить *R* от *r* , поскольку через *r* будем по прежнему обозначать величину радиуса-вектора частицы относительно начала некоторой системы координат. Разница между этими величинами показана на рис. 3.5. Для тонкого диска, например, *R* и *r*, совпадают.

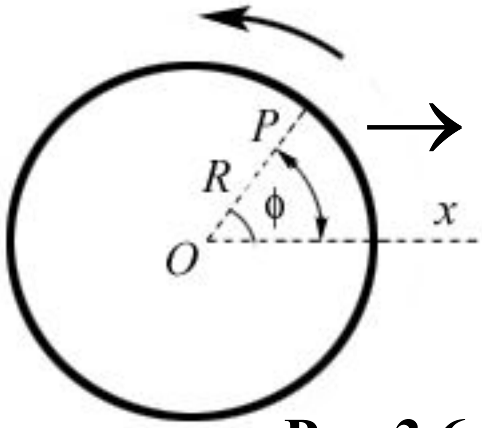

Рис.3.6.

Каждая частица тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, движется по окружности радиуса *R*, центр которой лежит на оси вращения. Линия, проведённая перпендикулярно оси вращения к любой точке тела, за одинаковые промежутки времени поворачивается на один и тот же угол *φ*. Чтобы определить положение тела или угол, на который оно повернётся, угол *φ* будем отсчитывать от некоторой опорной линии, например от оси *x* (рис.3.6). Частица, принадлежащая телу (например, *P* на рис.3.5) перемещается на угол *φ* и проходит расстояние *S*, измеряемое вдоль её траектории, которая представляет собой окружность.

Углы принято измерять в градусах, но математические выражения, описывающие вращательное движение, выглядят проще, если измерять углы в радианах. ***Один радиан (рад) определяется как угол, стягиваемый дугой, длина которой равна радиусу.*** **Например, если *R* = *S*, то φ точно равно одному радиану. В общем случае любой угол (в радианах) определяется выражением**

$$\varphi = \frac{S}{R},$$

где *R* – радиус окружности, а *S* – длина дуги, стягиваемой углом *φ*.

3.3.1. Угловая скорость

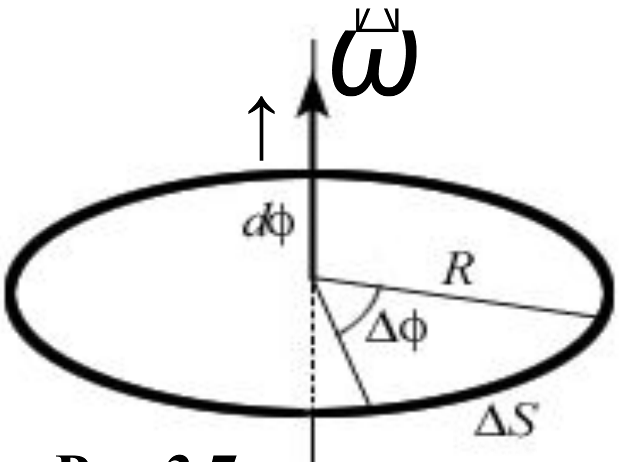

Рис.3.7.

Пусть некоторая точка движется по окружности радиуса *R* (рис.3.7). Её положение через промежуток времени *t* зададим углом *d*φ. Элементарные (бесконечно малые) углы поворота рассматривают как векторы. Модуль вектора равен углу поворота, а его направление совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, то есть подчиняется правилу правого винта (рис.3.7). **Векторы, направления которых связываются с направлением вращения, называются *псевдовекторами* или *аксиальными векторами.***

Эти векторы не имеют определённых точек приложения: они могут откладываться из любой точки оси вращения.

Угловой скоростью называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта, то есть так же, как и вектор $d\varphi$ (рис.3.7). Размерность угловой скорости dim=T^{-1}, а ее единица – радиан в секунду (рад/с).

Линейная скорость точки (рис.3.8):

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega,$$

т.е. $V=\omega R$

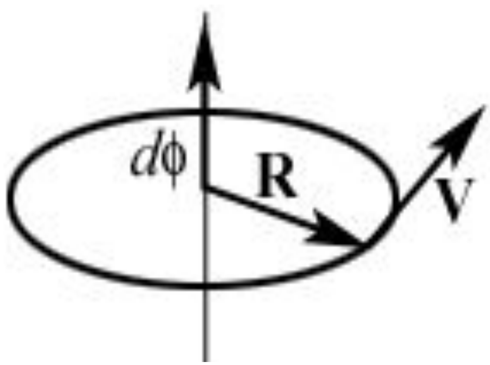

Рис.3.8.

В векторной форме формулу для линейной скорости можно написать как векторное произведение:

$$\vec{V} = [\vec{\omega}\vec{R}]$$

При этом модуль векторного произведения, по определению, равен $\omega R\sin(\omega \hat{} R)$, а направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{\omega}$ к $\vec{R}$.

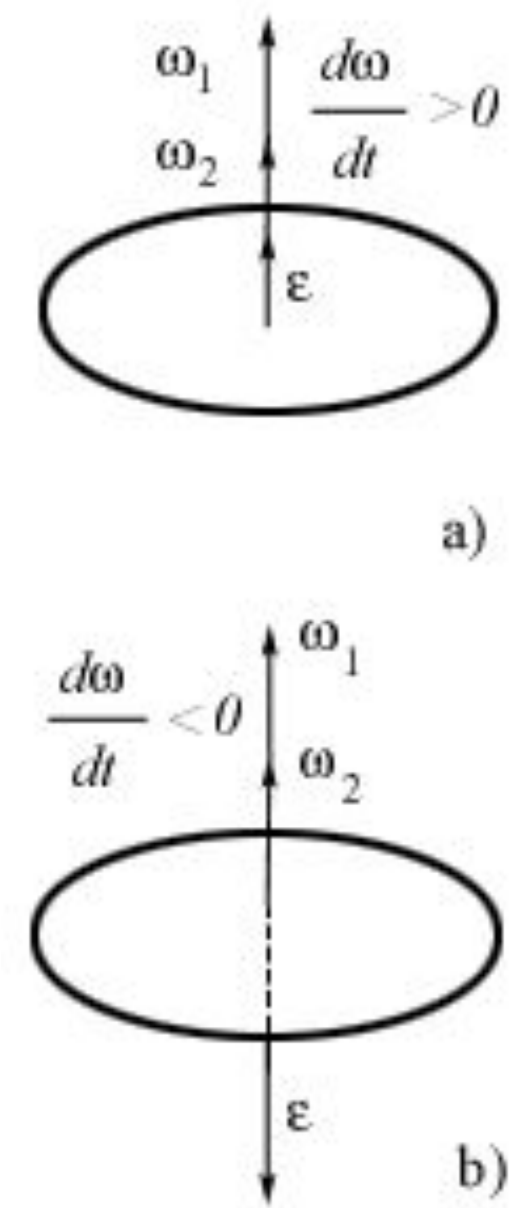

Рис.3.9.

Если $\omega = const$, то вращение равномерное и его можно характеризовать ***периодом вращения T – временем, за которое точка совершает один полный оборот, то есть поворачивается на угол*** **2π. Так как промежутку $\Delta t = T$ времени соответствует $\Delta\varphi = 2\pi$, то $\omega = 2\pi/T$, откуда** $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности, в единицу времени называется **частотой вращения:**

$$n = \frac{1}{T} = \omega / 2\pi$$

Откуда $\omega = 2\pi n$.

Угловым ускорением называется векторная величина, равная первой производной угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону элементарного приращения угловой скорости. При ускоренном движении вектор сонаправлен вектору (рис. 3.9, *a*), при замедленном – противоположно направлен (рис. 3.9, *b*).

Тангенциальная составляющая ускорения **:**

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}, \qquad \upsilon = \omega R, \qquad a_\tau = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon$$

Нормальная составляющая ускорения **:**

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

Таким образом, связь между линейными (длина пути *S*, пройденного точкой по дуге окружности радиуса *R*, линейная скорость $\vec{v}$, тангенциальное $\vec{a}_\tau$ и нормальное $\vec{a}_n$ ускорение) и угловыми величинами (угол поворота φ, угловая скорость *ω*, угловое ускорение *ε*) выражается следующими формулами:

$S=R\varphi$	$\upsilon=R\omega$	$a_\tau=R\varepsilon$	$a_n=\omega^2 R$

В случае равнопеременного движения точки по окружности *(ε=const)*: $\omega=\omega_0\pm\varepsilon t$, $\varphi=\omega_0 t\pm\varepsilon t^2/2$,

где ω_0 – начальная угловая скорость.

Лекция окончена!