Сегодня: *

Лекция 28. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

4.1 Квазистационарные токи

4.2 Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

4.3 Свободные затухающие электрические колебания

4.4 Вынужденные электрические колебания

4.5 Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

4.1 Квазистационарные токи

При рассмотрении электрических колебаний приходится иметь дело с токами, изменяющимися во времени. Закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа были установлены для постоянного тока. Однако они остаются справедливыми и для мгновенных значений изменяющегося тока.

Электромагнитные сигналы распространяются по цепи со скоростью света *c*. Пусть l – длина электрической цепи. Тогда время распространения сигнала в данной цепи $t = l / c$. Если $t << T$ (T – период колебаний электрического тока), то такие токи называются *квазистационарными.* При этом условии мгновенное значение силы тока во всех участках цепи будет постоянным. Для частоты $f = 50$ Гц условие квазистационарности выполняется при длине цепи ~ 100 км.

Рассматривая в дальнейшем электрические колебания, мы будем считать, что токи квазистационарны.

4.2 Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

В цепи, содержащей индуктивность (L) и ёмкость (C) могут возникать электрические колебания. Такая цепь называется ***колебательным контуром***

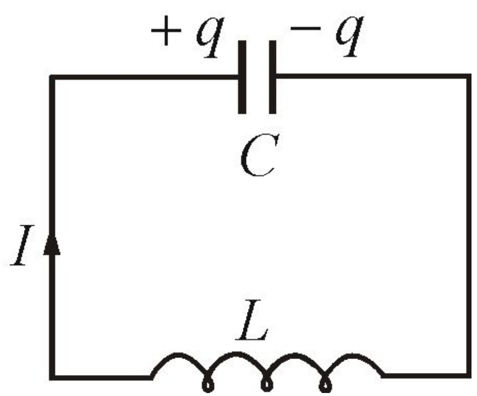
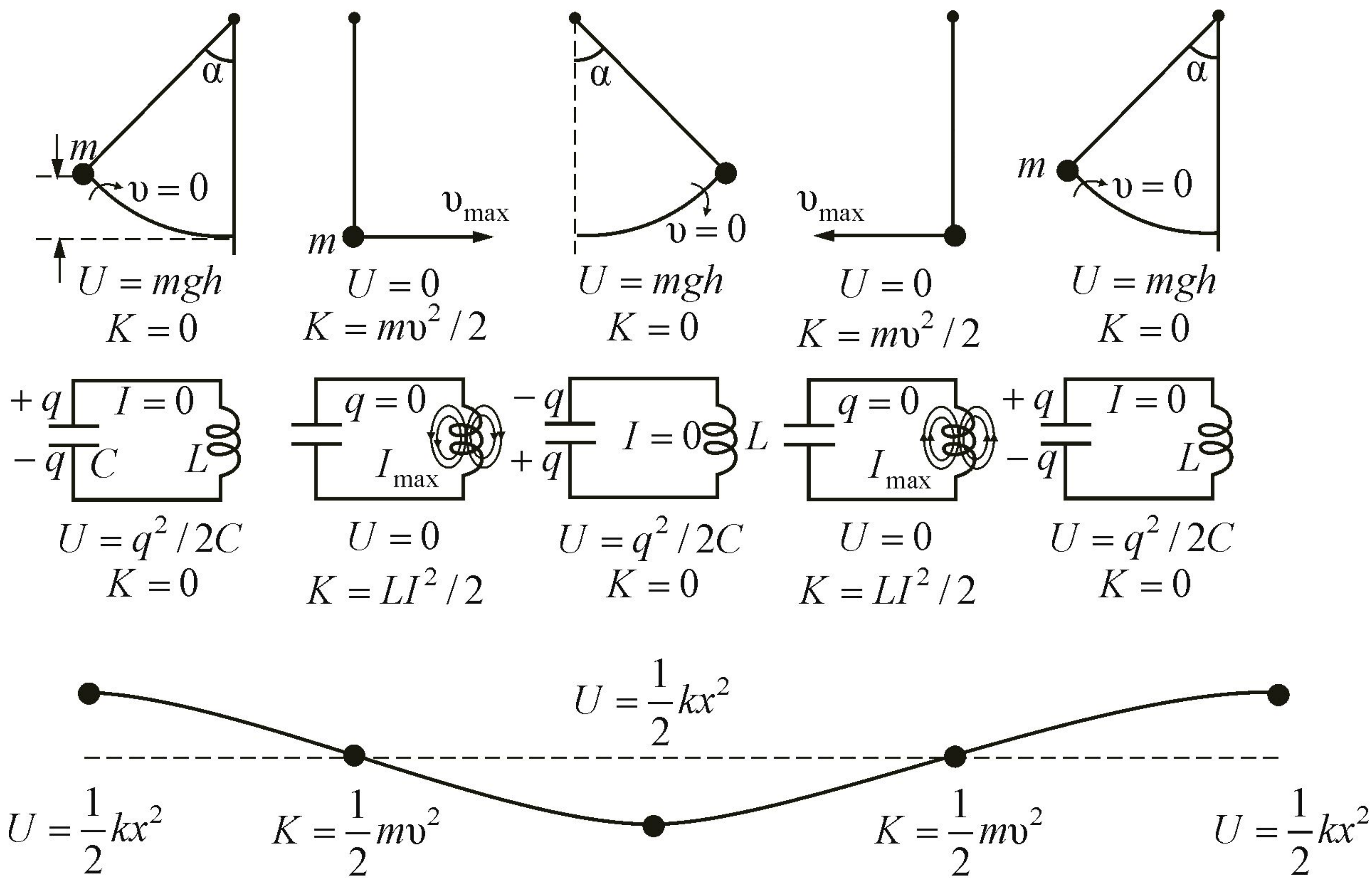


Рис. 1

Колебания в контуре можно вызвать либо зарядив конденсатор, либо вызвав в индуктивности ток (например, включив магнитное поле).

Т.к. $R = 0$, то полная энергия контура $E = \text{const}$



α
m
υ = 0
U = mgh
K = 0
υmax
U = 0
K = mυ² / 2
+q
−q
C
L
I = 0
q = 0
Imax
U = q² / 2C
K = LI² / 2
U = ½kx²
K = ½mυ²

Рисунок 2

Если энергия конденсатора равна нулю, то энергия магнитного поля максимальна и наоборот...

Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что, энергия электрического поля $U = \frac{q^2}{2C}$ аналогична потенциальной энергии упругой деформации, а энергия магнитного поля аналогична кинетической энергии;

Индуктивность L играет роль массы m

$1/C$ – роль коэффициента жесткости k

Заряду q соответствует смещение маятника x

Силе тока $I \sim$ скорость υ

Напряжению $U \sim$ ускорение a

В соответствии с законом Кирхгофа (и законом сохранения энергии)

$R = 0$

$$\boxed{\frac{q}{C} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}} \qquad (28.2.1)$$

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, \qquad \mathcal{E}_i = -L\frac{dI}{dt}, \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}q = 0} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Вновь мы получили дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 q = 0, \quad (28.2.2)$$

решением которого является гармоническая функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (28.2.3)$$

Таким образом, заряд на обкладке конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой ω_0 – *собственная частота контура*. Для периода колебаний получается так называемая *формула Томсона*:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}} \qquad (28.2.4)$$

$$U = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (28.2.5)$$

$$U_m C = \frac{I_m}{\omega_0}; \qquad \boxed{U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m}$$

$\sqrt{\frac{L}{C}}$ – волновое сопротивл [Ом].

$$U_m = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}$$ Закон Ома

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_m = \omega_0 q_m;$$

На емкости ток опережает напряжение на π/2. *На индуктивности наоборот напряжение опережает ток на* π/2.

4.3 Свободные затухающие электрические колебания

Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением. Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего колебания затухают.

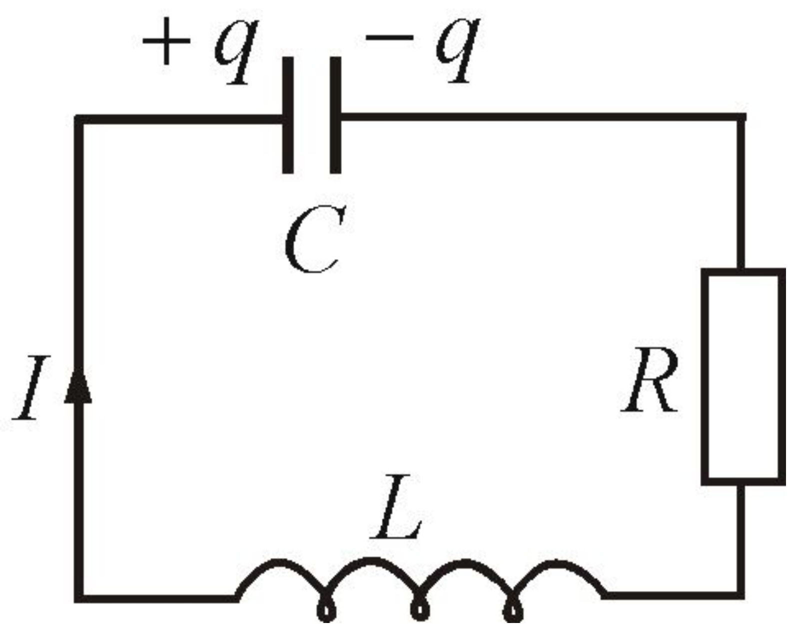


Рис. 3

По второму закону Кирхгофа

$$IR + \frac{q}{c} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 = 0}$$

Это уравнение свободных затухающих колебаний в контуре R, L и C

решение этого уравнения имеет вид:

$$\boxed{q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi),}$$

$\beta = R/2L$ - коэффициент затухания,

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ - собственная частота контура при $\beta \le \omega_0$, т.е. $\dfrac{R}{2L} < \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad \text{или} \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

На рис.28.4, показан вид затухающих колебаний заряда q и тока I.

Колебаниям q соответствует x – смещение маятника из положения равновесия, силе тока I – скорость υ.

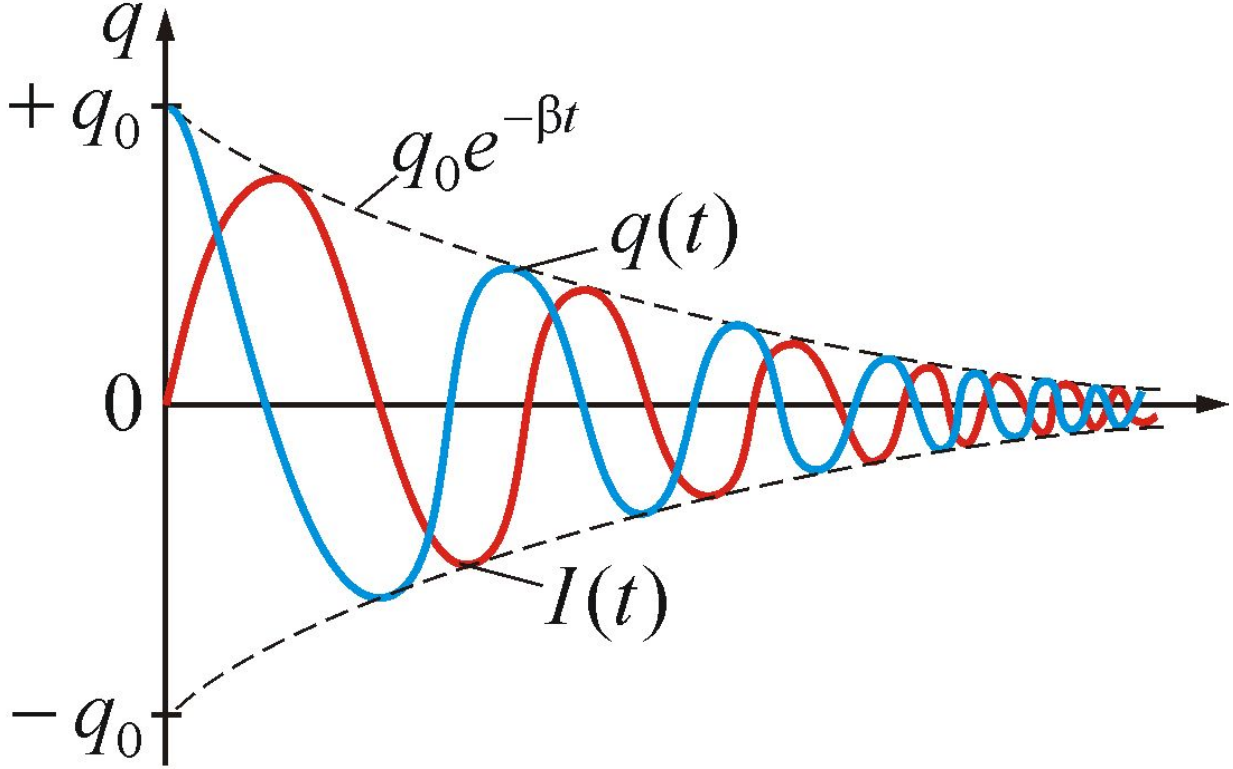


Рис.28. 4

Затухание принято характеризовать логарифмическим декрементом затухания

$$\chi = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

$$\beta = \frac{R}{2L} \qquad\qquad T = \frac{2\pi}{\omega};$$

$$\chi = \beta T = \frac{\pi R}{L\omega}$$

R, L, ω – определяются параметрами контура, следовательно, и χ является характеристикой контура. Если затухание невелико $\beta^2 << \omega_0^2$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad\qquad \boxed{\chi = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

Добротность колебательного контура Q определяется как величина обратно пропорциональная χ,

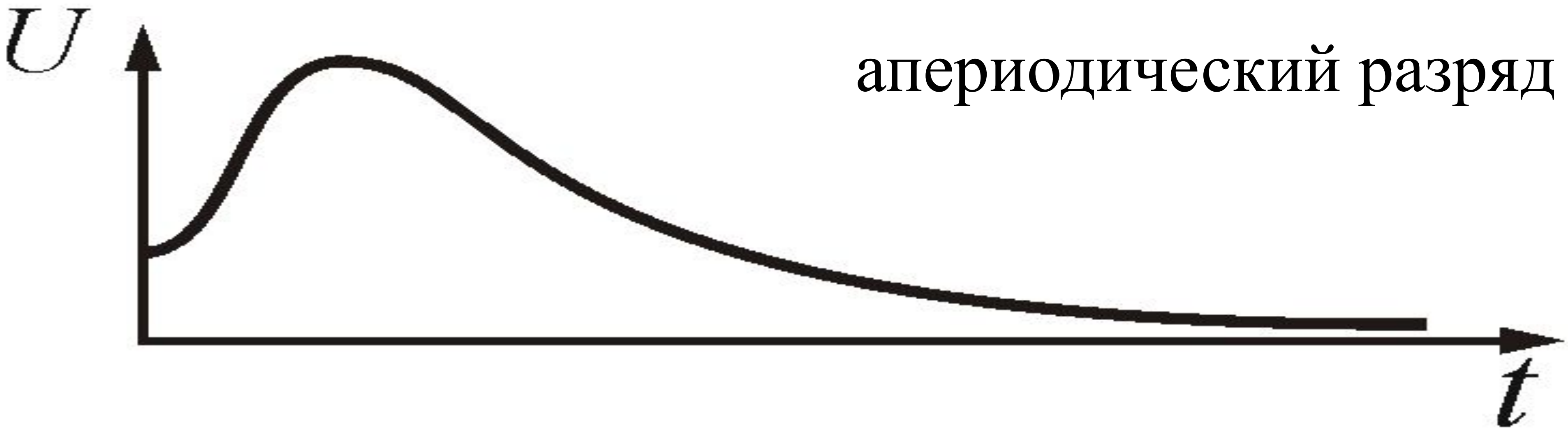
$$\boxed{Q = \frac{\pi}{\chi}}$$

$$\chi = \frac{1}{N} \quad \text{то} \quad Q = \pi N$$

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}}$$

W – энергия контура в данный момент, ΔW – убыль энергии за один период, следующий за этим моментом

При $\boxed{\beta^2 \ge \omega_0^2,}$ т.е. при $R^2/4L^2 \ge 1/LC$



апериодический разряд

Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется *критическим сопротивлением.*

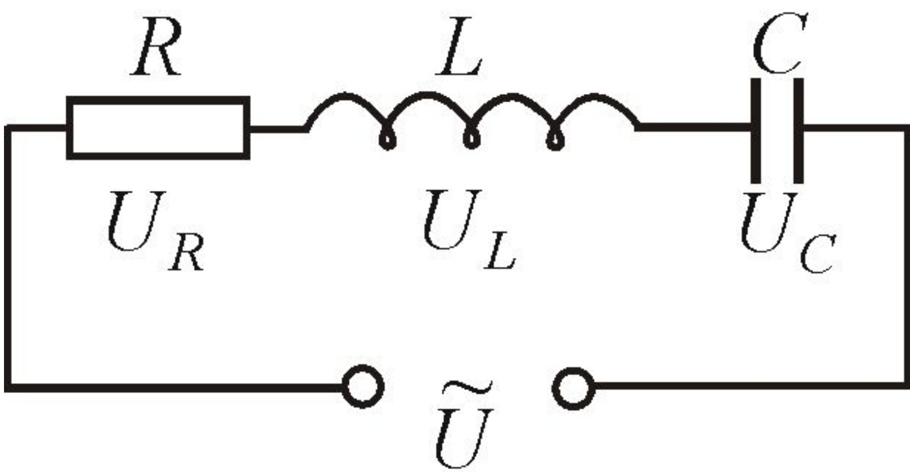
$$\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$$

$$\boxed{R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2R_{\text{волн}}}$$

28.4 Вынужденные электрические колебания

К контуру, изображенному на рисунке 4.1 подадим переменное напряжение U

$$U = U_m \cos\omega t \quad (28.4.1)$$



$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t \quad (28.4.2)$$

уравнение вынужденных электрических колебаний

Это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением механических колебаний. Его решение при больших t

$$\boxed{q = q_m \cos(\omega t + \varphi)} \qquad (28.4.3)$$

где

$$q_m = U_m / \omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = U_m / \omega \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$$

Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

называется *полным сопротивлением цепи*, ***(импеданс)***

а величина

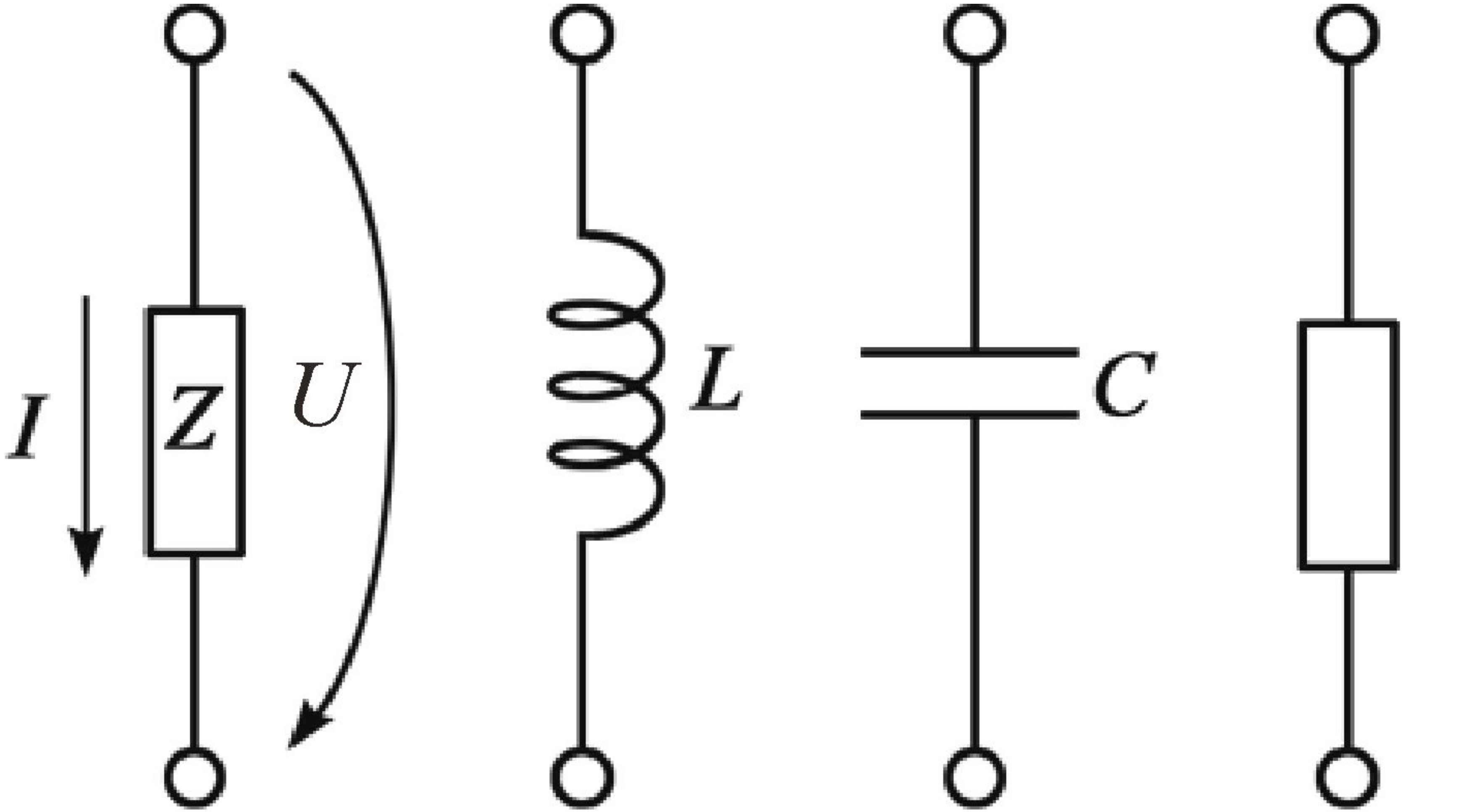
$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

– *реактивным сопротивлением.*

R – *активное сопротивление* отвечает за потерю мощности в цепи.

X – *реактивное сопротивление*, определяет величину энергии пульсирующей в цепи с частотой 2ω.

Идеальные элементы цепи и соответствующие им импедансы:



$U = IZ$ $\quad$ $Z_L = i\omega L$ $\quad$ $Z_C = \dfrac{1}{i\omega C}$ $\quad$ $Z_R = R$

где φ = α - π/2 — сдвиг по фазе между током и приложенным напряжением (см. (27.26)). В соответствии с выражением (27.13)

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \qquad (27.16)$$

Из формулы (27.16) вытекает, что ток отстает по фазе от напряжения ($\varphi > 0$), если $\omega L > 1/(\omega C)$, и опережает напряжение ($\varphi < 0$), если $\omega L < 1/(\omega C)$.

Формулы (27.15) и (27.16) можно также получить с помощью векторной диаграммы. Это будет сделано ниже для переменных токов.