ЗДРАВСТВУЙТЕ !

Лекция 5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

5.1. Основная задача механики.

5.2. Замкнутая система тел.

5.3. Закон сохранения импульса.

5.4. Центр инерции и законы его движения.

5.1. Основная задача механики

Основная задача механики:

определить закон движения материальной точки, если известны действующие на нее силы.

Для ее решения в начале с помощью основного закона динамики (II закон Ньютона) находим ускорение, с которым движется материальная точка. Затем с помощью известных формул кинематики ищем выражения для скоростей и координат.

Содержание

5.2. ЗАМКНУТАЯ СИСТЕМА ТЕЛ

Не все окружающие тела действуют на данное тело с одинаковыми силами. Так, если спутник Земли движется вокруг Земли по орбите с радиусом $r \approx 8000$ *км*, то Солнце действует на него с силой, которая значительно меньше притяжения Земли:

$$\frac{F_З}{F_С} = \frac{\gamma \cdot m \cdot M_З \cdot R^2}{r^2 \cdot \gamma \cdot M_С \cdot m} = \frac{M_З \cdot R^2}{M_С \cdot r^2} \approx 10^3$$

где $R = 1{,}49598 \cdot 10^{11}$ м, $M_З = 6 \cdot 10^{24}$ кг, $M_С = 2 \cdot 10^{30}$ кг.

Этот расчет показывает, что мы можем в первом приближении отвлечься от действия на спутник всех сил, кроме силы тяготения Земли. Следовательно, можно рассмотреть **системуа, состоящую из двух тел – спутника и Земли,** и считать, что их взаимодействие в основном определяет характер движения спутника. Все остальные тела можно считать **внешними** по отношению к этой системе и действие этих тел учесть в виде поправок к основной силе.

Принято силы, с которыми взаимодействуют между собой составные части системы, называть внутренними силами.

Внешними, называются силы, с которыми вся система или отдельные тела, входящие в ее состав, взаимодействуют с окружающими телами.

Система тел называется замкнутой (или изолированной), если можно пренебречь действием внешних сил по сравнению с внутренними.

Так, в рассмотренном примере систему тел Земля-спутник можно в первом приближении рассматривать как замкнутую.

С еще большей степенью можно считать замкнутой солнечную систему. Действительно, силы взаимодействия между Солнцем и планетами значительно превосходят силы, с которыми на эти планеты действуют даже самые близкие звезды.

Ближайшая к Солнечной системе звезда расположена на колоссальном расстоянии $R_{зв}$ = 4,5 *св. года* = $4{,}2 \cdot 10^{13}$ км; расстояние же от Земли до Солнца $r = 1{,}5 \cdot 10^{8}$ км. Полагая, что масса звезды примерно равна массе Солнца, получим:

$$\frac{F_C}{F_{ЗВ}} = \frac{\gamma \cdot m \cdot M \cdot R^2}{r^2 \cdot \gamma \cdot m \cdot M} = \frac{R^2}{r^2} = \left(\frac{4{,}2 \cdot 10^{13}}{1{,}5 \cdot 10^{8}}\right)^2 \approx 8 \cdot 10^{10}$$

Понятие замкнутой системы является весьма полезной абстракцией, ибо в таких системах все явления описываются с помощью наиболее простых и общих законов.

Поэтому ***всюду, где это возможно, следует отвлечься от действия внешних сил и рассматривать изучаемую систему тел как замкнутую.***

Затем, если это необходимо, следует в решение, полученное в первом приближении, внести поправки, учитывающие характер возмущений, вносимых действием внешних сил.

Содержание

5.3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Закон сохранения импульса: Суммарный импульс замкнутой системы тел сохраняется при любых процессах, происходящих в этой системе.

Не следует думать, что этот закон требует неизменности импульса каждого тела, входящего в систему. Как раз, наоборот, – благодаря действию внутренних сил импульсы тел, входящих в систему, все время меняются.

Сохраняется лишь векторная сумма импульсов всех составных частей системы.

Пусть в момент времени t' первое тело имеет массу m'_1 и скорость $\vec{\upsilon}'_1$, а второе – массу m'_2 и скорость $\vec{\upsilon}'_2$; в момент времени t'' – соответственно m''_1 и $\vec{\upsilon}''_1$, m''_2 и $\vec{\upsilon}''_2$.

II закон Ньютона:

Для 1-ого тела

$$\vec{F}_{12} = \frac{m''_1 \cdot \vec{\upsilon}''_1 - m'_1 \cdot \vec{\upsilon}'_1}{t'' - t'},$$

Для 2-ого тела

$$\vec{F}_{21} = \frac{m''_2 \cdot \vec{\upsilon}''_2 - m'_2 \cdot \vec{\upsilon}'_2}{t'' - t'}.$$

III закон Ньютона $F_{12} = - F_{21}$

$$\frac{m''_2 \cdot \vec{\upsilon}''_2 - m'_2 \cdot \vec{\upsilon}'_2}{t'' - t'} = -\frac{m''_1 \cdot \vec{\upsilon}''_1 - m'_1 \cdot \vec{\upsilon}'_1}{t'' - t'}.$$

$$m''_2 \cdot \vec{\upsilon}''_2 + m''_1 \cdot \vec{\upsilon}''_1 = m'_2 \cdot \vec{\upsilon}'_2 + m'_1 \cdot \vec{\upsilon}'_1 \qquad (5.1)$$

Или

$$m_2\upsilon_2 + m_1\upsilon_1 = \mathrm{const} \qquad (5.2)$$

$$m_N\upsilon_N + \ldots + m_1\upsilon_1 = \mathrm{const} \qquad (5.3)$$

При выводе закона сохранения импульса мы пользовались только законами Ньютона, причем в форме, которая справедлива как в релятивистской механике, так и в ньютоновской механике. Следовательно, закон сохранения импульса применим как в ньютоновской, так и в релятивистской механике, но в последней следует учитывать зависимость массы от скорости.

Сумма в левой части (5.3) представляет собой суммарный импульс системы, следовательно:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{\upsilon}_i = \vec{P} = const$$ **и тогда** $$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

Содержание

Это и есть закон сохранения импульса в дифференциальной форме:

Векторная сумма количества движения или полный импульс замкнутой системы остается постоянным при любых взаимодействиях между телами этой системы.

Этот закон является фундаментальным и выполняется при любых движениях, в том числе и релятивистских.

Из закона сохранения импульса вытекает два важных следствия: закон движения центра инерции и закон аддитивности массы.

5.4. ЦЕНТР ИНЕРЦИИ И ЗАКОНЫ ЕГО ДВИЖЕНИЯ

Пусть две материальные точки (частицы) с массами m_1 и m_2 расположены на оси абсцисс в точках с координатами X_1 и X_2. Расстояние между этими точками $L = X_2 - X_1$ (рис. 5.1). Точку C, которая делит расстояние между частицами на отрезки, обратно пропорциональные массам этих частиц, назовем центром инерции (или центром масс) данной системы частиц.

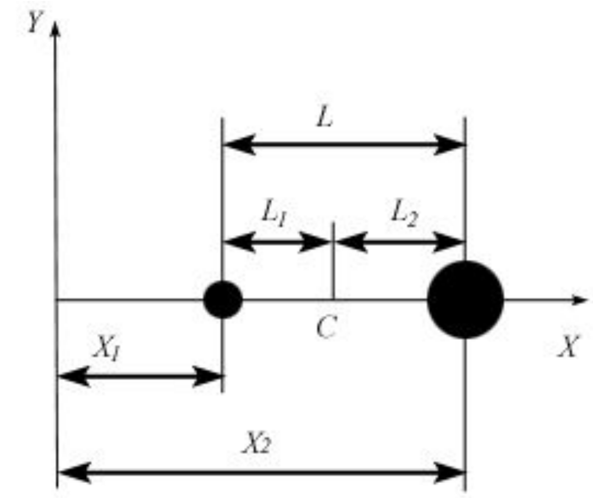

Рис. 5.1.

Итак, по определению $\frac{L_1}{L_2} = \frac{m_2}{m_1}$. (5.4)

Поскольку $L_1 = X_ц - X_1$, $L_2 = X_2 - X_ц$, где $X_ц$ - координата центра инерции, то,

$$m_1 \cdot (x_ц - x_1) = m_2 (x_2 - x_ц) \quad (5.5)$$

откуда $$X_ц = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}$$

Для N-материальных точек, расположенных произвольным образом, абсцисса центра инерции:

$$X_ц = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \ldots + m_n \cdot x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \quad (5.6)$$

Аналогичные выражения получаются для ординаты $Y_ц$ и аппликаты $Z_ц$ центра инерции системы материальных точек. Определив абсциссу, ординату и аппликату, мы тем самым определим радиус-вектор центра инерции.

$$\vec{R} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i\right) / \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad (5.7)$$

где $\vec{r}_i$ и m_i – радиус-вектор и масса тел (частиц), входящих в систему.

Центром инерции (центром масс) *системы частиц с радиус-векторами* $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_n$

называют точку с радиус-вектором

$$\vec{R} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{\upsilon}_i\right) / \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Тогда движение центра инерции для системы частиц (в том числе для тела любой формы конечных размеров) можно описать следующим образом

$$\vec{\upsilon}_ц = d\vec{R}/dt = d\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i / \sum_{i=1}^{n} m_i\right)/dt = \sum m_i (d\vec{r}_i/dt)/\sum m_i =$$

$$= \sum m_i \cdot \vec{\upsilon}_i / \sum m_i = \sum \vec{P}_i / \sum m_i = \frac{\vec{P}}{M}$$

где *M* – суммарная масса системы,

$\vec{P}$ **- суммарный импульс.**

Если сумма внешних сил не равна нулю, то движение центра инерции можно рассматривать как движение материи, в которой сосредоточена вся масса системы и координаты совпадают с центром масс. Уравнением ее движения является

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\left(\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right) = \sum \vec{F}_{внешн} = \vec{F}$$

Коэффициент пропорциональности между импульсом системы и скоростью центра инерции (*M*) равен сумме масс составляющих частиц. В этом выражается закон аддитивности масс. Аддитивностью, вообще, называют свойство, состоящее в том, что величина, характеризующая систему в целом, складывается алгебраически из величин того же рода, характеризующих каждую часть системы.

Задачу о характере движения центра инерции, решаем для случая, когда тела движутся со скоростями, много меньшими скорости света, когда массы являются постоянными величинами.

Записав выражение (5.6) для двух моментов времени и вычитая одно из другого, получим

$$\Delta X_{ц} = \frac{m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 \ldots + m_n \cdot \Delta x_n}{m_1 + m_2 \ldots + m_n} \qquad \textbf{(5.8)}$$

Разделив обе части равенства (5.8) на $\Delta t = t_2 - t_1$ и положив $\frac{\Delta X_{ц}}{\Delta t} = \upsilon_{ц}^{(x)}$ (компонента вектора скорости по оси абсцисс), имеем

$$\upsilon_{ц}^{(x)} = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1^{(x)} + m_2 \cdot \upsilon_2^{(x)} + \ldots + m_n \cdot \upsilon_n^{(x)}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \qquad \textbf{(5.9)}$$

$$\vec{\upsilon}_{ц} = \frac{m_1 \cdot \vec{\upsilon}_1 + m_2 \cdot \vec{\upsilon}_2 + \ldots + m_n \cdot \vec{\upsilon}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\vec{P}}{M} \qquad (5.10)$$

где M – суммарная масса системы, $\vec{P}$ - ее суммарный импульс.

Поскольку в теории относительности масса тела зависит от скорости, то из формулы (5.6) не вытекает формула (5.9). В связи с этим в теории относительности выражения (5.9) и (5.10) не выводятся, а используются в качестве определяющих уравнений: *центром инерции системы называется точка, скорость которой равна отношению суммарного импульса системы к ее суммарной массе.* Что же касается формулы (5.6), то ею в теории относительности не пользуются.

Следовательно, если система частиц замкнута, то ее суммарный импульс является постоянной величиной.

Иными словами, *центр инерции замкнутой системы совершает инерциальное движение, т.е. движется прямолинейно и равномерно независимо от того, как движутся отдельные тела, из которых составлена система.*

Следует обратить внимание на смысл этого утверждения. В замкнутой системе тел действуют внутренние силы, вследствие чего тела, входящие в состав системы, могут двигаться ускоренно и их скорости (и импульсы) могут непрерывно меняться. Однако это не сказывается на движении центра инерции. Итак, *под действием внутренних сил скорость движения центра инерции не меняется.*

Лекция окончена!