25.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Пусть некоторое тело колеблется и вдоль оси X и вдоль оси Y, т.е. участвует в двух взаимно-перпендикулярных колебаниях. Найдем уравнение результирующего колебания. (25.3.1) Для простоты примем

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega,$$

тогда $x = a_1\cos(\omega t + \boldsymbol{\alpha}_1)$ и $y = a_2\cos(\omega t + \boldsymbol{\alpha}_2)$.

$\Delta\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1$ разность фаз между обоими колебаниями. Чтобы получить уравнение траектории, надо исключить из этих уравнений время *t.*

Упростим выражения, выберем начало отсчета так, чтобы $\boldsymbol{\alpha}_1 = 0$ т.е. $x = a_1\cos\omega t$ и $y = a_2\cos(\omega t + \Delta\boldsymbol{\alpha}_2)$, (25.3.2)

где $\Delta\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_2.$

Из первого уравнения следует, что $x/a = \cos\omega t$

Распишем второе уравнение через косинус суммы, подставляя при этом вместо $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ их значения (25.3.3) и (25.3.3,а):

$$y/a_2 = \cos\omega t \cdot \cos\Delta\alpha - \sin\omega t \cdot \sin\Delta\alpha$$

$$= (x/a_1) \cos\Delta\alpha - (\pm \sin\Delta\alpha(\sqrt{1 - x^2/a_1^2}))$$

Перепишем

$$(y/a_2 - (x/a_1)\cos\Delta\alpha)^2 = (-\sin\Delta\alpha\sqrt{1 - x^2/a_1^2}\,)^2$$

Возведем обе части в квадрат

$$y^2/a_2^2 + (x^2/a_1^2) \cdot \cos^2\Delta\alpha - (2xy/a_1a_2) \cdot \cos\Delta\alpha = \sin^2\Delta\alpha - (x^2/a_1^2) \cdot \sin^2\Delta\alpha$$

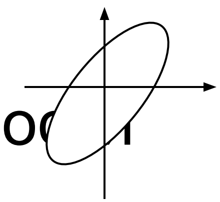
$$y^2/a_2^2 + (x^2/a_1^2)(\cos^2\Delta\alpha + \sin^2\Delta\alpha) - (2xy/a_1a_2) \cdot \cos\Delta\alpha = \sin^2\Delta\alpha$$

$$y^2/a_2^2 + x^2/a_1^2 - (2xy/a_1a_2) \cdot \cos\Delta\alpha = \sin^2\Delta\alpha$$

В общем, виде

$$y^2/a_2^2 + x^2/a_1^2 - (2xy/a_1a_2) \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) \qquad (3.4)$$

Последнее уравнение есть, вообще говоря, уравнение эллипса, оси которого повернуты относительно координатных осей *x* и *y*.



Ориентация эллипса и величина его полуосей зависят довольно сложным образом от амплитуд a_1 и a_2 и разности фаз $\boldsymbol{\alpha}$.

Определим форму траектории для некоторых частных случаев.

1) Начальные фазы колебаний одинаковы $\alpha_1 = \alpha_2$ т.е. $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$

Тогда уравнение имеет вид $\boldsymbol{y^2/a_2^2 + x^2/a_1^2 - 2xy/a_1a_2} = 0$

или $(x/a_1 - y/a_2)^2 = 0$ *или* $x/a_1 = y/a_2$

или $x/y = a_1/a_2$ *или* $y = (a_1/a_2) \cdot x$ (3.5)

(Это уравнение прямой, проходящей через начало координат)

Следовательно, в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми начальными фазами колебания будут происходить вдоль прямой

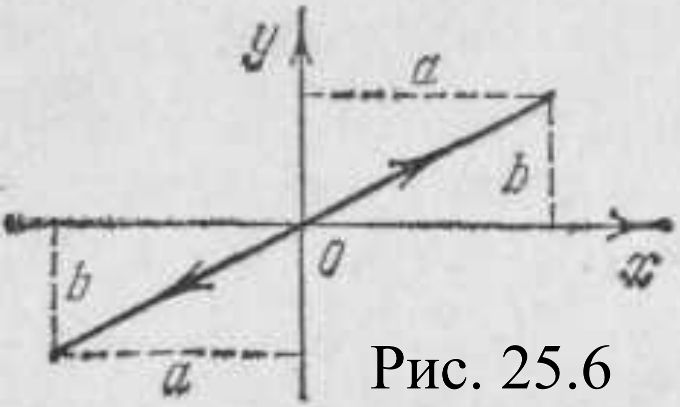


Рис. 25.6

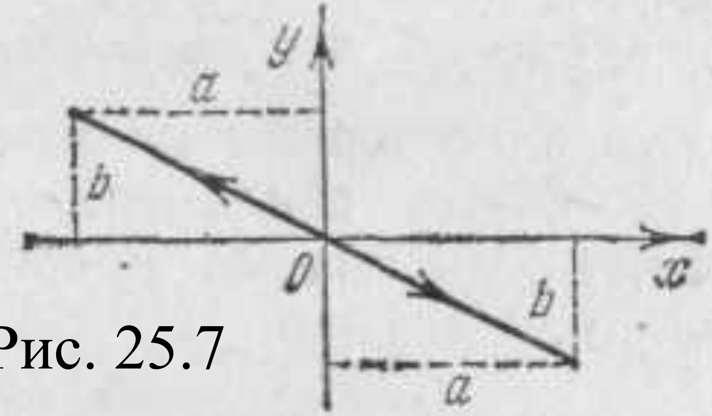


Рис. 25.7

Результирующее движение является гармоническим колебанием вдоль прямой с частотой **ω** и амплитудой, равной $\sqrt{a_1^2 + a_{25}^2}$ (рис. 25.6).

2. Разность фаз **α** равна ± π. Уравнение (3.4) примет вид

$$(x/a_1 + y/a_2)^2 = 0, \qquad (3.6)$$

Откуда получается, что результирующее движение представляет собой гармоническое колебание вдоль прямой (рис. 25.7)

$$y = -(a_1/a_2) \cdot x.$$

3. При **α = ± π/2** уравнение (3.4) переходит в

$$y^2/a^2 + x^2/a^2 = 1 \qquad (3.7)$$

т.е. уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний. Случай *эллиптически поляризованных колебаний.* При равенстве амплитуд a_1 и a_2 эллипс вырождается в окружность.

Случаи **α = + π/2** и **α = -π/2** отличаются направлением движения по эллипсу или по окружности. Если **α = +π/2**, уравнение (3.7) можно записать следующим образом:

$x = a_1\cos\omega t$ и $y = -a_2\sin\omega t$. (3.8)

В момент времени *t* = 0 тело находится в точке 1 (рис. 25.8). В последующие моменты времени координата x уменьшается, а координата y становится отрицательной. Следовательно, движение совершается по

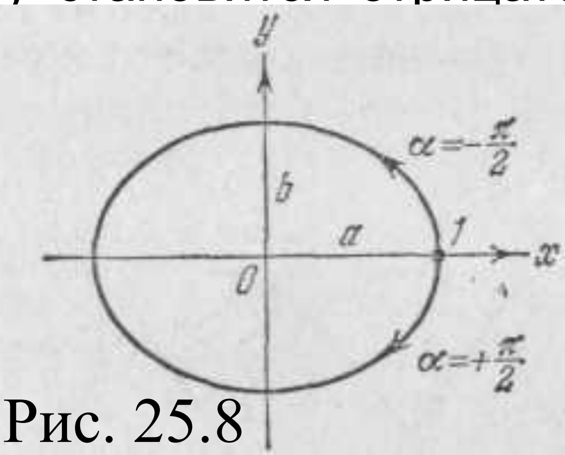


Рис. 25.8

= -π/2, уравнение (3.7) можно записать следующим образом:

$x = a_1\cos\omega t$ и $y = +a_2\sin\omega t$. (3.8)

Отсюда можно заключить, что движение происходит против часовой стрелки.

Из сказанного следует, что движение по окружности радиуса R с угловой скоростью **ω** может быть представлено как сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний:

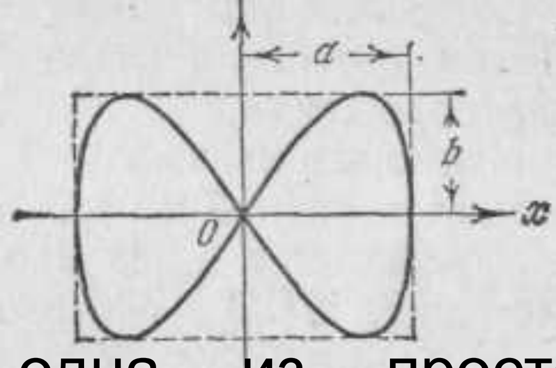
$$x = R\cos\omega t \text{ и } y = R\sin\omega t. \qquad (3.10)$$

Такие колебания называются циркулярно поляризованные колебания.

4) Все остальные разности фаз дают эллипсы с различным углом наклона относительно осей координат. Необходимо отметить, что все рассматриваемые случаи, все кривые - это эллипсы (даже прямая - частный случай эллипса).

В случае, когда частоты взаимно перпендикулярных колебаний отличаются на очень малую величину, их можно рассматривать как колебания одинаковой частоты, но с медленно меняющейся разностью фаз. Результирующее движение в этом случае происходит по медленно видоизменяющейся кривой, которая будет последовательно принимать форму, отвечающую всем значениям разности фаз от -π до + π

Рис. 25.9



Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых фигурами Лиссажу. На рис. 25.9 показана одна из простейших траекторий. Получающаяся при отношении частот 1:2 и разности фаз π/2. Уравнения колебаний имеют вид

$$x = a\cos\omega t \quad \text{и} \quad y = b\cos(2\omega t + \pi/2) \qquad (3.11)$$

За то время, пока вдоль оси *x* точка успевает пройти из одного крайнего положения в другое, вдоль оси *y*, выйдя из нулевого положения, она успевает достигнуть одного крайнего положения, затем другого и вернуться в нулевое положение.

При отношении частот 1:2 и разности фаз, равной нулю, траектория вырождается в незамкнутую кривую (рис. 25.10), по которой точка движется туда и обратно. Чем ближе к единице рациональная дробь, выражающая отношение частот колебаний, тем сложнее оказывается фигура Лиссажу.

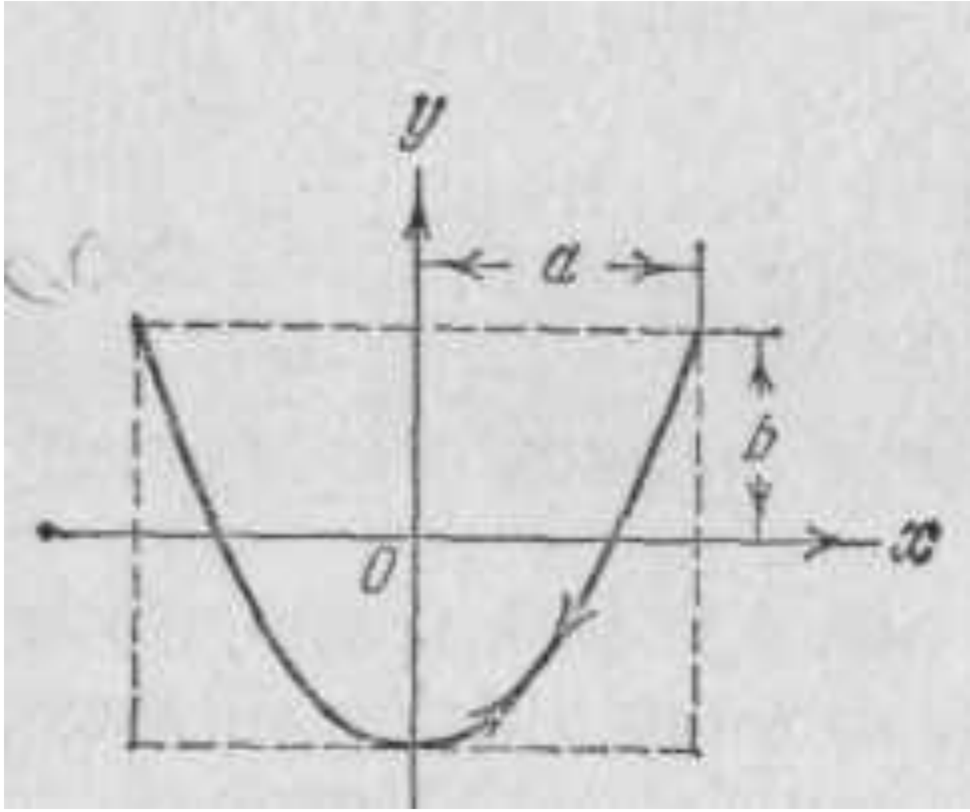


Рис. 25.10

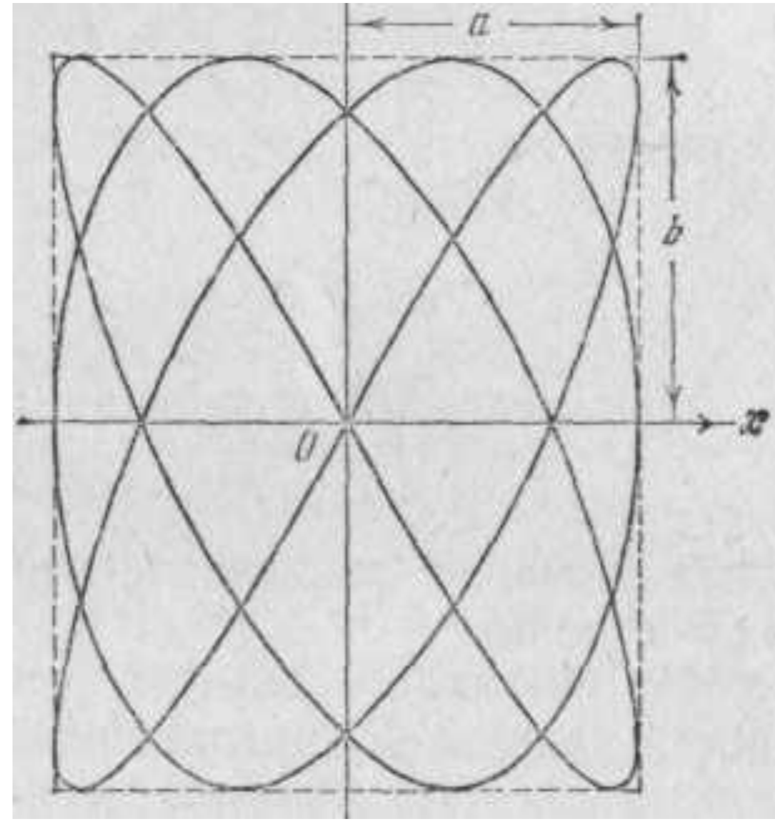


Рис. 25.11

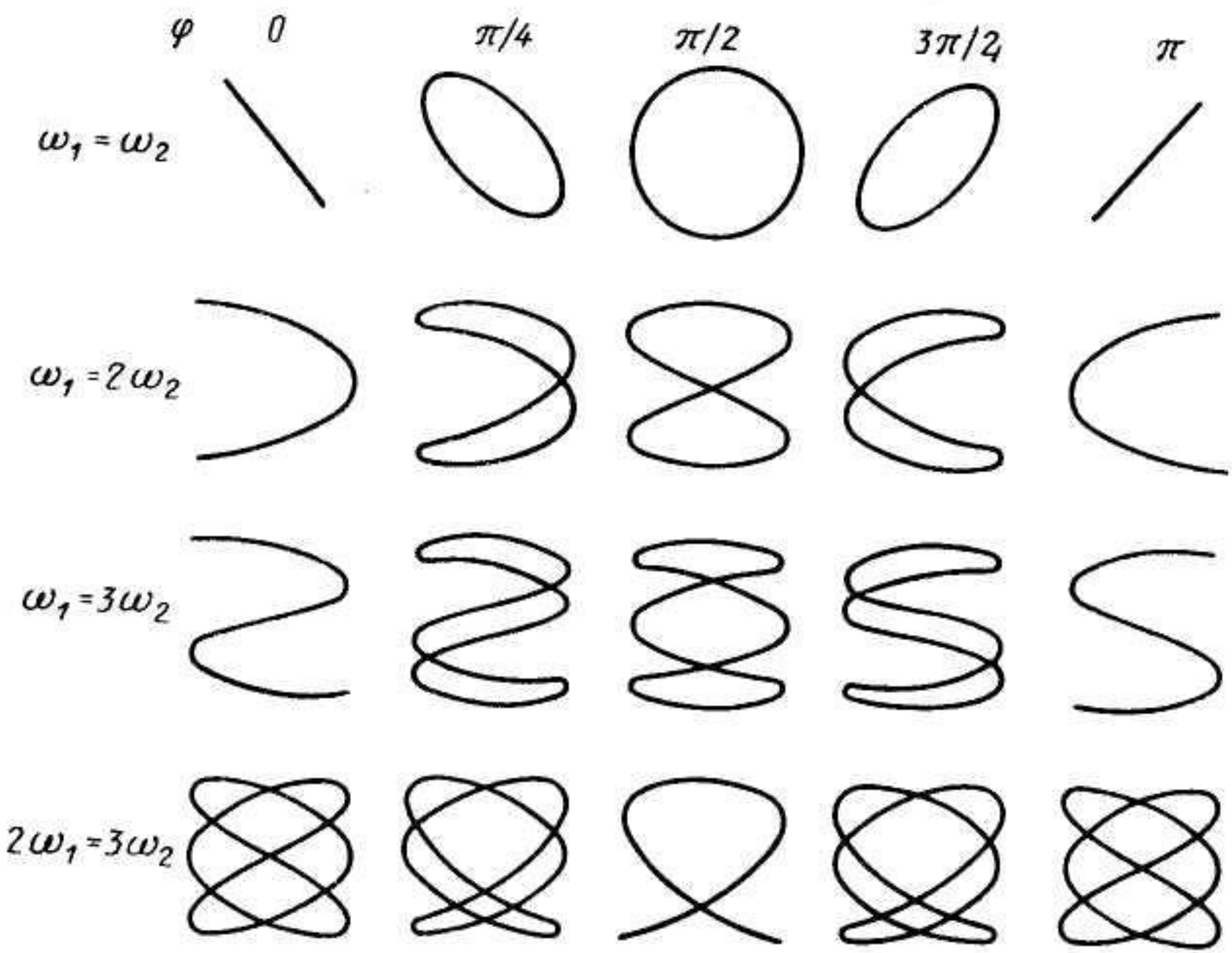


Рис. 25.125