



ЗДРАВСТВУЙТЕ!

Сегодня: *

Лекция 15

Тема: **Закон Био-Савара - Лапласа**

Содержание лекции:

15.1. Магнитные взаимодействия. Магнитное поле;

15.2. Закон Био - Савара – Лапласа:

15.2.1. Расчет магнитного поля прямолинейного проводника с током;

15.2.2. Расчет магнитного поля кругового тока;

15.3. Магнитное поле движущегося заряда;

15.4. Напряженность магнитного поля;

15.7. Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции.

15.1. Магнитные взаимодействия

Магнитные свойства постоянных магнитов, их способность притягивать железные предметы были известны еще древним грекам. Земля также является магнитом, и явления земного магнетизма были использованы древними китайцами для создания компаса, т. е. свободно вращающейся магнитной стрелки, указывающей ориентацию сторон света. Китайские мореплаватели использовали компас в 11 веке, в Европе подобные устройства появились лишь в 12 веке. Предполагается, что приборы наподобие компаса использовались китайцами 3000 лет тому назад.

В пространстве, окружающем намагниченные тела, возникает магнитное поле. Помещенная в это поле маленькая магнитная стрелка устанавливается в каждой его точке вполне

определенным образом, указывая тем самым направление поля. Тот конец стрелки, который в магнитном поле Земли указывает на север, называется *северным*, а противоположный – *южным*.

Хорошо известно, что, если поднести два магнита друг к другу, между ними действует сила. Магниты либо притягивают друг друга, либо отталкивают; их взаимодействие ощущается даже тогда, когда магниты не соприкасаются. Если к северному полюсу одного магнита поднести северный полюс другого, магниты будут отталкиваться; то же самое будет, если поднести магниты друг к другу южными полюсами. Но если к северному полюсу одного магнита поднести южный полюс другого, возникает притяжение. Это напоминает взаимодействие электрических зарядов: одноименные полюса отталкиваются, а разноименные притягиваются. Но не следует смешивать полюса магнитов и электрические заряды: это совсем разные вещи.

Вернемся к примеру с магнитной стрелкой, помещенной в магнитное поле. При отклонении стрелки от направления магнитного поля на стрелку действует механический крутящий момент $M_{кр}$ пропорциональный синусу угла отклонения α и стремящийся повернуть ее вдоль указанного направления. Как мы видим, взаимодействие постоянных магнитов сходно с взаимодействием электрических диполей, испытывающих в однородном электрическом поле *результатирующий момент сил, но не силу!!!* Подобно электрическому диполю, постоянный магнит в однородном поле стремится повернуться по полю, но не перемещаться в нем. Опять обнаруживается сходство между электрическими зарядами и магнитными полюсами!

Существенное отличие постоянных магнитов от электрических диполей заключается в следующем. Электрический диполь всегда состоит из зарядов, равных по величине и противоположных по знаку.

Эти заряды можно отделить друг от друга и расположить на отдельных телах, например, разрезав диполь пополам по плоскости, перпендикулярной оси диполя. Постоянный же магнит, будучи разрезан таким образом пополам, превращается в два меньших магнита, каждый из которых имеет и северный и южный полюса. Никакое деление не дает возможности получить отдельно источники северного и южного магнетизма — *магнитные заряды*. Причина состоит в том, что «магнитных зарядов» (или как иногда говорят, «магнитных масс») в природе не существует!!!

Подводя итоги сведениям о магнетизме, накопленным к 1600г., английский ученый, физик Уильям Гильберт в шеститомном труде «О магните», высказал мнение, что, несмотря на некоторое внешнее сходство, природа электрических и магнитных явлений различна. Действительно, кроме вышеуказанного отличия, опыт показывает, что, если расположить вблизи магнитной стрелки компаса легкий заряженный шарик, то мы не обнаружим никакого действия со стороны заряда шарика на магнитную стрелку. В свою очередь магнитное поле стрелки никак не действует на заряженный шарик. Все же к середине XVIII века окрепло убеждение о наличии тесной связи между *электрическими и магнитными явлениями*. Однако природа этой тесной связи тогда установлена быть не могла из-за отсутствия достаточно мощных источников тока.

В 1820 году Эрстед открыл явление отклонения магнитной стрелки гальваническим током и тем самым сделал первый существенный шаг в выяснении характера связи электрических и магнитных явлений. Затем Гей-Люссак и Араго наблюдали намагничивание железа постоянным током, идущим в проводнике. Ампер обнаружил притяжение между проводниками, по которым проходят параллельные токи, и отталкивание между противоположно направленными токами. Им же была выдвинута гипотеза о том, что свойства постоянных магнитов обусловлены циркулирующими в их толще постоянными круговыми токами (молекулярными токами).

Но вернемся к открытию Эрстеда. Эрстед помещал магнитную стрелку в непосредственной близости от проводника с током и обнаружил, что при протекании по проводнику тока, стрелка отклоняется; после выключения тока стрелка возвращается в исходное положение.

Из описанного опыта Эрстед делает вывод: вокруг прямолинейного проводника с током есть магнитное поле. Он обратил внимание также на то, что при изменении направления тока в проводнике северный конец стрелки поворачивается в другую сторону.

В дальнейшем исследовалось действие на магнитную стрелку проводников с током самой различной формы. Был сделан общий вывод: *вокруг всякого проводника с током есть магнитное поле.*

Но ведь ток — это направленное движение зарядов. Возможно, вокруг всякого движущегося заряда существует магнитное поле? Опыты подтверждают: *да, магнитное поле появляется вокруг электронных пучков и вокруг перемещающихся в пространстве заряженных тел.*

Итак, вокруг всякого движущегося заряда помимо электрического поля существует еще и магнитное.

Таким образом, *магнитное поле – это поле движущихся зарядов.* Известно, что обнаруживает себя оно по действию на магнитные стрелки или на проводники с токами, т.е. на движущиеся заряды. Дальше мы увидим, что подобно электрическому полю, оно обладает энергией и, следовательно, массой. Магнитное поле материально. Теперь можно дать следующее определение магнитного поля: *Магнитное поле – это материя, связанная с движущимися зарядами, и обнаруживающая себя по действию на магнитные стрелки и/или движущиеся заряды, помещенные в это поле.*

Эрстед изложил результаты своих опытов в письме к Амперу. Ампер, получив письмо от Эрстеда, тут же повторил, описанные им опыты и продолжил их. Он взял катушку с током и ненамагниченный металлический стержень и обнаружил воздействие магнитного поля катушки на стержень.

В этом опыте непосредственно была обнаружена связь электрического и естественного магнетизма. Кроме того, Ампер изучил действие магнитного поля на проводники с током. Подобно тому, как для исследования электрического поля используется пробный точечный заряд, для исследования магнитного поля используется точечное магнитное поле, созданное пробным током, циркулирующим в плоском замкнутом контуре очень малых размеров.

Возьмем такой контур с током I и поместим его в магнитное поле. Основное свойство магнитного поля – способность действовать на движущиеся электрические заряды с определенной силой. В магнитном поле контур с током будет

ориентироваться определенным образом. Ориентацию контура в пространстве будем характеризовать направлением нормали \vec{n} , связанной с движением тока правилом правого винта или правилом буравчика (рис. 15.1).

И так, на контур с током в магнитном поле действует вращающий момент. Контур ориентируется в данной точке поля только одним способом. Примем

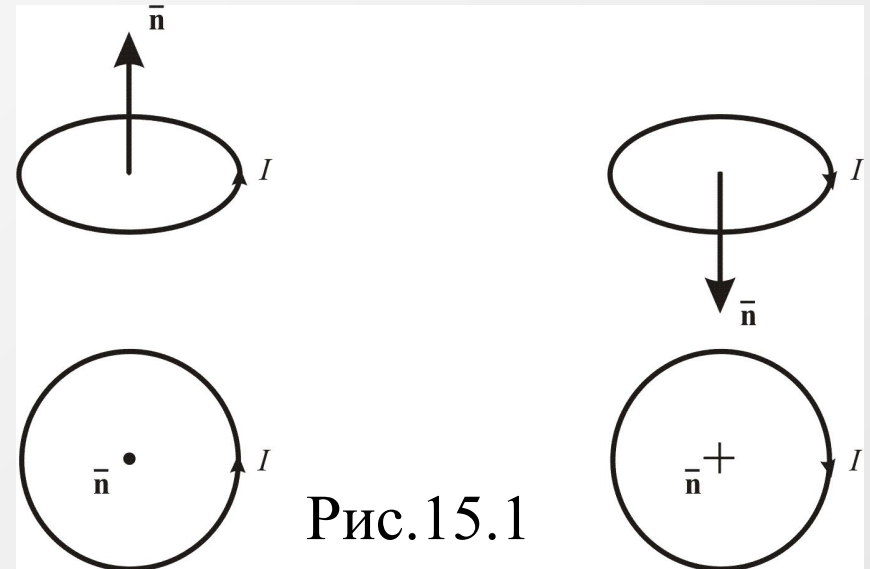


Рис.15.1

положительное направление нормали \vec{n} за направление магнитного поля \vec{B} в данной точке. Вращающий момент прямо пропорционален величине тока I , площади контура S и синуса угла между направлением магнитного поля и нормали \vec{n} .

$$M \sim IS \sin(\vec{B}, \vec{n}) \quad (15.1.1)$$

здесь M – вращающий момент или момент силы, $IS = p_m$ – магнитный момент контура (аналогично $ql = p$ – электрический момент диполя, l – плечо диполя).

$$\vec{p}_m = p_m \vec{n} \quad (15.1.2)$$

Направление вектора магнитного момента совпадает с положительным направлением нормали.

Отношение момента силы к магнитному моменту M для данной точки магнитного поля будет одним и тем же и может служить характеристикой магнитного поля, названной магнитной индукцией:

$$B = \frac{M}{p_m \sin(\vec{B}, \vec{n})} \quad \text{или} \quad B = \frac{M_{\text{макс}}}{p_m} \quad (15.1.3)$$

\vec{B} – вектор магнитной индукции совпадает с нормалью. По аналогии с электрическим полем

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (15.1.4)$$

Магнитная индукция характеризует силовое действие магнитного поля на ток, аналогично \vec{E} характеризует силовое действие электрического поля на заряд, т.е. \vec{B} как и \vec{E} , – силовая характеристика магнитного поля. \vec{B} можно изобразить, как и \vec{E} с помощью магнитных силовых линий.

M – момент силы и p_m – магнитный момент – характеристики вращательного движения, т.е. **магнитное поле – вихревое**.

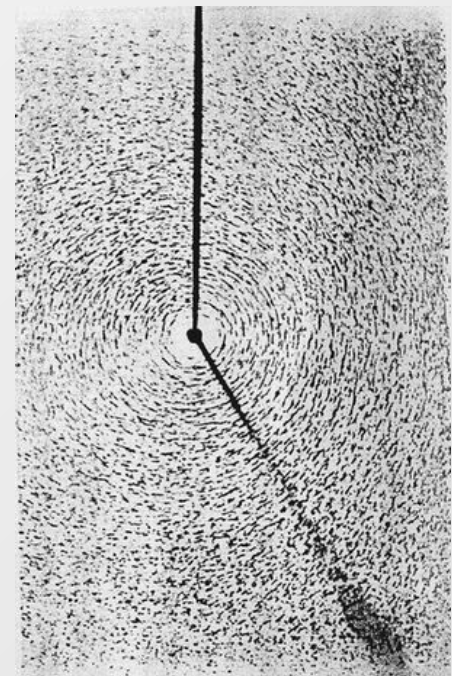
Условились, за направление – принимать направление северного конца магнитной стрелки. Силовые линии выходят из северного полюса, а входят соответственно в южный полюс магнита.

Для графического изображения полей удобно пользоваться силовыми линиями (*линиями магнитной индукции*).

Линиями магнитной индукции называются кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора в этой точке.

Конфигурацию силовых линий легко установить с помощью мелких железных опилок, которые намагничиваются в исследуемом магнитном поле и ведут себя подобно маленьким магнитным стрелкам (*поворачиваются вдоль силовых линий*).

Так было установлено, что силовые линии магнитного поля прямолинейного проводника с током — это концентрические окружности с центрами на проводнике, лежащие в плоскости, перпендикулярной проводнику. Магнитные силовые линии всегда замкнуты (вихревое поле).



15.2. Закон Био-Савара-Лапласа

В 1820г. французские физики Жан Батист Био и Феликс Савар, провели исследования магнитных полей токов различной формы. Астроном, физик, математик Пьер Лаплас проанализировал и обобщил данные этих исследований и понял, что *магнитное поле любого тока может быть вычислено как векторная сумма (суперпозиция) полей, создаваемых отдельными элементарными участками тока:*

$$\vec{\mathbf{B}} = \sum \vec{\mathbf{B}}_i \quad (15.2.1)$$

А элемент тока длины $d\mathbf{l}$ (рис. 10.2), создает поле с магнитной индукцией,

$$d\vec{\mathbf{B}} = k \frac{I [d\mathbf{l}, \vec{\mathbf{r}}]}{r^3} \quad (15.2.2)$$

Это

и есть закон

Био-Савара-Лапласа, полученный экспериментально.

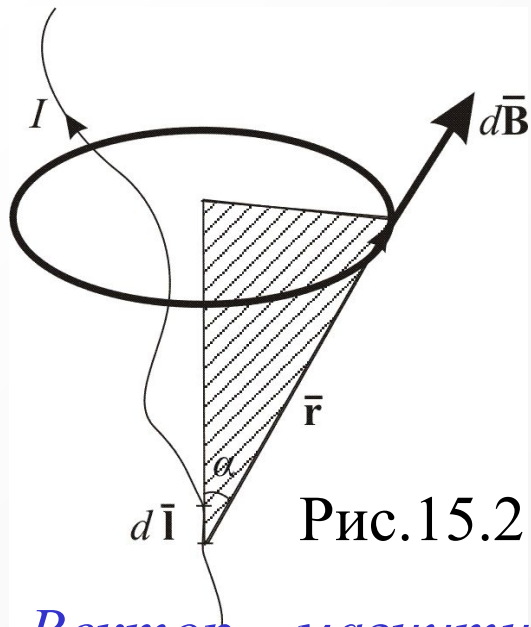


Рис.15.2

Здесь: I – ток, $d\vec{l}$ – вектор совпадающий с элементарным участком тока и направленный в ту сторону, куда течет ток, \vec{r} – радиус вектор, проведенный от элемента тока в точку, в которой мы определяем $d\vec{B}$; r – модуль радиуса вектора, k – коэффициент пропорциональности.

Вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через $d\vec{l}$ и точку, в которой вычисляется поле. Направление $d\vec{B}$ связано с направлением $d\vec{l}$ правилом правого винта (буравчика): направление вращения головки винта дает направление $d\vec{B}$, поступательное движение винта соответствует направлению тока в элементе.

Таким образом закон Био-Савара-Лапласа устанавливает величину и направление вектора $d\vec{B}$ в произвольной точке магнитного поля, созданного проводником $d\vec{l}$ и током I .

Модуль вектора $d\vec{B}$ определяется соотношением:

$$dB = k \frac{I \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2}, \quad (15.2.3)$$

где α – угол между $d\vec{l}$ и \vec{r} .

В системе СИ, в вакууме закон Био-Савара-Лапласа можно записать так

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2} \quad (15.2.4)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. **Единица магнитной индукции в СИ называется тесла [Тл].**

Справедливость закона Био-Савара-Лапласа была подтверждена и для других форм движения заряда: в 1903г. – А. А. Эйхенвальд установил появление магнитного поля при движении наэлектризованных тел; (например, пластин плоского конденсатора; в 1911 – А. Ф. Иоффе – исследовал магнитное поле пучка ускоренных электронов.

10.2.1. Магнитное поле прямого тока.

Применим закон Био-Савара-Лапласа для расчета магнитных полей простейших токов. Рассмотрим магнитное поле прямого тока (рис. 15.3).

Все векторы $d\vec{B}$ от произвольных элементарных участков $d\vec{l}$ имеют одинаковое направление.

Поэтому сложение векторов можно заменить сложением модулей. Точка в которой определяется магнитное поле находится на расстоянии b от провода. Из рисунка 15.3 получим:

$$r = \frac{b}{\sin\alpha}; \quad dl = \frac{r \cdot d\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b \cdot d\alpha}{\sin^2\alpha}$$

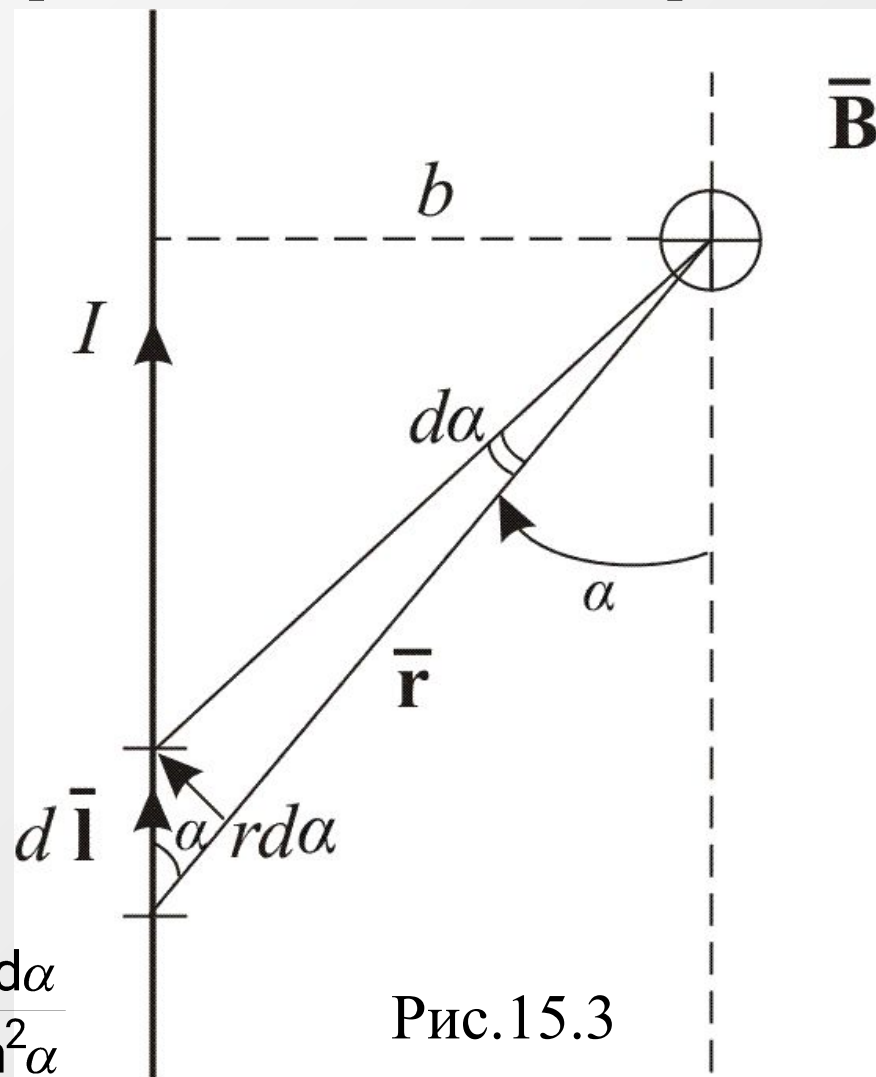


Рис.15.3

Подставив полученные значения r и dl в закон Био-Савара-Лапласа.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I b d\alpha \sin\alpha \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha \cdot b^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \sin\alpha d\alpha \quad (15.2.5)$$

Для конечного проводника угол α изменяется от α_1 , до α_2 . Тогда для конечного проводника:

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) \quad (15.2.6)$$

Для бесконечно длинного проводника $\alpha_1 = 0$, а $\alpha_2 = \pi$ и следовательно:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \quad \text{или} \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b} \quad (15.2.7)$$

Линии магнитной индукции прямого тока представляют собой систему концентрических окружностей охватывающих ток (рис. 15.4)

15.2.2. Магнитное поле кругового тока

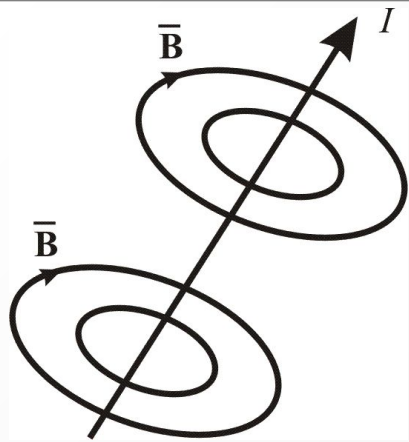


Рис.15.4

поле, создаваемое током, текущим по тонкому проводу, имеющему форму окружности радиуса R (рис. 15.5).

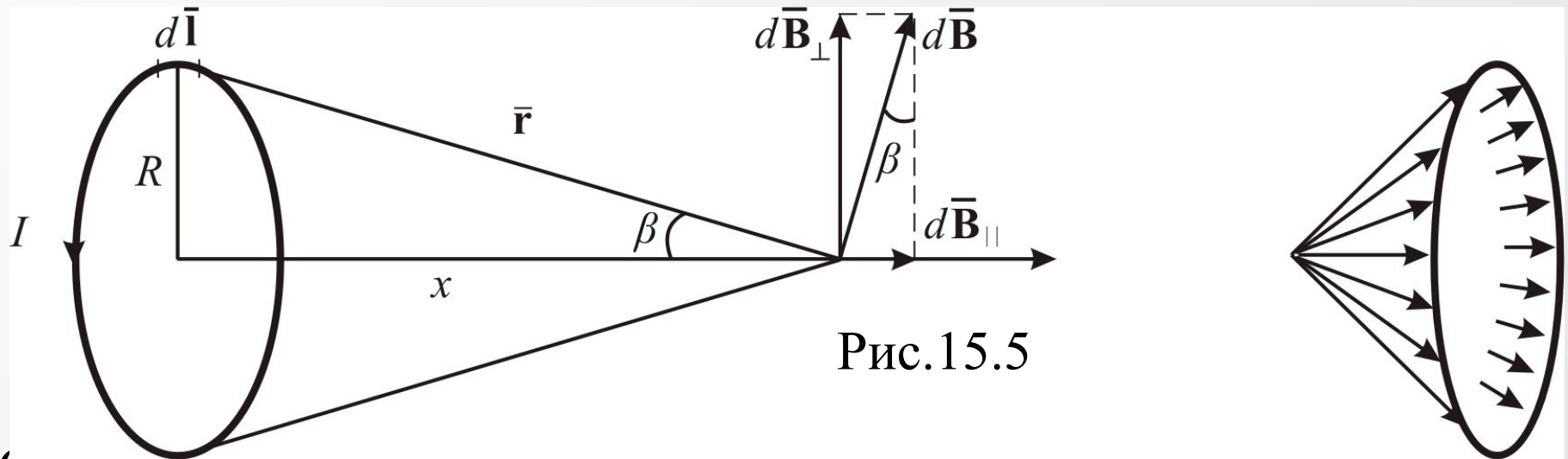


Рис.15.5

Определим магнитную индукцию на оси проводника с током на расстоянии x от плоскости кругового тока. Векторы $d\vec{B}$ перпендикулярны плоскостям проходящим через соответствующие $d\vec{I}$ и \vec{r} . Следовательно, они образуют

симметричный конический веер. Из соображения симметрии видно что результирующий вектор \vec{B} направлен вдоль оси кругового тока. Каждый из векторов $d\vec{B}$ вносит вклад равный dB_{\parallel} , а $d\vec{B}_{\perp}$ взаимно уничтожаются. Но $dB_{\parallel} = dB \sin\beta$, $\sin\beta = \frac{R}{r}$, а угол α – прямой, поэтому $\sin\alpha = 1$, тогда:

$$dB_{\parallel} = dB \frac{R}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \frac{R}{r} \quad (15.2.8)$$

Заменим $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ и проинтегрируем по всему контуру $l = 2\pi R$:

$$B = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (15.2.9)$$

При $x = 0$:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (15.2.10)$$

магнитная индукция в центре кругового тока.

Заметим, что в числителе (15.2.9) $I\pi R^2 = IS = p_m$ – магнитный

момент контура. На большом расстоянии от контура $R \ll x$ можно записать:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{x^3} \quad (15.2.11)$$

Формула (15.2.11) аналогична формуле для напряженности магнитного поля на оси диполя. Учитывая, что \vec{B} на оси кругового тока и \vec{p}_m направлены вдоль положительной нормали к контуру, можно записать

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{x^3} \quad (15.2.12)$$

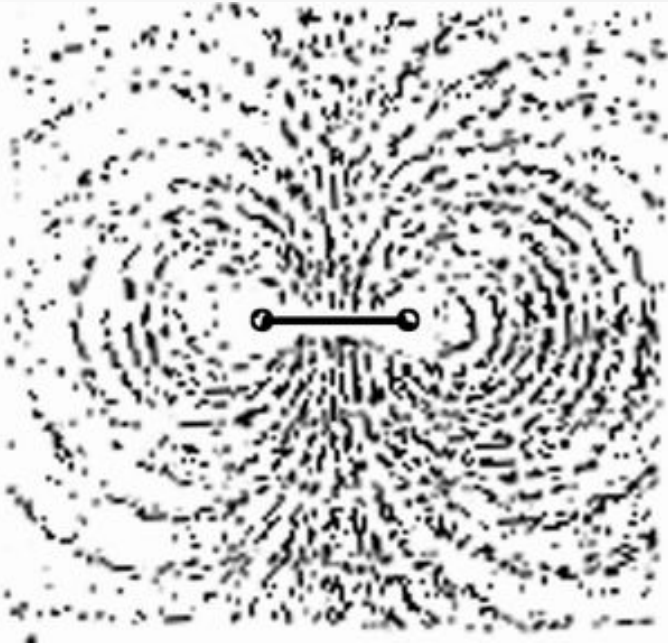


Рис. 15.6. Силовые линии магнитного поля кругового тока – опыт с железными опилками.

15.3. Магнитное поле движущегося заряда

Как известно электрический ток – упорядоченное движение зарядов. И как мы доказали только что, магнитное поле порождается движущимися зарядами. Найдем магнитное поле, создаваемое одним движущимся зарядом (рис. 15.7).

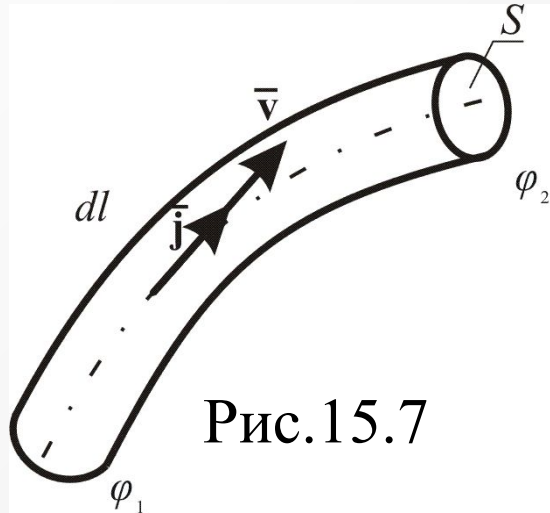


Рис.15.7

В уравнении (15.2.2.) заменим I на jS . Векторы \vec{j} и \vec{v} имеют одинаковое направление, значит $I \cdot dl = S \cdot j \cdot dl$. Если все заряды одинаковы и имеют заряд q , то

$$\vec{j} = qn\vec{v}_{др.} \quad (15.3.1)$$

n – число носителей заряда в единице объема; $\vec{v}_{др.}$ – дрейфовая скорость зарядов. Если заряды положительные, то \vec{j} и \vec{v} имеют одно направление (рис. 15.7). Подставив (15.3.1) в (15.2.2)

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{S \cdot d\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} \cdot q[\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{r^3} \quad (15.3.2)$$

Обозначим $dN = S \cdot d\mathbf{l} \cdot \mathbf{n}$ – число носителей заряда в отрезке $d\mathbf{l}$.
 Разделив (10.3.2) на это число, получим \mathbf{B}_1 , магнитное поле, создаваемое одним зарядом, движущегося со скоростью \mathbf{v} :

$$\mathbf{B}_1 = \frac{d\mathbf{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{r^3} \quad (15.3.3)$$

Это магнитная индукция поля, создаваемая одним зарядом в вакууме.

В скалярной форме:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin(\mathbf{v}, \mathbf{r})}{r^3} \quad (15.3.4)$$

15.4. Напряженность магнитного поля.

Итак, мы с вами выяснили, что магнитное поле – это одна из форм проявления электромагнитного поля, особенностью которого является то, что это поле действует только на движущиеся частицы и тела, обладающие электрическим зарядом, а также на намагниченные тела.

Магнитное поле создается проводником с током, движущимися электрическими заряженными частицами и телами, а так же переменными электрическими полями.

Силовой характеристикой магнитного поля служит вектор магнитной индукции $\vec{\mathbf{B}}$, определяемый по формуле:

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{r}}]}{r^3} \quad (15.4.1)$$

для одного заряда в вакууме.

Еще одной характеристикой магнитного поля является *напряженность*.

Напряженностью магнитного поля называют векторную величину \vec{H} , характеризующую магнитное поле и определяемую следующим образом:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (15.4.2)$$

Тогда напряженность магнитного поля заряда q , движущегося в вакууме равна:

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} \quad (15.4.3)$$

Это выражение показывает закон Био-Савара-Лапласа для \vec{H} .
Напряженность магнитного поля \vec{H} является как бы аналогом электрического смещения \vec{D} в электростатике.

15.5. Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции

Итак мы с вами говорили, что в природе нет магнитных зарядов. В свое время Дирак высказал предположение о существовании магнитных зарядов (названные монополии Дирака). Однако до сих пор они не найдены. Это приводит к тому, что линии вектора

В не имеют ни начала ни конца. А как же поток вектора через поверхность? Мы знаем, что поток любого вектора $\Phi = N_{нач.} - N_{оканч.}$, т.е. разность числа линий начинающихся у поверхности и числа линий заканчивающихся внутри поверхности.

В соответствии с вышеизложенным, можно сделать заключение, что поток вектора **В** через замкнутую поверхность должен быть равен нулю. Таким образом для любого магнитного поля и произвольной замкнутой поверхности S имеет место условие:

$$\Phi_B = \oint_S B dS = 0 \quad (15.5.1)$$

Это теорема Гаусса для Φ_B (в интегральной форме): *поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.*

Этот результат является математическим выражением того, что в природе нет магнитных зарядов — источников магнитного поля на которых начинались бы и заканчивались линии магнитной индукции.

Заменяя поверхностный интеграл в (15.5.1) объемным, получим:

$$\int \nabla B dV = 0 \quad (15.5.2)$$

Это условие должно выполняться для любого произвольного объема V , а это в свою очередь возможно, если подынтегральная функция в каждой точке поля равна нулю. *Таким образом магнитное поле обладает тем свойством, что его дивергенция всюду равна нулю*

или

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (15.5.3) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

В этом его отличие от электростатического поля, которое является потенциальным и может быть выражено скалярным потенциалом φ , **магнитное поле – вихревое, или соленоидальное.**

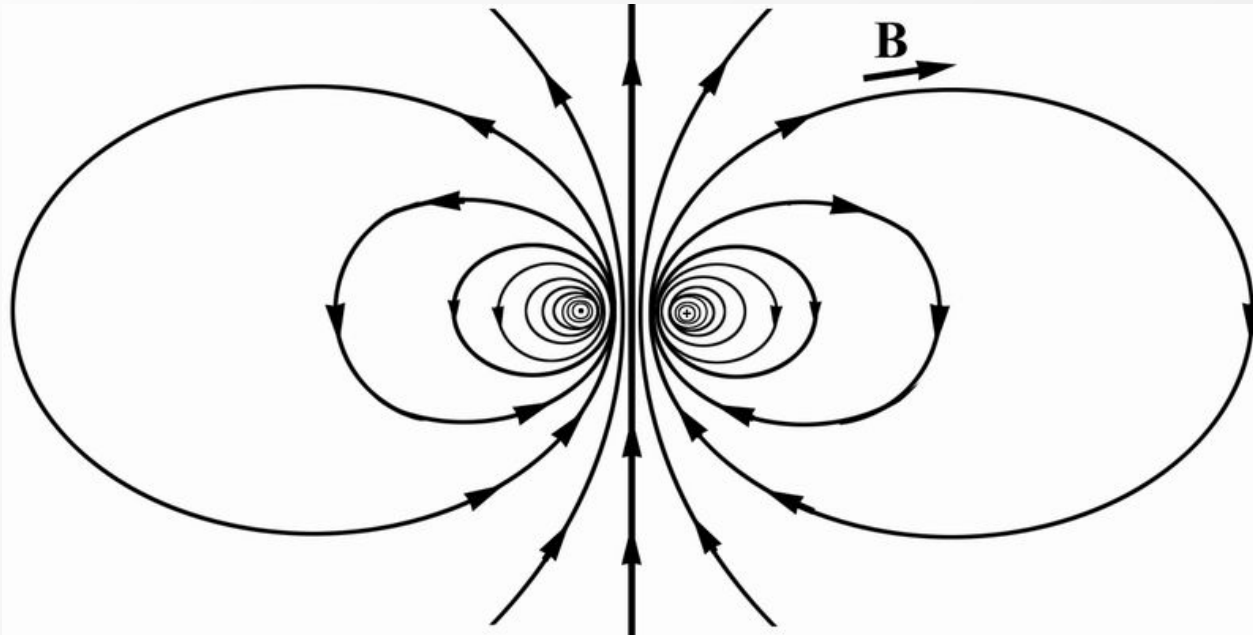


Рис. 15.8. Магнитное поле B , создаваемое зарядом, движущимся по круговому контуру

Сегодня: *

Лекция окончена.

До свидания!

УРА! УРА! УРА!